УДК 531.36:534.1

© 1996 г. П.С. Красильников

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ РЕЗОНАНСЕ 1 : 3

Исследуется асимптотическая устойчивость равновесия системы с двумя степенями свободы в критическом случае двух пар чисто мнимых собственных значений при резонансе 1 : 3. Построены алгебраические критерии асимптотической устойчивости полной системы по модельным уравнениям третьего приближения при условии, что область исследований ограничена некоторым подмногообразием положительной меры пространства параметров (областью знакоопределенности производной функции Ляпунова).

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу устойчивости автономной системы вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(0) = 0, \quad \mathbf{x} \in R^4 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ – гладкое векторное поле, при этом матрица $(\partial\mathbf{X}/\partial\mathbf{x})_0$ имеет чисто мнимые собственные значения λ_1, λ_2, удовлетворяющие условию $\lambda_1 = 3\lambda_2$. Комплексная нормальная форма уравнений третьего приближения имеет следующий вид [1]:

$$\begin{aligned}
&\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + R_{12} z_1 z_2 \bar{z}_2 + R_{11} z_1^2 \bar{z}_2 + R_1 \bar{z}_2^3\\
&\dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + R_{21} z_1 z_2 \bar{z}_1 + R_{22} z_2^2 \bar{z}_2 + R_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2^2\\
&z_1 = x_1 + ix_2, \quad z_2 = x_3 + ix_4\\
&R_k = a_k + ib_k, \quad R_{km} = a_{km} + ib_{km}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

В полярных координатах r_j, θ_j, связанных с переменными z_j, $\bar{z}_j$ по формулам

$$z_j = \sqrt{r_j}\exp(i\theta_j), \quad z_j = \sqrt{r_j}\exp(-i\theta_j)$$

уравнения (1.2) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\dot{r}_1 = 2a_{11} r_1^2 + 2a_{12} r_1 r_2 + 2\sqrt{r_1 r_2^3}\,(a_1\cos\theta + b_1\sin\theta)\\
&\dot{r}_2 = 2a_{21} r_1 r_2 + 2a_{22} r_2^2 + 2\sqrt{r_1 r_2^3}\,(a_2\cos\theta + b_2\sin\theta)\\
&\dot{\theta} = (b_{11} + 3b_{21}) r_1 + (b_{12} + 3b_{22}) r_2 + \sqrt{r_1^{-1} r_2^3}\,(b_1\cos\theta - a_1\sin\theta) + 3\sqrt{r_1 r_2}\,(b_2\cos\theta - a_2\sin\theta)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь $r_j > 0$ – полярные радиусы, $\theta = \theta_1 + 3\theta_2$ – резонансный угол, a_{ij}, b_{ij}, a_j, b_j – произвольные действительные коэффициенты.

Поставленная задача была решена [2] для частного случая гамильтоновой системы: получены необходимые и достаточные условия устойчивости по укороченным уравнениям третьего приближения. Для системы (1.1), удовлетворяющей условию обратимости, получены [3] критерии устойчивости модельной системы, показано, что ее неустойчивость ведет к неустойчивости уравнений (1.1).

Из анализа уравнений (1.1) общего положения следует, что задача построения критериев устойчивости при резонансе четвертого порядка достаточна сложна. Действительно, в отличие от интегрируемых модельных уравнений гамильтонового и обратимого случаев (допускающих полное исследование устойчивости с помощью первых интегралов и асимптотических к нулю решений) уравнения (1.2) неинтегрируемы, что осложняет их анализ. Как следствие, построение критериев устойчивости с помощью υ-функций – нетривиальная задача, неразрешимая в классе простейших форм – квадратичных по переменным z_j, $\bar{z}_j$[1]: с помощью этих форм удается построить лишь отдельные необходимые либо достаточные условия устойчивости. Сложность исследований обусловлена также трансцендентностью задачи: в 12-мерном пространстве параметров системы (1.2) поверхность, разделяющая классы асимптотически устойчивых и неустойчивых систем, трансцендентна [4].

Впервые указанные трудности были преодолены [5, 6]: получены алгебраические критерии устойчивости модельной системы (1.2) на невырожденном подмногообразии пространства параметров. Таким образом, трансцендентность задачи не имеет тотального характера: поверхность раздела содержит алгебраические куски.

Цель статьи – построить новые, более простые критерии устойчивости, сохраняющие силу в полной системе (1.1).

