УДК 539.3:534

© 1996 г. **И.А. Кийко**

ФЛАТТЕР ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

В классической постановке рассматривается задача о динамической устойчивости вязкоупругой прямоугольной пластины (полосы), обтекаемой с одной стороны плоско-параллельным потоком идеальной жидкости. Нагрузка определяется в рамках поршневой теории. Основное внимание уделяется исследованию влияния малой вязкости на значение критического параметра. Критерий устойчивости традиционный.

В задаче о флаттере вязкоупругой прямоугольной пластины с использованием метода Бубнова–Галеркина и усреднения было показано [1, 2], что критическая скорость потока примерно в 2 раза меньше, чем для соответствующей упругой пластины с мгновенным модулем Юнга, и это отношение не зависит от вязких свойств материала пластины. Этот результат вызывает естественную неудовлетворенность, поскольку речь идет об асимптотической устойчивости и представляется почти очевидным, что достаточное условие устойчивости и соответствующая ему критическая скорость потока могут быть найдены из решения упругой задачи заменой мгновенного модуля на его предельное значение. Точных решений задач о панельном флаттере, которые подтверждали или опровергали бы этот интуитивный вывод, нет. Он подтверждается [3] на примере одной модельной задачи, в предлагаемой работе – на примерах задач о флаттере полосы и прямоугольной пластины.

1. Постановка задачи. Представим себе прямоугольную пластину, которая в плоскости xy занимает область $0 \leqslant x \leqslant l/\beta$, $0 \leqslant y \leqslant l$. Материал пластины – линейный вязкоупругий, связь напряжения с деформацией дается соотношением

$$\sigma = E_0(\varepsilon(t) - \lambda \int_{-\infty}^{t} \Gamma(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau) = E_0(1-\lambda\hat{\Gamma})\varepsilon(t)$$

$$\hat{\Gamma}\varepsilon(t) = \int_0^{\infty} \Gamma(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

Здесь E_0 – мгновенный модуль, $\Gamma(t)$ – ядро релаксации. Предельное значение модуля равно

$$E_\infty = E_0(1-\lambda\Gamma_0), \quad \Gamma_0 = \int_0^{\infty} \Gamma(t)dt$$

В дальнейшем считаем, что материал обладает малой вязкостью, чему соответствует $(\lambda\Gamma_0)^2 \ll 1$.

Пластина находится в потоке газа, вектор скорости которого $\mathbf{V} = \{\upsilon_x, \upsilon_y\}$, $|\mathbf{V}| = \upsilon$ параллелен ее плоскости. Требуется найти такое значение скорости потока υ^*, что при условии $\upsilon < \upsilon^*$ движение пластины будет асимптотически устойчивым.

Введем безразмерные координаты x/l, y/l, скорость $\mathbf{V}/C_0$ и время t/t_0 ($t_0^2 = \rho h l^4/D_0$, $D_0 = E_0 h^3/[12(1-\nu^2)]$, p_0, C_0 – давление и скорость звука в невозмущенном потоке, κ – показатель политропы, ρ, ν – плотность и коэффициент Пуассона материала пластины, h – ее толщина), оставив за ними прежние обозначения. В соответствии с результатами, полученными ранее [4], движение пластины будем описывать уравнением

$$(1-\lambda\hat{\Gamma})\Delta^2 w + a_2 \mathbf{V}\,\mathrm{grad}\, w + a_1 \partial w / \partial t + \partial^2 w / \partial t^2 = 0 \tag{1.1}$$

$$a_1 = p_0 \kappa l^4 / (C_0 D_0 t_0), \quad a_2 = p_0 \kappa l^3 / D_0$$

К этому уравнению следует добавить соответствующие граничные условия.

Движение пластины будем исследовать в классе функций $w = \varphi(x, y)\exp(i\omega t)$; подставив в (1.1), получим

$$(1-\lambda\Gamma(\omega))\Delta^2\varphi + a_2 \mathbf{V}\,\mathrm{grad}\,\varphi + (ia_1\omega - \omega^2)\varphi = 0 \tag{1.2}$$

$$\Gamma(\omega) = \int_0^\infty \Gamma(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_0^\infty \Gamma(\tau)(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau) d\tau \equiv \Gamma_c(\omega) - i\Gamma_s(\omega) \tag{1.3}$$

Устойчивыми будут движения с $\mathrm{Im}\,\omega > 0$, неустойчивыми – с $\mathrm{Im}\,\omega < 0$; границе этих областей отвечают действительные частоты, из этого же условия определится критическая скорость потока. Отметим, что при $\mathrm{Im}\,\omega = 0$ функции $\Gamma_c(\omega)$ и $\Gamma_s(\omega)$ из (1.3) – это косинус- и синус-преобразования Фурье ядра релаксации.

