

УДК 531.01

© 1996 г. Л.И. Седов

ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Показано, как, основываясь на истории развития теории гравитации, можно ставить и эффективно решать задачи механики движения системы взаимодействующих с массовыми силами индивидуально определенных тел, не контактирующих между собой. Теория строится с помощью схематизированной системы особых точек, обладающих (в неголономно вводимых сопутствующих координатах Ферми) собственным временем, массами, термодинамическими и потенциальными энергиями, постоянными моментами количеств движения и погруженных в четырехмерное пространство Минковского. Соответствующие сопутствующие метрики и уравнения движения для вводимых точек в координатах Ферми записываются непосредственно. Для получения законов движения, с точки зрения задаваемых наблюдателей, необходимо воспользоваться разработанными и опубликованными автором алгоритмами расчетов в теории инерциальной навигации в римановых пространствах.

В специальной теории относительности (СТО) постулируется глобально четырехмерное пространство Минковского, а в общей теории относительности (ОТО) постулируется по существу справедливость метрики СТО только вдоль координатных линий L собственного времени τ для индивидуальных точек с элементарными массами dm . Относительно этих точек в теории "чистых гравитационных явлений" постулируется, что $dm = \text{const}$ и что в процессах движения не учитываются изменения dm за счет излучений, за счет налипания или разделения тел, а также взаимодействие различных элементов dm за счет их контактов (внутренних напряжений и, в частности, за счет давлений). Можно ставить задачи, в которых все перечисленные, а также другого рода взаимодействия моделируются и принимаются во внимание в ОТО. Однако теорию гравитации (по Ньютону), в СТО и ОТО можно конструировать с учетом только взаимодействий подвижных индивидуальных точечных масс и геометрических свойств четырехмерных континуумов геометрических точек с координатами ξ^1, ξ^2, ξ^a , τ псевдоримановых пространств с сигнатурой $---+$, для которых расстояния ds между любыми бесконечно близкими точками можно задать метрической формой вида [1]

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 + 2g_{\alpha 4}(\xi^\gamma, \tau) d\xi^\alpha d\tau + g_{\alpha\beta}(\xi^\gamma, \tau) d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (1)$$

$$\gamma, \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

Здесь c – фиксированная эмпирическая скалярная постоянная, задаваемая как характеристика псевдориманова пространства, числа ξ^1, ξ^2, ξ^3 – координаты (названия) индивидуальных точек, а переменная координата τ – модельное собственное время на траектории $L(\xi^\gamma)$, отсчитываемое на часах индивидуальных точек, скрепленных с модельными координатами $\xi^\alpha = \text{const}(L)$ при $d\xi^\alpha = 0$ на L .

Для фиксированного пространства метрика в форме (1) определена неоднозначно. Легко видеть, что при любых преобразованиях вида [2]

$$\eta^\alpha = \varphi^\alpha(\xi^\gamma) \text{ и } \tau' = \tau + \Omega(\xi^\gamma), \text{ когда на } L \text{ } d\tau' = d\tau \quad (2)$$

форма метрики (1) сохраняет свой вид и что все инвариантные характеристики геометрии пространства сохраняют свое значение. В частности, сохраняются координатные линии L с инвариантными значениями переменных τ с точностью до смещения вдоль L начала точки отсчета для собственного времени на линиях L .

На линиях L в каждой точке можно ввести инвариантно определенный вектор абсолютной четырехмерной скорости u и ускорения a как производные вдоль траекторий индивидуальных точек по переменной τ при $\xi^\gamma = \text{const}(L)$:

$$u = ds/d\tau = c, \quad a = du/d\tau \quad (3)$$

Вектор u направлен всегда по касательной к соответствующей четырехмерной траектории L .

В метрике (1) для индивидуальных точек, на линии L вектор ускорения a всегда перпендикулярен к четырехмерной скорости u , так как величина $|u| = c$ постоянна.