2. О методе исследований. Известно, что для исследования задач устойчивости наиболее эффективен классический метод построения υ-функций из первых интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений. Было показано [7], что этот метод имеет универсальное значение для задач устойчивости гамильтоновых систем: υ-функций, удовлетворяющие первой теореме Ляпунова об устойчивости, являются (в силу теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема) интегралами исследуемых уравнений. Для построения знакоопределенных интегралов используют, как правило, метод интегральных связок Четаева. Известно также, что для многих неконсервативных задач υ-функции прямого метода принадлежат пространству первых интегралов некоторой вспомогательной системы [8]. Обычно в этом случае применяют "энергетический подход", когда интеграл энергии системы сравнения рассматривают в качестве функции Ляпунова.

Приведем краткое описание эвристического подхода [9, 10], обобщающего метод построения υ-функций из первых интегралов.

Рассмотрим вспомогательную модельную систему следующего вида:

$$\dot{r}_1 = \frac{\partial H}{\partial \theta_1} = 2\sqrt{r_1 r_2^3}\sin\theta, \quad \dot{r}_2 = \frac{\partial H}{\partial \theta_2} = 6\sqrt{r_1 r_2^3}\sin\theta$$
$$\dot{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial r_1} - 3\frac{\partial H}{\partial r_2} = \sqrt{r_1^{-1} r_2^3}\cos\theta + 9\sqrt{r_1 r_2}\cos\theta \tag{2.1}$$

где $H = -2\sqrt{r_1 r_2^3}\cos\theta$. Уравнения (2.1) отвечают случаю гамильтоновой системы; они подробно исследованы [2].

Уравнения (2.1) интегрируются: функция $\mathbf{W} + c_3$, где

$$\mathbf{W} = c\sqrt{r_1 r_2^3}\cos\theta + c_2(3r_1 - r_2)^2, \quad c_j = \text{const} \tag{2.2}$$

есть полный интеграл соответствующего линейного однородного уравнения первого порядка

$$2\sqrt{r_1 r_2^3}\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r_1} + 6\sqrt{r_1 r_2^3}\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r_2} + \left(\sqrt{r_1^{-1} r_2^3}\cos\theta + 9\sqrt{r_1 r_2}\cos\theta\right)\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 \tag{2.3}$$

Здесь $H(r_1, r_2, \theta)$, $(3r_1 - r_2) = \text{const}$ – независимые первые интегралы системы сравнения.

[1] *Хазин Л.Г., Шноль Э.Э.* Исследование асимптотической устойчивости равновесия при резонансе 1:3: Препринт № 67. М.: ИПМ АН СССР, 1978. 54 с.

Рассмотрим функциональное продолжение $\mathbf{V}(r_1, r_2, \theta, \alpha) + \alpha_6$ ($\alpha = (\alpha_1,..., \alpha_5)$ – вектор произвольных параметров) интегральной связки $(\mathbf{W} + c_3)$ [9]: $(\mathbf{V} + \alpha_6)$ – гладкое семейство функций, частным случаем которого является семейство $(\mathbf{W} + c_3)$, т.е. $\mathbf{W} = \mathbf{V}|_{\mathbf{p}^{(2)}}$, где $\mathbf{p}^{(2)} = (\varphi_1(c_1, c_2),..., \varphi_5(c_1, c_2))$ – регулярная параметризованная 2 – поверхность в пространстве произвольных параметров $\alpha_1,...,\alpha_5$.

Очевидно, выражение

$$\mathbf{V} = \alpha_1 r_1^2 + 2\alpha_2 r_1 r_2 + \alpha_3 r_2^2 + 2\sqrt{r_1 r_2^3}(\alpha_4 \cos\theta + \alpha_5 \sin\theta) \tag{2.4}$$

удовлетворяет этому определению ($\alpha_j = \text{const}$).