2. Бесконечно длинная полоса. В случае $\upsilon_y = 0$ функцию $\varphi(x, y)$, удовлетворяющую условиям шарнирного опирания по кромкам $y = 0$, $y = 1$, примем в виде [5, 6]: $\varphi(x, y) = \sin \pi y \exp(-i\alpha x)$, при этом α – действительное число, что гарантирует ограниченность начальных прогибов при всех значениях x.

Подставив в (1.2), придем к двум уравнениям

$$\omega^2 = (1-\lambda\Gamma_c(\omega))(\alpha^2+\pi^2)^2, \quad \frac{a_2\upsilon_x}{a_1} = \frac{\omega}{\alpha} + \lambda\Gamma_s(\omega)\frac{(\alpha^2+\pi^2)^2}{a_1\alpha} \tag{2.1}$$

Из первого уравнения следует определить $\omega = \omega(\alpha)$, подставить во второе и определить критическую скорость потока $\overset{*}{\upsilon}_x = \min_\alpha(\upsilon_x(\alpha))$ и соответствующий ей параметр волнообразования α^*.

Фактическое решение задачи осложняется тем, что аналитическое решение первого из уравнений (2.1) при произвольном ядре невозможно. Однако в силу очевидных неравенств

$$\Gamma_c(\omega) \leqslant \Gamma_0 = \Gamma_c(0), \quad (\lambda\Gamma_c(\omega))^2 \leqslant (\lambda\Gamma_0)^2 \ll 1$$

его решение может быть получено сходящимся методом приближений

$$\omega_0 = \alpha^2 + \pi^2, \quad \omega_n = \omega_0(1-\lambda\Gamma_c(\omega_{n-1}))^{1/2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

откуда в предположении существования непрерывной производной $\Gamma_c'(\omega_0)$ следует представление $\omega_n = \omega_0(1-\lambda\Gamma_c(\omega_0))^{1/2} + \lambda^2 A_n(\omega_0, \lambda)$, в котором $A_n(\omega_0, \lambda)$ – функции ограниченные. Ограничимся первым слагаемым, положим $\omega = \omega_n \cong \omega_0(1-\lambda\Gamma_c(\omega_0))^{1/2}$ и подставим это во второе выражение из (2.1), удерживая слагаемые с первой степенью λ. Получим

$$\frac{a_2}{a_1}\upsilon_x = \frac{\alpha^2+\pi^2}{\alpha}(1-\lambda\Gamma_c(\omega_0))^{1/2} + \lambda\Gamma_s(\omega_0)\frac{(\alpha^2+\pi^2)^2}{a_1\alpha} \tag{2.2}$$

Допустив существование непрерывной производной $\Gamma_s'(\omega_0)$, найдем из (2.2) точку минимума в форме $\alpha_0 = \pi + \lambda B(\lambda)$, где $B(\lambda)$ – функция ограниченная. Подставив в (2.2), получим с точностью до слагаемых с первой степенью λ

$$\frac{a_2}{a_1}\overset{*}{\upsilon}_x = 2\pi(1-\lambda\Gamma_c(2\pi^2))^{1/2} + \lambda\Gamma_s(2\pi^2)\frac{4\pi^3}{a_1} \tag{2.3}$$

Введем "предельномодульное" значение скорости $\upsilon_0 = (2\pi a_1/a_2)(1-\lambda\Gamma_0)^{1/2}$. Очевидно, $\upsilon_0 < \overset{*}{\upsilon}_x$, поэтому при $\upsilon_x < \upsilon_0$ будет заведомо $\upsilon_x < \overset{*}{\upsilon}_x$. Следовательно, неравенство $\upsilon_x < \upsilon_0$ будет достаточным условием устойчивых движений вязкоупругой полосы.

В случае $\upsilon_x = 0$ приближенное решение уравнения (1.2) построим методом Бубнова–Галеркина в двухчленном приближении (при решении задач флаттера упругих пластин этого оказывается достаточно для достижения хорошей точности [7]):

$$\varphi(x,y) = (C_1 \sin \pi y + C_2 \sin 2\pi y)\exp(-i\alpha x)$$

После проведения известной процедуры получим систему уравнений

$$\omega^3 + \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2a_1}\lambda\Gamma_s(\omega)\omega^2 - \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}(1-\lambda\Gamma_c(\omega))\omega - \frac{\lambda_1\lambda_2}{a_1}(1-\lambda\Gamma_c(\omega))\lambda\Gamma_s(\omega) = 0 \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{8}{3}a_2\upsilon_y\right)^2 = [a_1^2 + (\lambda_1+\lambda_2)(1-\lambda\Gamma_c(\omega))]\omega^2 + \lambda\Gamma_s(\omega)(\lambda_1+\lambda_2)a_1\omega -$$

$$-\lambda_1\lambda_2[(1-\lambda\Gamma_c(\omega))^2 - \lambda^2\Gamma_s^2(\omega)] - \omega^4 \tag{2.5}$$

$$\lambda_1 = \alpha^2 + \pi^2, \quad \lambda_2 = \alpha^2 + 4\pi^2$$

Как и в предыдущем случае, из первого уравнения следует определить $\omega = \omega(\alpha)$, подставить во второе и минимизировать его по α.