С каждой точкой линии L можно связать локальную тетрадную систему отсчета с векторами \mathcal{E}_k , в которой вектор базиса $\mathcal{E}_4 = u$ направлен по касательной к L , причем, так как

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_4 &= g_{p4} \mathcal{E}^p, \quad a = \frac{du}{d\tau} = c \frac{\partial g_{p4}}{\partial \tau} \mathcal{E}^p + \frac{c}{2} g_{k4} \Gamma_{p4}^k \mathcal{E}^p = \\ &= c \frac{\partial g_{p4}}{\partial \tau} \mathcal{E}^p + \frac{c}{2} \delta_4^s \left(\frac{\partial g_{sp}}{\partial \tau} + \frac{\partial g_{s4}}{\partial \xi^p} - \frac{\partial g_{p4}}{\partial \xi^s} \right) = c \frac{\partial g_{\alpha 4}}{\partial \tau} \mathcal{E}^\alpha \end{aligned}$$

поскольку $u_p = c g_{p4}$, $u = u_p \mathcal{E}^p$, то в сопутствующей системе координат для ускорения получим [2]

$$a_\alpha = c \partial g_{\alpha 4}(\xi^\alpha, \tau) / \partial \tau, \quad a_4 = 0 \quad (4)$$

Очевидно, что компоненты метрики $g_{\alpha\beta}(\xi^\alpha, \tau)$ не влияют на величину вектора a , так как при преобразованиях (2) компоненты ускорения в переменных η^α, τ' определяются формулами [2]

$$a_\alpha = a_s = \partial \xi^s / \partial \eta^\alpha, \quad a_4 = 0 \quad (5)$$

На разных координатных линиях L с помощью неголономных преобразований можно ввести координаты Ферми x^α, τ , в которых после преобразований будут выполняться формулы (4) с той лишь разницей, что вместо переменных ξ^α будут фигурировать координаты x^α . Эти координаты могут рассматриваться как различные соответствующие декартовы координаты с соответствующими разными постоянными значениями на линиях L , и через них также неголономно представятся преобразованные компоненты $g'_{\alpha\beta}(x^\gamma, \tau)$.

Таким образом, для каждого значения координаты τ и соответствующего каждого закона движения, определяемого значениями x^γ, τ' в компонентах $g_{\alpha 4}(x^\gamma, \tau)$ и в компонентах метрик $g'_{\alpha\beta}(x^\gamma, \tau)$, полученных на линиях L , можно рассматривать определенное локально и по существу глобальное соответствующее псевдориманово пространство.

Описанную модельную конструкцию с различными значениями постоянных x^γ на разных законах движения, отвечающих координатным линиям L для глобального времени τ и соответствующих ускорений a , можно дополнить фиксированными компонентами трехмерной метрики $g'_{\alpha\beta}(x^\gamma, \tau)$. Таким путем можно выделить неголономные соответствующие псевдоримановы пространства S с заданными полями ускорений сил

тяжести в системе координат Ферми x^i, τ на отмечаемом, вообще говоря, произвольном семействе линий L для скалярного глобального переменного τ .

Для конкретизации поля ускорений потребуется опереться на формулировку модельных условий, отвечающих наблюдениям и опытам, порождающих вид семейства линий L и соответствующего псевдориманова пространства.

Для определения координатных линий L целесообразно использовать модельные механизмы реализации состояния невесомости, которое наблюдается в теории гравитации при движениях каждого малых индивидуальных масс.

Невесомость подвижных тел связана с уравниванием во всех индивидуальных точках тел сил, пропорциональных массам. В теории гравитации это модельные силы притяжения или силы, балансирующиеся с силами инерции, или это просто инерциальные движения при отсутствии каких-либо взаимодействий между различными множествами точек, составленными из подвижных индивидуумов.

Основные характерные примеры балансов связаны с универсальным локальным уравнением механики для движения малого тела в пустоте

$$P - ma = 0 \quad (6)$$

где P – величина, пропорциональная массе малого тела, m – масса, a – ускорение относительно инерциальной тетрады $dx^1 dx^2 dx^3, dt$.

