ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 60, Вып. 1, 1996

УДК 531.36

© 1996 г. А.А. Буров

О ДВИЖЕНИИ КРЕСТООБРАЗНЫХ ТЕЛ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

Рассматривается движение октаэдрального тела, в противоположных вершинах которого размещены одинаковые массы, вокруг неподвижной точки в центральном поле ньютоновского притяжения. Тело подвешено в его центре масс, совпадающем с геометрическим центром, а размеры тела и величины сосредоточенных в вершинах масс таковы, что все главные центральные моменты инерции равны. Рассматривается задача о существовании стационарных движений такого тела, исследуются устойчивость и бифуркации некоторых классов решений. Результаты сопоставляются с результатами исследования устойчивости стационарных движений твердого тела, распределение масс которого допускает группу симметрий правильного октаэдра [1].

1. Рассмотрим движение в центральном поле тяготения твердого тела, образованного тройкой невесомых взаимно перпендикулярных стержней l_1, l_2 и l_3, имеющих ровно одну общую точку O – их середины. Длины стержней равны $2a_1$, $2a_2$ и $2a_3$, а массы, сосредоточенные на противоположных концах каждого из них равны m_i, здесь и всюду далее $i = 1, 2, 3$.

Пусть $Ox_1x_2x_3$ – связанная с телом прямоугольная декартова система координат с осями, направленными вдоль стрежней l_1, l_2 и l_3, C – притягивающий центр. Тогда в этой системе координат

$$\overline{CO} = r(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad |\overline{CO}| = r$$

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости, $I = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – главный центральный тензор инерции. Предположим, что $I_1 = I_2 = I_3 = I$. Тогда $m_1a_1^2 = m_2a_2^2 = m_3a_3^2$, и выражения для кинетической и потенциальной энергии имеют вид

$$T = \tfrac{1}{2} I \sum_i \omega_i^2, \quad U = -fM \sum_i m_i (1/\rho_i^+ + 1/\rho_i^-)$$

$$\rho_i^{\pm} = (r^2 \pm 2ra_i\gamma_i + a_i^2)^{-1/2}$$

где f – постоянная всемирного тяготения, M – масса притягивающего центра.

Уравнения движения имеют вид

$$I\omega^{\cdot} = \gamma \times \partial U / \partial \gamma, \quad \gamma^{\cdot} = \gamma \times \omega$$

Они допускают первые интегралы: $H = T + U = h$ – интеграл энергии, $J_1 = I(\omega, \gamma) = p_\psi$ – интеграл проекции вектора кинетического момента на ось γ, $J_2 = (\gamma, \gamma) = 1$ – геометрический интеграл. Для их интегрируемости в общем случае недостает одного дополнительного интеграла.

2. Для отыскания стационарных движений рассмотрим критические точки приведенной потенциальной энергии

$$W = p_\psi^2 (2I(\gamma))^{-1} + U(\gamma), \quad I(\gamma) = \sum_i I_i \gamma_i^2$$

на зафиксированном естественным образом уровне геометрического интеграла. Так как все моменты инерции предполагаются равными, то $I(\gamma) \equiv I$ и задача о стационарных движениях и достаточных условиях их устойчивости совпадает с задачей об исследовании множеств положений равновесия рассматриваемой системы и их устойчивости.

Рассмотрим критические точки функции

$$W_\mu = W + \mu((\gamma, \gamma) - 1)/2.$$

Они определяются уравнениями

$$\partial W_\mu / \partial \gamma_i = fMm_i r a_i \left((1/\rho_i^+)^3 - (1/\rho_i^-)^3 \right) + \mu \gamma_i = 0, \quad \mu = -(\gamma, \partial U / \partial \gamma) \tag{2.1}$$

При этом достаточные условия устойчивости стационарных движений согласно теореме Рауса определяются как условия положительной определенности квадратичной формы

$$2\delta^2 W_\mu = \sum_i (\partial^2 U / \partial \gamma_i^2 + \mu) \delta \gamma_i^2$$

на линейном многообразии $\delta J_2 = \{\delta\gamma\colon (\gamma, \delta\gamma) = 0\}$.