С функцией $(\mathbf{V} + \alpha_6)$ можем связать функциональное пространство $T[\mathbf{V}]$, устроенное следующим образом [9]. Пусть π – произвольная регулярная l – поверхность в пространстве параметров $\alpha_1,...,\alpha_6$ ($0 \le l \le 2$); $(\mathbf{V} + \alpha_6)_\pi$ – ограничение семейства $(\mathbf{V} + \alpha_6)$ на эту поверхность; D_π – огибающая l – параметрического семейства $(\mathbf{V} + \alpha_6)_\pi$ (если $l = 0$, полагаем $D_\pi = (\mathbf{V} + \alpha_6)_\pi$); $T_l[\mathbf{V}]$ – множество таких огибающих, когда индекс π пробегает все семейство регулярных l – поверхностей пространства $\alpha_1,...,\alpha_6$. Тогда, по определению, имеем

$$T[\mathbf{V}] = T_0[\mathbf{V}] \cup T_1[\mathbf{V}] \cup T_2[\mathbf{V}]$$

Оказывается, что пространство $T[\mathbf{V}]$ является естественным обобщением всего множества решений уравнения (2.3). Действительно, согласно классическим исследованиям Лагранжа [11] и В.Г. Имшенецкого [12] (см. также [10]), любое решение уравнения (2.3) является огибающей (по крайней мере локально) некоторого l – параметрического семейства $(\mathbf{W} + c_3)_\pi$ ($\dim \pi = l$, $0 \le l \le 2$). Это значит, что пространство решений уравнения (2.3) состоит из огибающих всевозможных семейств $(\mathbf{W} + c_3)_\pi$, когда индекс π пробегает все множество регулярных l – поверхностей ($0 \le l \le 2$), принадлежащих пространству параметров c_1, c_2, c_3. Используя предыдущую символику, множество решений уравнения (2.3) обозначим $T[\mathbf{W}]$. Очевидно, $T[\mathbf{W}] \subset T[\mathbf{V}]$, при этом $T_l[\mathbf{W}] \subset T_l[\mathbf{V}]$ [9]. Пространство $T[\mathbf{V}]$ будем называть функциональным продолжением множества решений уравнения (2.3).

Эта конструкция допускает очевидные обобщения на многомерный случай: число подпространств T_j ($j = 0,..., n-1$) равно n, где n – размерность системы.

Согласно эвристическому принципу, обобщающему классический метод построения υ-функций из первых интегралов системы сравнения [9], функции прямого метода принадлежат пространству $T[\mathbf{V}]$. В соответствии с этим подходом были получены [5, 6] некоторые алгебраические критерии асимптотической устойчивости системы (1.3) с помощью функций Ляпунова, принадлежащих подпространствам $T_0[\mathbf{V}]$, $T_1[\mathbf{V}]$. Результаты этих исследований были использованы при исследовании устойчивости стационарных вращений вязко-упругого спутника[2].

Построим новые критерии устойчивости, применяя концепцию расширений. Однако, в отличие от предыдущих результатов, будем вести поиск вспомогательных функций на пространстве $T_2[\mathbf{V}]$, состоящим из огибающих всевозможных двух параметрических семейств $(\mathbf{V} + \alpha_6)_\pi$ ($\dim \pi = 2$).

Следует отметить, что представление функций Ляпунова в виде огибающих некоторых семейств функций типично для задач устойчивости. В самом деле, согласно методу Четаева, функции Ляпунова следует искать в виде интегральной связки

$$\upsilon = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i F_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i F_i^2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad k \le n-1$$

[2] *Маркеев А., Красильников П.С.* Об устойчивости резонансных вращений вязко-упругого спутника: Препринт № 479. М.: ИПМ АН СССР, 1990. 33 с.

Здесь γ_j, μ_j – постоянные величины, которые выбирают, исходя из требования знакоопределенности υ; n – размерность исследуемой системы; $F_j(\mathbf{x})$ – независимые первые интегралы. Пусть $(\overline{\mathbf{W}}+c_n)$, $\overline{\mathbf{W}}=\sum\limits_{i=1}^{n-1} c_i F_i(\mathbf{x})$ – соответствующий полный интеграл. Очевидно, что если $\sum\limits_j \mu_j^2 \neq 0$, то υ не принадлежит подпространству $T_0[\overline{\mathbf{W}}]$, элементы которого – функции из n – параметрического семейства $(\overline{\mathbf{W}}+c_n)$. Поэтому υ принадлежит подмножеству $\bigcup\limits_{j=1}^{n-1} T_j[\overline{\mathbf{W}}]$ пространства первых интегралов. Но это значит, что υ – огибающая (по крайней мере локально) некоторого семейства $(\overline{\mathbf{W}}+c_n)_\pi$, где π – регулярная l – поверхность ($l \geq 1$) в пространстве существенных постоянных интеграла $(\overline{\mathbf{W}}+c_n)$. К этому же выводу приходим и в случае, когда υ представляют в виде произвольной нелинейной функции от известных интегралов.