Уравнения (6) локально универсальны как в теории Ньютона для движения в трехмерном евклидовом пространстве с применением синхронизированного абсолютного времени, так и в римановых искривленных пространствах, в которых локальные соотношения, в частности уравнение (6), постулируются при одинаковых P , a и m , что возможно и естественно в римановых пространствах.

В уравнении (6) баланс сил можно трактовать по Ньютону как равновесие под действием двух отличных от нуля сил: силы веса $P \neq 0$ и силы инерции $-ma \neq 0$, причем из баланса этих сил во всех индивидуальных точках получится невесомость. (Объяснение явления невесомости при $P \neq 0$ и $a \neq 0$ по Ньютону можно подтвердить в опытах с использованием инерциальных приборов, установленных на подвижных телах.)

В ОТО невесомость трактуется как отсутствие силы веса ($P = 0$) для свободно движущихся в гравитационном поле точек и поэтому не должно быть ускорения: $a = 0$. Таким образом, невесомость – это отсутствие силы веса в свободном движении (при отсутствии в теории гравитации каких-либо других внешних сил или внутренних напряжений). В ОТО все индивидуальные массы порождают вдоль каждой линии L равенство нулю ускорения a , тогда как нет сохраняемости силы веса ($P \neq 0$), и это приводит к невесомости в ОТО.

В ОТО все L – "прямые" и движение происходит по геодезическим, а по Ньютону при движении вес балансируется с силой инерции, в результате возникает явление невесомости и по Ньютону.

На основании формул (2) и (4) в ОТО в метрике (1) получим, что

$$\partial g_{\alpha 4} / \partial \tau = 0 \quad (7)$$

и, следовательно, $g_{\alpha 4} = g_{\alpha 4}(\xi^\alpha)$ и формула (1) в сопутствующей глобальной системе координат приобретает вид

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 + 2g_{\alpha 4}(\xi^\gamma) d\xi^\alpha d\tau + g_{\alpha\beta}(\xi^\gamma, \tau) d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (8)$$

Если векторы ускорения a согласно формуле (4) отличны от нуля, то на соответствующих траекториях для любых $d\xi^\alpha$ можно написать

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (2g_{\alpha 4}(\xi^\gamma, \tau') d\xi^\gamma d\tau) = \frac{2}{c} a_\alpha d\xi^\alpha d\tau = -\frac{2}{c} dU d\tau \neq 0 \quad (9)$$

Когда ξ^1, ξ^2, ξ^3 рассматриваются как координаты индивидуальных точек с массами dm , то в согласии с преобразованием (2) можно написать локальную формулу для элементарной работы на вариационных или действительных перемещениях индивидуальных точек [2]

$$dma_{\alpha}d\xi^{\alpha} = dma'_{\alpha}d\eta^{\alpha} = dma_{\alpha}dx^{\alpha} = -dmdU \quad (10)$$

где $dU = -a_{\alpha}dx^{\alpha}$ в переменных Ферми.

Правую часть в равенстве (10) можно рассматривать как приращение элементарной энергии $dmdU$ за счет приращения координат $d\xi^{\alpha}$ или $d\eta^{\alpha}$ или dx^{α} . Соответственно с этим могли рассматривать скалярную величину dU как приращение удельной энергии.

В ньютоновской теории гравитации бесконечно малый скаляр dU представляет собой приращение удельной потенциальной энергии, являющейся однозначно определенной функцией $mU(x^{\gamma})$, зависящей только от координат Ферми x^{γ} , а равенство (10) служит определением полного дифференциала для $dU(x^{\gamma})$.

Было показано [3], что в переменных Ферми компоненты абсолютного ускорения a_{α} кинематически по Ньютону и в СТО в сопутствующей системе координат одинаковы. Это, очевидно, следует из того, что они одинаковы в сопутствующей системе координат в точках любых координатных линий τ , обозначенных через L .

Очевидно, что такое положение сохраняется справедливым локально и в псевдоримановых пространствах в сопутствующих координатах и поэтому малая величина dU является полным дифференциалом в СТО и ОТО¹.