В выражении для второй вариации отсутствуют слагаемые с $\delta\gamma_i\, \delta\gamma_j$, $i \neq j$ в силу равенства нулю соответствующих смешанных производных. Остальные вторые производные в этом выражении имеют вид

$$\partial^2 U / \partial \gamma_i^2 = -3 fMm_i r a_i \left((1/\rho_i^+)^5 + (1/\rho_i^-)^5 \right)$$

Уравнения (2.1) допускают решения

$$\gamma_i = \pm 1, \quad \gamma_j = 0, \quad j \neq i \tag{2.2}$$

На этих решениях i-я ось тела направлена на притягивающий центр и тело вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью. Для указанных решений линейное многообразие имеет вид $\delta J_2 = \{\delta\gamma\colon \delta\gamma_i = 0\}$ и, следовательно, движение устойчиво, если коэффициенты при $\delta\gamma_j^2 (j \neq i)$ положительны. Обозначив $\sigma_i = a_i/r$, представим эти условия в виде ($j \in \{1, 2, 3\}\backslash\{i\}$) (ср. [2])

$$f(\sigma_i, \sigma_j) = \frac{3 + \sigma_i^2}{(1 - \sigma_i^2)^3} - \frac{3}{(1 + \sigma_j^2)^{5/2}} > 0, \quad \sigma_i < 1 \tag{2.3}$$

$$f(\sigma_i, \sigma_j) = \frac{3\sigma_i^2 + 1}{(\sigma_i^2 - 1)^3} - \frac{3\sigma_j}{(1 + \sigma_j^2)^{5/2}} > 0, \quad \sigma_i > 1 \tag{2.4}$$

Исследование показывает, что условия устойчивости (2.3) выполнены всегда, и при $\sigma_i < 1$ рассматриваемое движение всегда устойчиво. Условие устойчивости (2.4) выполнено не всегда. Поэтому при $\sigma_i > 1$ в пространстве $R^3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ множество значений параметров, при которых функция $f(\sigma_i, \sigma_j)$ обращается в нуль, задает бифуркационные поверхности, на которых меняется степень неустойчивости соответствующих стационарных движений. Эти поверхности представляют собой цилиндры с образующими, параллельными k-й оси, $k = \{1, 2, 3\}\backslash\{i, j\}$. Направляющие этих цилиндров задаются уравнениями $f(\sigma_i, \sigma_j) = 0$, причем если $f(\sigma_i(0), 0) = 0$, то $\sigma_i(0) > 1$.

Найденные условия устойчивости сопоставим с условиями устойчивости аналогичных решений для правильного октаэдра. Было доказано [1], что решения такого вида для правильного октаэдра устойчивы для любого отношения a_i/r. Выполненное выше исследование показывает, что в рамках принятых предположений о множестве рассматриваемых тел свойство устойчивости таких решений сохраняется для достаточно широкой области параметров, содержащей параметры, исследованные в [1].

Рассмотрим вопрос о том, существуют ли так называемые "косые" перманентные вращения, когда тело не обращено к притягивающему центру одной из осей x_i. Сначала рассмотрим вопрос о том, могут ли существовать вращения, в случаях, когда притягивающий центр располагается в одной из плокостей Ox_ix_j и, в то же время, не совпадает с осями x_i и x_j. Для этого выполним замену переменных

$$\gamma_i = \sin\vartheta\,\sin\varphi,\ \ \gamma_j = \sin\vartheta\,\cos\varphi,\ \ \gamma_k = \cos\vartheta$$