Итак, рассмотрим двумерную поверхность π, принадлежащую пространству произвольных постоянных $\alpha_1,\ldots,\alpha_6$ функции $\mathbf{V}$

$$\alpha_j = \gamma_{j1}\nu_1 + \gamma_{j2}\nu_2 \quad (j=1,\ldots,5)$$

$$\alpha_6 = (\nu_1^2+\nu_2^2)/2$$

Здесь ν_1, ν_2 – локальные координаты поверхности, γ_{ij} – параметры. Рассмотрим ограничение $(\mathbf{V}+\alpha_6)$ на эту поверхность

$$(\mathbf{V}+\alpha_6)_\pi = \nu_1\mathbf{V}_1 + \nu_2\mathbf{V}_2 + (\nu_1^2+\nu_2^2)/2$$

где

$$\mathbf{V}_k = \gamma_{1k}r_1^2 + 2\gamma_{2k}r_1r_2 + \gamma_{3k}r_1^2 + 2\sqrt{r_1r_2^3}\,(\gamma_{4k}\cos\theta + \gamma_{5k}\sin\theta)$$

Уравнения огибающей D_π семейства $(\mathbf{V}+\alpha_6)_\pi$ имеют вид

$$\partial(\mathbf{V}+\alpha_6)_\pi/\partial\nu_1 = 0, \quad \partial(V+\alpha_6)_\pi/\partial\nu_2 = 0$$

$$D_\pi = (\mathbf{V}+\alpha_6)_\pi(\nu_1,\nu_2)$$

Отсюда явствует, что

$$\nu_1 = -\mathbf{V}_1, \quad \nu_2 = -\mathbf{V}_2, \quad D_\pi = -(\mathbf{V}_1^2+\mathbf{V}_2^2)/2$$

Из определения функциональных расширений следует, что $D_\pi \in T_2[\mathbf{V}]$. Рассмотрим функцию $\mathbf{V}' = D_\pi$. Будем иметь

$$\mathbf{V}' = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\,[\gamma_{1k}r_1^2 + 2\gamma_{2k}r_1r_2 + \gamma_{3k}r_2^2 + 2\sqrt{r_1r_2^3}\,(\gamma_{4k}\cos\theta + \gamma_{5k}\sin\theta)]^2$$

Вычислим производную от V' вдоль векторного поля уравнений (1.3):

$$\dot{\mathbf{V}}' = r_2^5[\kappa_0 + \kappa_{11}\cos\theta + \kappa_{12}\sin\theta + \kappa_{21}\cos^2\theta + 2\kappa_{22}\cos\theta\sin\theta + \kappa_{23}\sin^2\theta]$$

$$\kappa_0 = G_0k^5 + G_1k^4 + G_2k^3 + G_3k^2 + G_4k + G_5$$

$$\kappa_{1j} = \sqrt{k}\,(B_{0j}k^3 + B_{1j}k^2 + B_{2j}k + B_{3j}) \quad (j=1,2)$$

$$\kappa_{2i} = k(D_{1i}k + D_{2i}) \quad (i=1,2,3)$$

Здесь $k = r_1/r_2$ – переменный параметр, коэффициенты G_j, B_{ij}, D_{ij} квадратично зависят от величин γ_{ij} и линейно – от параметров задачи. Так, например,

$$G_0 = -4a_{11} \sum_{k=1}^{2} (\gamma_{1k})^2$$

$$G_1 = -4 \sum_{k=1}^{2} [2\gamma_{1k}\gamma_{2k}a_{11} + \gamma_{1k}(\gamma_{1k}a_{12} + \gamma_{2k}a_{21} + \gamma_{2k}a_{11})]$$

(выражения для остальных коэффициентов опускаем). Постоянные γ_{ij} выберем так, чтобы множители при $\cos\theta$, $\sin\theta$ обратились в нуль, а коэффициенты при $\cos^2\theta$, $\sin^2\theta$ стали равными между собой, т.е. подчиним числа γ_{ij} условиям $\kappa_{11} = \kappa_{12} = 0$, $\kappa_{21} = \kappa_{23}$. Получим алгебраическую систему, состоящую из десяти нелинейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{i,j=1}^{5} R_{ij}^{(m)}\gamma_{jk}\gamma_{ik} = 0 \quad (m = 1,\ldots,10) \tag{2.5}$$

Коэффициенты $R_{ij}^{(m)}$ – линейные функции параметров a_{ij}, b_{ij}, a_j, b_j. Число неизвестных величин γ_{jk} равно 10.