Отсюда следует, что в сопутствующих координатах должны выполняться следующие основные кинематические уравнения небесной механики в переменных Ферми:

$$\partial U / \partial \tau = 0, \quad ma_{\alpha}(x^{\gamma}) = -m\partial U(x^{\gamma}) / \partial x^{\alpha} \quad (11)$$

Уравнения (11) получаются также независимым путем в локальных инерциальных системах отсчета как динамические уравнения [4], если в уравнениях балансов энергии индивидуальных масс предусмотреть присутствие потенциальной энергии, зависящей только от координат x^{α} или ξ^{α} .

Следует вспомнить еще, что потенциальная энергия зависит только от координат индивидуальных точек системы подвижных масс для консервативных систем в сопутствующих координатах x^{γ} или ξ^{γ} , когда относительная скорость равна нулю, что следует непосредственно из уравнения энергии.

Из соотношений (4) и уравнений (11) можно получить

$$a_{\alpha} = c\partial g_{\alpha 4} / \partial \tau = -\partial U(x^{\gamma}) / \partial x^{\alpha} \neq 0$$

Отсюда при учете аддитивной суммы тензорных членов компонент с $g_{\alpha 4}(\xi^{\gamma})$ вдоль каждой координатной линии L можно написать равенство

$$g_{\alpha 4} = -\frac{1}{c}\tau \frac{\partial U}{\partial x^{\alpha}} + g_{\alpha 4}(\xi^{\tau}) \quad (12)$$

¹ Постоянство функции U вдоль L обосновывается еще кинематическими доводами следующим образом. Четырехмерная скорость u направлена по касательной к L , а вектор a — по нормали, так как вдоль L ускорение a и ds на L перпендикулярны и, следовательно, $ads = 0 = -d'U$ на L . Отсюда из свойства однозначности вводимой локально на L скалярной функции $U(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ или $U(x^1x^2x^3)$ в неголономно вводимых координатах Ферми следует существование скалярного потенциала для вектора ускорения a .

и вместо формулы (9) из (12) на линиях L находим

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - 2 \frac{\tau}{c} dU d\tau + 2 g_{\alpha 4}(\xi^\gamma) d\xi^\alpha d\tau + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (13)$$

Но теперь при $a_\alpha \neq 0$ вдоль каждой линии L – координатной линии для глобального времени τ , верно равенство: $dU = 0$, и поэтому

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 + 2 g_{\alpha 4}(\xi^\gamma) d\xi^\alpha d\tau + g_{\alpha\beta}(x^\gamma, \tau) dx^\alpha dx^\beta \quad (14)$$

Глобальные виды функции $g_{\alpha\beta}(x^\gamma, \tau)$ при конструциях метрики можно рассматривать одинаковыми для некоторых L или различными при разных L . Метрики пространств (9) в ОТО и (14) в общем случае нельзя преобразовать к синхронному виду. Однако при наличии функции $U(x^\gamma)$ – разной для разных индивидуальных точек, движение будет происходить по законам, определяемым уравнениями (11). Очень важно подчеркнуть, что все соотношения, полученные выше, математически справедливы для любых задаваемых функций $U(x^\gamma)$. Поэтому для получения конкретных решений требуется еще дать уравнения для определения удельной потенциальной энергии $U(L) = U(x^\gamma)$.

В ньютоновской механике для функции $U(x^\gamma)$ используется закон всемирного тяготения, который апробируется непосредственными опытами и множеством следствий наблюдений движения масс в небесной механике и, в частности, в примерах больших четырехмерных ускорений движения индивидуальных объектов.

В теории "чистой гравитации" недопустимы физические пересечения или касания между собой разных L , когда требуется строить усложненные модели с учетом различных контактных взаимодействий индивидуумов.

Произвол функции $U(x^\gamma)$ в метрике (13) свидетельствует о незамкнутости уравнений ОТО, которые получены без явного учета закона всемирного тяготения с постулируемыми надеждами на возможности замены ускорений в пространстве Минковского кривизнами псевдоримановых пространств.