и будем искать перманентные вращения из уравнений

$$\partial W/\partial\varphi = 0,\ \ \partial W/\partial\vartheta = 0$$

Второе уравнение выполняется при $\upsilon = \pi/2 + \pi l$, $l = 0, \pm 1, \ldots$ Рассмотрим решение, соответствующее углу $\upsilon = \pi/2$. Тогда первое уравнение можно представить вне множества $\{\varphi = 0,\ \varphi = \pi/2 \pmod{\pi}\}$ в виде

$$(1+\sigma_j^2)^{-3/2} f_j(\varphi) = (1+\sigma_i^2)^{-3/2} f_i(\varphi) \tag{2.5}$$

$$f_j(\varphi) = F(\varepsilon_j\cos\varphi)/\cos\varphi,\ \ f_i(\varphi) = F(\varepsilon_i\sin\varphi)/\sin\varphi$$

$$F(x) = (1-x)^{-3/2} - (1+x)^{3/2},\ \ \varepsilon_i = 2\sigma_i(1+\sigma_i^2)^{-1}$$

Рассмотрим свойства функций $f_j(\varphi)$ и $f_i(\varphi)$ на интервале $(0, \pi/2)$. Разложим выражение для f_j в сходящийся ряд по степеням параметра $\varepsilon_j\cos\varphi \in (0, 1)$. Получим

$$f_j(\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} f_{jl}(\varepsilon_j)\cos^{2l}\varphi \tag{2.6}$$

где все функции $f_{jl}(\varepsilon_j)$ положительны. Следовательно, так как любая натуральная степень косинуса на интервале $(0, \pi/2)$ строго монотонно убывает, то и функция $f_j(\varphi)$ также строго монотонно убывает от $F(\varepsilon_j)$ до $3\,\varepsilon_j$.

Разлагая выражение для $f_i(\varphi)$ в сходящийся ряд по степеням параметра $\varepsilon_i\sin\varphi \in (0, 1)$, имеем соотношение, аналогичное (2.6) при замене ε_j на ε_i и $\cos\varphi$ на $\sin\varphi$ с теми же коэффициентами $f_{il} = f_{jl}$ для любого l. Так как любая натуральная степень синуса на интервале $(0, \pi/2)$ строго монотонно возрастает, то и функция $f_i(\varphi)$ также строго монотонно возрастает от $3\,\varepsilon_i$ до $F(\varepsilon_i)$.

Таким образом, если одновременно выполняются условие

$$(1+\sigma_j^2)^{-3/2} F(\varepsilon_j) > 3(1+\sigma_i^2)^{-3/2}\varepsilon_i$$

и аналогичное условие при замене индекса j на i и i на j, то уравнение (2.4) имеет единственное по φ решение.

Из сопоставления с условиями изменения степени неустойчивости "прямых" решений, исследованными ранее, видно, что в пространстве $R^3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \times S^2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ множества косых решений ответвляются от одного из прямых решений $\{\gamma_i = \pm 1, \gamma_j = 0, j \neq i\}$ при изменении его степени неустойчивости как функции от параметров. Это множество стремится к другому из этих решений при стремлении значений параметров задачи к тем значениям, при которых изменяется степень неустойчивости упомянутых других решений. Такой подход к вопросу о ветвлении стационарных движений допускает распространение и на задачи орбитальной динамики твердых тел октаэдральной формы, составленных, например, из однородных стержней или из безмассовых стержней с равными массами на их противоположных концах [2–4].

3. Исследование достаточных условий устойчивости косых решений в общем случае затруднительно, так как эти решения не найдены в виде явных функций от параметров задачи. Тем не менее, когда выполнено условие $a_i = a_j = a$, косые решения можно найти явно. Они имеют вид

$$\gamma_i = \pm\gamma_j = 1/\sqrt{2}, \quad \gamma_k = 0 \tag{3.1}$$

и для них можно выписать явно условия устойчивости. Например, для решения

$$\gamma_i = \gamma_j = 1/\sqrt{2}, \quad \gamma_k = 0$$

линейное многообразие имеет вид

$$\delta J_2 = \{\delta\gamma\colon \delta\gamma_i + \delta\gamma_j = 0\}$$

и условия устойчивости сводятся к условиям положительной определенности квадратичной формы

$$2\delta^2 W_\mu = (\partial^2 U/\partial\gamma_i^2 + \partial^2 U/\partial\gamma_j^2 + 2\mu)\delta\gamma^2 + (\partial^2 U/\partial\gamma_k^2 + \mu)\delta\gamma_k^2$$

$$\delta\gamma = \delta\gamma_i = -\delta\gamma_j$$

Условие положительности первого коэффициента, имеющего с точностью до положительного сомножителя вид

$$-3\sigma(\Delta_+^{-5} + \Delta_-^{-5}) + \sqrt{2}(\Delta_-^{-5} - \Delta_+^{-5}) > 0 \tag{3.2}$$

$$\sigma = a/r, \quad \Delta_\pm = \left(1 \pm \sqrt{2}\sigma + \sigma^2\right)^{1/2}$$