Покажем, что система (2.5) имеет нетривиальные решения относительно γ_{ik}. Сначала отметим, что методы исследования алгебраических систем (см. [13, 14]) здесь мало пригодны, так как система (2.5) имеет большую размерность. Учитывая это, преобразуем уравнения (2.5) к форме, когда существование нетривиального семейства решений следует из теоремы о неявных функциях.

Уравнения (2.5) линейно зависят от параметров задачи, поэтому их можно записать в виде

$$\mathbf{DA} = 0 \tag{2.6}$$

$$\mathbf{A} = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_1, b_1, a_2, b_2, b_{11} + 3b_{21}, b_{12} + 3b_{22})^{\tau}$$

где $\mathbf{D}$ – (10×10) матрица, элементы которой d_{ij} – квадратичные функции γ_{ik}.

Условия существования нетривиального решения A линейной системы (2.6) имеют вид rank $\mathbf{D} < 10$.

Пусть rank $\mathbf{D} = 9$, тогда матрица $\mathbf{D}$ имеет базисный минор (9×9). Очевидно, этот факт накладывает дополнительные ограничения на неизвестные величины γ_{jk}:

$$\Delta = 0 \tag{2.7}$$

(Δ – определитель матрицы $\mathbf{D}$). Если

$$\det(d_{ij})_{j,k=1}^{9} \neq 0 \tag{2.8}$$

то система (2.6) разрешима относительно $a_{11}, \ldots, (b_{11} + 3b_{21})$, $((b_{12} + 3b_{22})$ – свободный параметр):

$$\begin{aligned} a_{11} &= (b_{12} + 3b_{22}) f_1(d_{jk}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (b_{11} + 3b_{21}) &= (b_{12} + 3b_{22}) f_9(d_{jk}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Здесь $f_1, \ldots, f_9$ – фундаментальное решение уравнений (2.6). Итак, в области (2.7), (2.8) (не содержащей тривиальных значений $\gamma_{jk} = 0$) уравнения (2.5) приводятся к виду (2.9). Особенность этого представления – инверсия постановки задачи: величины γ_{jk} выбираются произвольно, параметры системы (1.3) определяются по формулам (2.9).

Вычисления показывают, что в ситуации общего положения

$$\operatorname{rank}\frac{\partial(f_1,\dots,f_9,\Delta)}{\partial(\gamma_{11},\dots,\gamma_{52})}=10$$

Отсюда следует, что отображение

$$(\mathbf{f}|_{\Delta=0}):\mathbb{R}^9\to\mathbb{R}^9,\quad \mathbf{f}=(f_1,\dots,f_9)$$

невырожденное, поэтому уравнения (2.9) допускают нетривиальное семейство решений γ^*_{jk}, параметризованное величинами a_{ij}, b_{ij}, a_i, b_i и удовлетворяющее дополнительным условиям (2.7), (2.8). Это значит, что система (2.5) имеет те же самые решения относительно γ_{ik}, по крайней мере в невырожденной области изменения параметров a_{ij}, b_{ij}, a_i, b_i.

3. Критерии асимптотической устойчивости. Пусть γ^*_{jk} ($j = 1,\dots,5$; $k = 1,2$) – нетривиальное решение уравнений (2.5), зависисящее от параметров системы (1.3). Рассмотрим функцию Ляпунова $\mathbf{V}^*$, где $\mathbf{V}^*$ есть ограничение $\mathbf{V}'$ на это семейство. Производная от $\mathbf{V}^*$ имеет вид

$$\dot{\mathbf{V}}^*=r_2^5[\beta^*+\kappa^*_{22}\sin 2\theta]$$

$$\beta^*=G_0^*k^5+G_1^*k^4+G_2^*k^3+\tilde{G}_3^*k^2+\tilde{G}_4^*k+G_5^*$$

$$\tilde{G}_3^*=G_3^*+D_{11}^*,\quad \tilde{G}_4^*=G_4^*+D_{21}^*$$

Предположим, что $G_0^*\neq 0, G_5^*\neq 0$. Функция $\dot{\mathbf{V}}^*$ знакоопределена в конусе

$$r_1\geq 0,\quad r_2\geq 0,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi$$