Некоторые попытки доказать допущение об автоматическом согласовании эффектов искривленных псевдопространств как замену ускоренных движений по Ньютону нельзя признать правомерными [2].

Легко показать, что при наличии вращения относительно инерциальных тетрад индивидуальных частиц (в общем случае, когда поля скоростей вихревые), когда $\text{rot}(\xi^\gamma) = 2\omega = \text{const} \neq 0$ на L , что связано с наличием постоянного момента количества движения (например, для вращающихся звезд или планет), проведение преобразований сопутствующих метрик (9) и (14) к синхронному виду невозможно.

Очевидно, что при $\omega(\xi^\gamma) \neq 0$ за счет вращения на орбитах индивидуальных тел могут появиться дополнительные четырехмерные ускорения индивидуальных объектов из-за присутствия постоянных моментов количества движения.

По-видимому, можно указать примеры движения звездных и планетных систем, для которых геодезичность их орбит может существенным образом нарушиться из-за наличия у звезд и планет больших моментов количества движения и из-за наличия добавочной удельной потенциальной энергии в выражении функции $U(x^\gamma)$.

Для получения данных о метрике и законах движения индивидуумов для заданных наблюдателей на основе изложенной выше теории необходимо получить предварительное решение в сопутствующих системах отсчета, а затем пересчитать их с помощью алгоритма инерциальной навигации в псевдоримановых пространствах [4].

В свете развитой теории очевидно, что универсальность применения пространства Минковского в развитых физических теориях (что, по существу, уже внедрено в практических приложениях в физике и технике) подобно теории Ньютона естественна и целесообразна для применений во многих физических моделях, что по существу подтверждается в фактических приложениях.

Приложение. Для разъяснения сути модельной теории механики гравитации в теории относительности полезно отметить следующие соотношения.

В любом псевдоримановом четырехмерном пространстве можно ввести сопутствующие координаты Лагранжа и координатные линии L для инвариантной глобальной временной переменной при $\tau \neq 0$ на линиях L и координаты индивидуальных точек ξ^1, ξ^2, ξ^3 с неоднозначно определяемой сопутствующей метрикой вида

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 + 2g_{\alpha 4}(\xi^\gamma, \tau) d\xi^\alpha d\tau + g_{\alpha\beta}(\xi^\gamma, \tau) d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (\text{П1})$$

Как известно, уравнения поля в теории гравитации имеют вид

$$R_i^j - \frac{1}{2} \delta_i^j R = k \rho u_i u^j \quad (\text{П2})$$

при постоянной $k = 8\pi G c^{-4} = 2,07 \cdot 10^{-48} \text{ с}^2 / (\text{г} \cdot \text{см})$, где векторное поле четырехмерной скорости

$$u = u_k \mathcal{E}^k = u_p \mathcal{E}^p \quad \text{при } |u| = c$$

направлено по касательной в точках координатных линий L .

Следует обратить внимание на справедливость равенств для любых m и k :

$$g_{k4} \mathcal{E}^k \mathcal{E}^4 = T \quad \text{и} \quad \nabla_m T = \nabla_4 T = 0 \quad (\text{т.е. } \nabla_4 g_{k4} = 0)$$

$$c g_{k4} \mathcal{E}^k = \bar{u} \quad \text{и} \quad \nabla_4 c g_{k4} = \nabla_4 u_k = a_k, \quad \text{вообще говоря, при } a_k \neq 0.$$

Далее, в ОТО из (П2) и из условий Бьянки всегда верно равенство $\nabla_j \left(R_i^j - \frac{1}{2} \delta_i^j R \right) = 0$, поэтому из уравнений (П2) на линиях L голономно или в переменных Ферми неголономно следует

$$\nabla_j \rho u^j u_i = u_i \nabla_j \rho u^j + \rho u^j \nabla_j u_i = 0, \quad u^4 = c, \quad u^\alpha = 0$$

Закон сохранения масс индивидуумов дает $\nabla_j (\rho u^j) = 0$, а на координатных линиях L для переменных r получается, что $\nabla_4 u_i = 0$, или $u = \text{const}$ и, следовательно, свободное движение всех индивидуальных точек инерциально, линии L геодезические и поэтому сила тяжести вообще отсутствует. Таков главный вывод о невесомости в теории гравитации ОТО.