никогда не выполнено. Следовательно, степень неустойчивости данного решения не меньше единицы. Условие положительности второго коэффициента имеет вид

$$g(\sigma,\ \sigma_k) = (\Delta_-^{-3} - \Delta_+^{-3})\sigma^{-1} - 3\sqrt{2}(1 + \sigma_k^2)^{5/2} > 0 \tag{3.3}$$

Область, где выполнено условие (4.3), на плоскости (σ, σ_k) находятся справа от множества $g(\sigma, \sigma_k) = 0$, причем если $g(\sigma(0), \sigma_k) = 0$, то $0 < \sigma(0) < 1$.

Сопоставим найденные условия с условиями устойчивости аналогичных решений для правильного октаэдра. Было доказано [1], что для правильного октаэдра решения такого вида имеют степень неустойчивости единица для любого отношения a_i/r. Выполненное выше исследование показывает, что в рамках принятых предположений о множестве рассматриваемых тел степень неустойчивости таких решений сохраняется для достаточно широкой области параметров, содержащей параметры, исследованные в [1].

4. Изучим вопрос о существовании стационарных движений, таких, что ось вращения тела расположена внутри одного из октантов. Вновь будем считать, что $a_1 = a_2$. Тогда, если ввести углы θ и φ, как это было сделано выше, то можно искать эти решения, скажем, на множестве $\varphi = \pi/4$. При этом, искомое решение на интервале $\theta \in (0, \pi/2)$ должно удовлетворять уравнению

$$m(1+\sigma^2)^{-1/2}\varepsilon f(\theta) = m_3(1+\sigma_k^2)^{-1/2} 2\varepsilon_3 f_3(\theta)$$

$$f_3(\upsilon) = F(\varepsilon_3 \cos\vartheta)/\cos\vartheta, \quad f(\upsilon) = F(\varepsilon \sin\vartheta/\sqrt{2})/(\sin\vartheta/\sqrt{2})$$

$$\varepsilon = 2\sigma\,(1+\sigma^2)^{-1}$$

Выполняя теперь в точности такое же исследование, как и в разд. 2, заключаем, что решения с осью вращения, расположенной в первом октанте, существуют при выполнении неравенств

$$m_3(1+\sigma_3^2)^{-1/2}\varepsilon_3 F(\varepsilon_3) > 3m(1+\sigma^2)^{-1/2}\varepsilon^2$$

$$m(1+\sigma^2)^{-1/2}(\varepsilon/\sqrt{2})F(\varepsilon/\sqrt{2}) > 3m_k(1+\sigma_k^2)^{-1/2}\varepsilon_k^2/2$$

Этому классу решений принадлежит изученное ранее [1] вращение правильного октаэдра с одинаковыми массами в вершинах вокруг оси, проходящей через середины граней.

5. Остановимся на вопросе об интегрируемости приближенных уравнений движения рассматриваемой механической системы в предположении произвольности моментов инерции. Известно, что приближенные уравнения движения, получающиеся в результате разложения потенциала по малым параметрам типа σ_i вплоть до членов второго порядка малости, вполне интегрируемы. При этом:

1) если все три главных центральных момента инерции тела совпадают, то приближенные уравнения движения совпадают с уравнениями движения по инерции однородного шара, и динамика тела тривиальна;

2) если совпадают только два главных центральных момента инерции, то уравнения движения обладают дополнительным интегралом первой степени, аналогичным дополнительному интегралу Кирхгоффа в задаче о движении тела в жидкости;

3) если все три главных центральных момента инерции различны, то уравнения движения обладают дополнительным интегралом, аналогичным интегралу в первом случае Клебша в задаче о движении тела в жидкости.