тогда и только тогда, когда $(\beta^*)^2 > (\kappa^*_{22})^2$ при любом $k > 0$ (это неравенство сохраняет силу и при $k = 0$, $k = \infty$, так как на плоскостях $r_1 = 0$, $r_2 = 0$ функция $\dot{\mathbf{V}}^*$ отлична от нуля). Отсюда следует, что условие отсутствия положительных корней уравнения

$$(\beta^*)^2-(\kappa^*_{22})^2=0 \tag{3.1}$$

является необходимым и достаточным для знакоопределенности $\dot{\mathbf{V}}^*$ в этом конусе.

Теорема. Пусть $a_{11}\neq 0$, $G_0^*\neq 0, G_5^*\neq 0$ и при этом вещественное алгебраическое уравнение (3.1) не имеет положительных корней. Положение равновесия полной системы (1.1) асимптотически устойчиво, если $a_{11} < 0$ и неустойчиво, если $a_{11} > 0$.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что функция $\dot{\mathbf{V}}^*$ знакоопределена в области $r_1\geq 0, r_2\geq 0, 0\leq\theta\leq 2\pi$ (члены более высокого порядка малости, отброшенные при выводе модельных уравнений (1.3), не влияют на знак $\dot{\mathbf{V}}^*$, так как функция $\mathbf{V}^*$ и правые части уравнений (1.3) – однородные полиномы по z_j, $\bar{z}_j$). Очевидно, sign $\dot{\mathbf{V}}^*$ = sign $\overset{*}{G_0}$ = –sign a_{11}. Рассмотрим случай, когда $a_{11} < 0$. Так как функция $\mathbf{V}^*$ всегда отрицательно определена, то $\mathbf{V}^*\dot{\mathbf{V}}^* < 0$, поэтому $\mathbf{V}^*$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Пусть $a_{11} > 0$. Это значит, что знаки функции $\mathbf{V}^*$ и $\dot{\mathbf{V}}^*$ в окрестности $r_1 = r_2 = 0$ совпадают. Поэтому положение равновесия неустойчиво в силу теоремы Ляпунова о неустойчивости. Теорема доказана.

Резонанс 1:3 в многомерном случае $n > 2$ изучен ранее [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куницын А.Л., Маркеев А.П.* Устойчивость в резонансных случаях // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1979. Т. 4. С. 58–139.
2. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
3. *Тхай В.Н.* Об устойчивости механических систем под действием позиционных сил // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 40–48.
4. *Хазин Л.Г., Шноль Э.Э.* Простейшие случаи алгебраической неразрешимости в задачах об асимптотической устойчивости // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240. № 6. С. 1309–1311.
5. *Красильников П.С.* О необходимых и достаточных условиях асимптотической устойчивости при резонансе 1:3 // Исследование задач устойчивости и колебаний и их приложения в динамике летательных аппаратов. М.: МАИ, 1980. С. 31–37.
6. *Веретенников В.Г.* Устойчивость и колебания нелинейных систем. М.: Наука, 1984. 320 с.
7. *Тхай В.Н.* Устойчивость многомерных гамильтоновых систем // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 355–365.
8. *Анапольский Л.Ю., Иртегов В.Д., Матросов В.М.* Способы построения функций Ляпунова // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1975. Т. 2. С. 53–112.
9. *Красильников П.С.* Обобщенные пространства ростков гладких решений уравнения 1-го порядка и их связь с прямым методом Ляпунова // Изв. вузов. Математика. 1990. № 5. С. 47–53.
10. *Красильников П.С.* О строении некоторых функциональных пространств и их связь с прямым методом Ляпунова // Аналитические и численные методы исследования механических систем. М.: МАИ, 1989. С. 12–17.
11. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1953. 468 с.
12. *Имшенецкий В.Г.* Интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными 1-го и 2-го порядков. М.: Моск. Мат. об-во, 1916. 412 с.
13. *Ван-дер-Варден Б.Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976. 648 с.
14. *Ходж В., Пидо Д.* Методы алгебраической геометрии. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 462 с.
15. *Куницын А.Л.* Об асимптотической устойчивости резонансных систем // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 6. С. 1033–1038.

Москва

Поступила в редакцию
15.II.1995