В ньютоновской механике имеется потенциальная энергия, и невесомость следует из закона балансирования силы тяжести с силой инерции на L голономно в переменных ξ^α, τ или неголономно в переменных Ферми x^γ, τ :

$$P - mg = 0$$

где $g = a$ — ускорение силы тяжести, абсолютное или относительное (например, для космонавтов) при относительной скорости, равной нулю.

Далее, после соответствующих сверток и условий о сопутствующих координатах при учете (П2) следует равенство

$$-c^2 R_4^4 = c^2 R / 2 = -4\pi r G \quad (\text{П3})$$

Независимо от уравнений (П2) и их следствий (П3) в теории гравитации необходимо в уравнении энергии кроме энергии mc^2 учесть еще скаляр потенциальной энергии mU .

Несмотря на справедливость обычного неравенства $U \ll c^2$ как в природных явлениях, так и в технических проблемах, основное значение имеет потенциальная энергия, благодаря наличию которой строится небесная механика для теории гравитации по Ньютону и в пространстве Минковского в СТО.

Известно, при введении удельного скаляра для потенциальной энергии в сопутствующих координатах на каждой линии L верны зависимости $U(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = U(x^1 x^2 x^3)$ для индивидуальных тел в теории гравитации.

На основании многочисленных опытов функции U можно задавать с помощью конечных формул или эквивалентным способом с помощью уравнения Пуассона

$$\Delta U = -4\pi\rho G \quad (\text{П4})$$

В пустых объемах при $\rho = 0$ функция U для отдельных подвижных пробных частиц – гармоническая.

Уравнение (П4) нужно рассматривать как дополнительное к системе незамкнутых уравнений (П2).

Для пространств, топологически эквивалентных пространству Минковского с координатами Ферми, решения скалярных уравнений Пуассона (П5) для скаляров $U(x^\gamma)$ при заданных $\rho(x^\gamma)$ независимы от метрики. Соответствующую функцию $U(x^\gamma)$ в сопутствующей метрике [1] можно выбирать произвольно, так как $dU = 0$ на каждой линии L . Очевидно, что псевдориманово пространство в ОТО определяется метрикой вида

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 + 2g_{\alpha\xi}(\xi^\gamma) d\xi^\alpha d\tau + g_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (\text{П5})$$

с погруженными в них членами, зависящими от $U(x^\gamma)$.

Очевидно, что только в пустых объемах, для которых $R_1^4 = 0$, $R = 0$ и $\Delta U = 0$, можно ставить вопрос о согласовании равенств (П3), (П4). Однако и в этом случае из (П3) следует геодезичность орбит, а согласно (П4) и (П5) в соответствующих орбитах присутствуют ускоренные движения. Поэтому для каждого фиксированного решения в теории гравитации по Ньютону или в СТО невозможно рассматривать соответствующие орбиты как математические пределы соответствующих геодезических линий L , что особенно существенно для больших интервалов собственных времен τ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-01-17341).

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. О глобальном времени в общей теории относительности // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 1. С. 44–48.
2. Седов Л.И. Сопутствующие и инерциальные системы отсчета // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 3–21.
3. Седов Л.И. О сохранении поля сил тяжести по Ньютону в псевдоримановых пространствах // Докл. АН. 1993. Т. 329. № 2. С. 171–174.
4. Седов Л.И. Об уравнениях инерциальной навигации с учетом релятивистских эффектов // Докл. АН. 1976. Т. 231. № 6. С. 1311–1314.
5. Седов Л.И., Цыпкин А.Г. Основы макроскопических теорий гравитации и электромагнетизма. М.: Наука, 1989. 272 с.
6. Седов Л.И. О гравитационных полях в римановых пространствах // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 885–899.

Москва

Поступила в редакцию
23.III.1995