Рассмотрим приближенные уравнения, получающиеся в результате разложения потенциала в ряд по степеням параметров ε_i с точностью до членов второго порядка малости. Тогда

$$U = U_0 + U_2 + \ldots = -2fM\sum_i m_i\left(r^2 + a_i^2\right)^{-1/2} + \frac{1}{2}\sum_i c_i\gamma_i^2 \ldots$$

$$c_i = -6fMr^2 m_i a_i^2 (r + a_i^2)^{-5/2}, \quad i = 1,\ 2,\ 3$$

Если главные центральные моменты инерции тела равны, то приближенные уравнения движения рассматриваемого твердого тела вокруг неподвижной точки оказываются вполне интегрируемыми: их интеграл совпадает с первым интегралом в так называемом втором случае Клебша задачи о движении твердого тела в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости. Дополнительный интеграл при этом имеет вид

$$J = \frac{1}{2}\sum_i c_i\omega_i^2 - \frac{1}{2}(c_2c_3\gamma_1^2 + c_3c_1\gamma_2^2 + c_1c_2\gamma_3^2)$$

причем в отличие от случая, когда разложение велось по параметрам σ_i, описываемая приближенными уравнениями динамика оказывается совсем не тривиальной: движение описывается в θ-функциях времени.

Если равны только два главных центральных момента инерции, например $I_1 = I_2$, то можно указать лишь два случая, когда уравнения движения допускают дополнительный интеграл. В одном из них имеем $c_1 = c_2$ (и следовательно, $m_1 = m_2$, $a_1 = a_2$), а дополнительный интеграл аналогичен интегралу Кирхгофа в задаче о движении тела в жидкости и имеет вид $J = \omega_3$. В другом случае, имеющем место лишь на нулевом уровне интеграла площадей $\{J_1 = 0\}$, выполнены условия $I_1 = I_2 = 2I_3$ (и, следовательно, $m_1a_1^2 = m_2a_2^2 = m_3a_3^2/3$) и $c_1 + c_2 = 2c_3$. При этом дополнительный интеграл аналогичен частному интегралу Чаплыгина в задаче о движении тела в жидкости и имеет вид [5]

$$J=\left(I_3\omega_1^2-I_3\omega_2^2+c\gamma_3^2\right)^2+4\omega_1^2\omega_2^2I_3^2,\ \ c_1-c_2=c_2-c_3=2c$$

и уравнения интегрируются в эллиптических функциях.

Как и в задаче о движении тела в жидкости [6] (см. также [7]), уравнения движения в случае равенства пары главных моментов инерции не допускают иных случаев существования дополнительного общего первого интеграла помимо упомянутого выше.

Наконец, если все три главных центральных момента инерции тела различны, то приближенные уравнения движения оказываются интегрируемыми не всегда, как это имеет место в случае применения малых параметров типа σ_i, а лишь при выполнении условия Клебша [8]

$$I_1(c_2-c_3)+I_2(c_3-c_1)+I_3(c_1-c_2)=0 \tag{5.1}$$

или $c_i=-\nu I_i+\mu$, аналогичного условию Клебша в задаче о движении твердого тела в идеальной жидкости. При этом дополнительный интеграл имеет вид

$$J=\sum_i I_i^2\omega_i^2+\nu(I_2I_3\gamma_1^2+I_3I_1\gamma_2^2+I_1I_2\gamma_3^2)$$

6. Интегрируемый случай уравнений движения можно указать и для более сложной постановки задачи. Пусть $OX_1X_2X_3$ – абсолютная система координат, C_i – притягивающие центры, расположенные на ее осях X_i соответственно, причем

$$\overline{C_iO}=r_i\cdot\mathbf{S}_i,\ \left|\overline{C_iO}\right|=r_i,\ \mathbf{S}_i=(S_{i1},\ S_{i2},\ S_{i3})$$

M_i – массы, сосредоточенные в точках C_i.