Обозначим $f(\omega)$ левую часть (2.4), и пусть ω^* – положительный корень уравнения $2\omega^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)(1 - \lambda\Gamma_c(\omega))$; существование такого корня доказывается так же, как и раньше.

Легко устанавливается, что $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$, $f(\omega^*) > 0$; все это указывает на существование положительного корня уравнения (2.4), меньшего ω^*. Найдем его разложением по параметру λ, $\omega = \omega^* - \lambda\omega_1 + \ldots$, удерживая выписанные слагаемые. Вычисления приводят к результату $\omega_1 = \Gamma_s(\omega^*)(\lambda_2 - \lambda_1)^2/[4a_1(\lambda_1 + \lambda_2)]$. Подставив $\omega \cong \omega^* - \lambda\omega_1$ в уравнение (2.5), окончательно получим (с точностью до λ в первой степени):

$$\left(\frac{8}{3}a_2\upsilon_y^*\right)^2 = B_1(\alpha) + \lambda B_2(\alpha) \tag{2.6}$$

$$B_1(\alpha) = a_1^2\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}(1-\lambda\Gamma_c(\omega^*)) + \frac{(\lambda_2-\lambda_1)^2}{4}(1-\lambda\Gamma_c(\omega^*))^2$$

$$B_2(\alpha) = \Gamma_s(\omega^*)\frac{a_1(1-\lambda\Gamma_c(\omega^*))^{1/2}}{2\sqrt{2}}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2 + 4\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^{1/2}}$$

При этом, очевидно, $B_2(\alpha) > 0$ при $\alpha \geqslant 0$, $\min B_1(\alpha) = B_1(0)$.

Если ввести теперь "предельномодульную" скорость υ_0:

$$\upsilon_0^2 = \frac{17}{2}\left(\frac{3a_1\pi^2}{8a_2}\right)^2(1-\lambda\Gamma_0) + \left[\frac{45\pi^4(1-\lambda\Gamma_0)}{16a_2}\right]^2$$

то можно утверждать, что неравенство $\upsilon_y < \upsilon_0$ будет достаточным условием устойчивых движений полосы.

3. Прямоугольная пластина. В предположении, что $\upsilon_x = 0$, примем для $\varphi(x, y)$ двучленное приближение

$$\varphi(x,y) = (C_1 \sin \pi y + C_2 \sin 2\pi y)\sin \beta\pi x$$

Процедура Бубнова–Галеркина по отношению к (1.3) приводит к системе (2.4), (2.5), в которой параметры λ_1, λ_2 надо заменить соответственно на $\beta_1 = \pi^4(1 + \beta^2)^2$, $\beta_2 = \pi^4(4 + \beta^2)^2$.

Повторяя, с точностью до этих переобозначений, рассуждения и выкладки разд. 2, получим для критической скорости соотношение, аналогичное (2.6), где $2\omega^{*2} = (\beta_1 + \beta_2)(1 - \lambda\Gamma_c(\omega^*))$. Введем "предельномодульную" скорость υ_0:

$$\upsilon_0^2 = \left(\frac{3a_1}{8\sqrt{2}a_2}\right)^2(\beta_1+\beta_2)(1-\lambda\Gamma_0) + \left[\frac{3(\beta_2-\beta_1)(1-\lambda\Gamma_0)}{16a_2}\right]^2$$

Очевидно, неравенство $\upsilon_y < \upsilon_0$ будет достаточным условием устойчивых колебаний пластины.

Таким образом, критическая скорость флаттера вязкоупругой (с "малой" вязкостью) пластины непрерывно зависит от параметра вязкости и может быть определена (с запасом) как предельно-модульная на основании решения соответствующей упругой задачи. Возможность использовать в сочетании методы Бубнова–Галеркина и усреднения в задачах неконсервативной устойчивости вязкоупругих пластин требует более глубокого анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матяш В.И.* Флаттер вязкоупругой пластинки // Механика полимеров. 1971. № 6. С. 1077–1083.
2. *Ларионов Г.С.* Нелинейный флаттер упруговязкой пластинки // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 4. С. 95–100.
3. *Огибалов П.М., Кийко И.А.* От упругости – к неупругости // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Изд-во Калинин. политехн. ин-т. 1986. С. 24–34.
4. *Ильюшин А.А., Кийко И.А.* Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 167–171.
5. *Мовчан А.А.* О колебаниях пластинки, движущейся в газе // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 211–222.
6. *Ильюшин А.А., Кийко И.А.* Колебания прямоугольной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1994. № 4. С. 40–44.
7. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. С. 339.

Москва

Поступила в редакцию
1.XI.1994