Уравнения движения имеют вид

$$I\omega^{\cdot}=I\omega\times\omega+\sum_i \mathbf{S}_i\times\partial U/\partial\mathbf{S}_i,\ \mathbf{S}_i^{\cdot}=\mathbf{S}_i\times\omega \tag{6.1}$$

Эти уравнения допускают помимо интеграла энергии шесть геометрических интегралов, отражающих ортонормированность базиса $\mathbf{S}_i$. Для интегрируемости этих уравнений в общем случае недостает двух дополнительных первых интегралов.

Введем параметры

$$\varepsilon_{ij}=2r_ia_j(r_i^2+a_j^2)^{-1}$$

и разложим выражения для потенциала в ряд по степеням параметров ε_{ij} вплоть до членов второго порядка малости. Тогда

$$U=U_0+U_2+\ldots=-2f\sum_i M_i\sum_j m_j(r_i^2+a_j^2)^{-1/2}+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j c_{ij}S_{ij}^2+\ldots$$

$$c_{ij}=-\frac{3}{2}M_im_j(r_i^2+a_j^2)^{-5/2}(2r_ia_j)^2\ \ i,\ j=1,\ 2,\ 3$$

и можно рассмотреть вопрос о существовании дополнительных интегралов приближенных уравнений движения.

Остановимся на двух крайних случаях.

Пусть все главные центральные моменты инерции равны. Тогда, если

$$c_{ij}=-x_ir_j+y_i,\ \ i,j=1,2,3$$

то приближенные уравнения движения вполне интегрируемы. При этом дополнительные интегралы квадратичны по каждой из переменных и имеют вид

$$J_1 = I(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) + \sum_i x_i \sum_j r_j S_{ij}^2$$

$$J_2 = -I \sum_i x_i (M \times S_i)^2 + \sum_i x_i^2 \sum_j r_j S_{ij}^2$$

Если же все моменты инерции различны, то пара дополнительных интегралов существует не всегда, как это бывает при использовании разложений по параметрам a_i/r_j (см., например, [8]), а лишь в случае, когда выполнены условия, аналогичные условиям Клебша

$$I_1(c_{i2} - c_{i3}) + I_2(c_{i3} - c_{i1}) + I_3(c_{i1} - c_{i2}) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Таким образом, интегрируемость приближенных уравнений движения обусловлена не только совпадением инертной и гравитационных масс, как это отмечалось в [9] (с. 25), но и тем, каким образом в задаче введены малые параметры.

Автор благодарит А.В. Карапетяна и И.С. Троянова за плодотворные дискуссии и внимание.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-13-16242) и Международного научного фонда (MAK000, MAK300).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суликашвили Р.С.* О влиянии моментов инерции третьего и четвертого порядков на движение твердого тела // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 268–274.
2. *Абрарова Е.В.* Об устойчивости стационарных движений твердого тела в центральном поле // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 947–954.
3. *Pascal M.* Sur le mouvement d'un triple bâtonnet dans un champ Newtonien // J. de Mécanique. 1972. V. 11. № 1. P. 147–160.
4. *Абрарова Е.В., Карапетян А.В.* О стационарных движениях твердого тела в центральном гравитационном поле // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 68–73.
5. *Чаплыгин С.А.* Новое частное решение задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки // Тр. Отд. физ. наук о-ва любителей естествознания. 1904. Т. 12. Вып. 1. С. 1–4.
6. *Сальникова Т.В.* Об интегрируемости уравнений Кирхгофа в симметричном случае // Вестн. МГУ. Математика, Механика. 1985. № 4. С. 68–71.
7. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Неинтегрируемость общей задачи о вращении динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Вестн. МГУ. Математика, Механика. 1986. № 1. С. 39–44.
8. *Козлов В.В., Онищенко Д.А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 6. С. 1298–1300.
9. *Bogoyavlenskij O.I.* General integrable problems of classical mechanics // Communs. Math. Phys. 1993. Vol. 53. C. 23–47.

Москва

Поступила в редакцию
4.III.1994