

УДК 539.377

© 1996 г. А.А. Евтушенко, И.В. Панасюк, О.М. Уханская

**ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ,
НАГРЕВАЕМОЙ РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА**

Строится решение плоской задачи о движении с постоянной скоростью точечного источника тепла по границе упругой полуплоскости в развитие предложенного ранее [1] метода нахождения фундаментальных термоупругих решений для задач такого типа. Предполагается, что граница полуплоскости свободна от напряжений и через нее осуществляется теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. Считается, что скорость движения источника мала, в силу чего инерционные эффекты в полуплоскости не учитываются. Предполагается также, что физико-механические свойства полуплоскости не зависят от температуры и влиянием термоупругой связности можно пренебречь. Для решения поставленных задач теплопроводности и термоупругости использовано интегральное преобразование Фурье, обращение которого производилось методами контурного интегрирования. В результате получены формулы для температуры полуплоскости, напряжений и перемещений в ней, приведены результаты расчетов соответствующих величин.

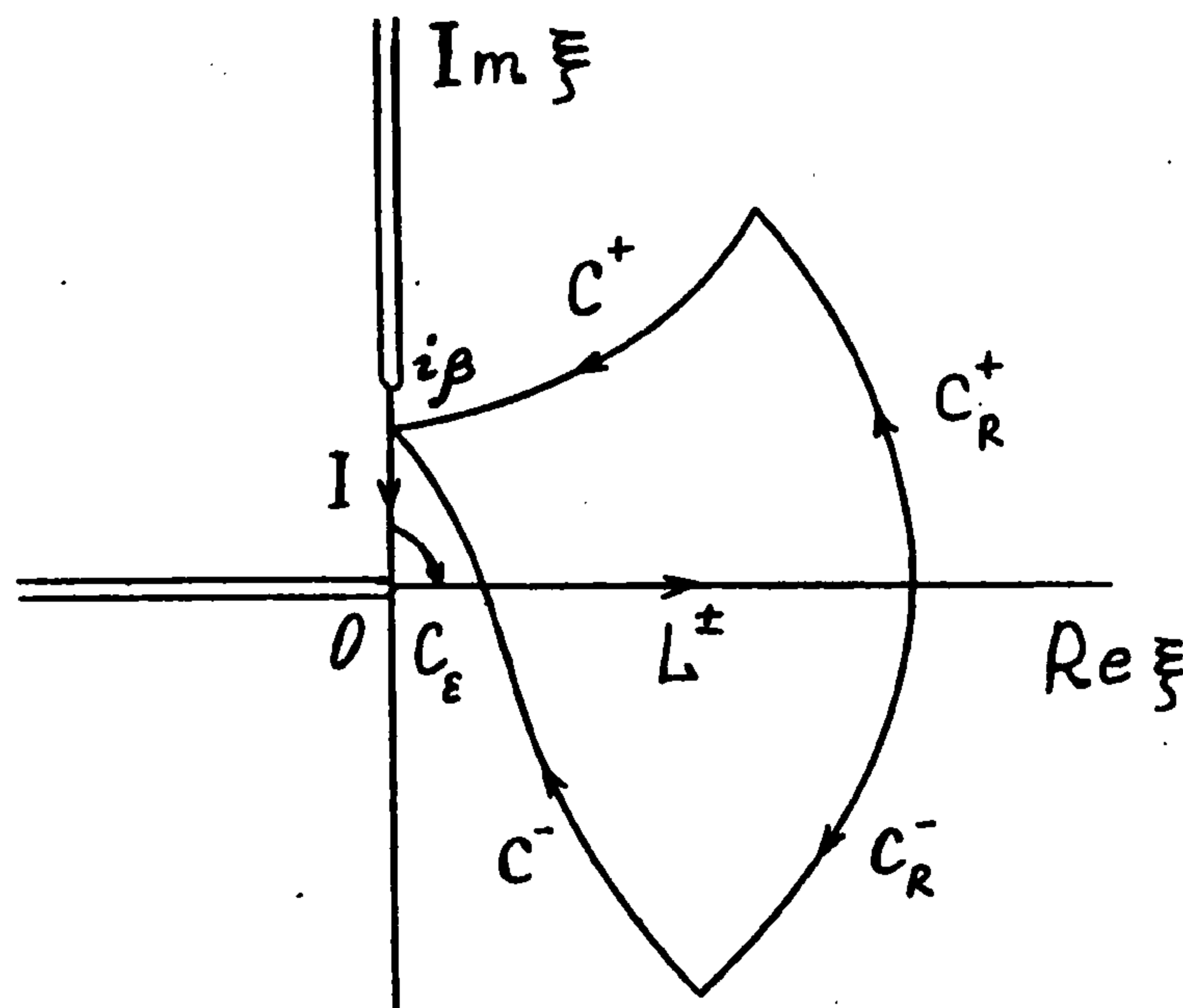
Для нахождения термонапряженного состояния, возникающего вследствие фрикционного образования тепла на контакте скольжения, следует определить температуру, напряжения и смещения в полуплоскости от теплового источника, движущегося по ее поверхности. Существует несколько подходов к определению указанных величин. Реализация концепции равномерно движущейся по поверхности упругой полуплоскости синусоидальной температурной волны в сочетании с использованием термобупругого потенциала перемещений [2, 3] связана со значительными трудностями вычислительного характера при суммировании медленно сходящихся рядов Фурье. На основании решения задачи теплопроводности для мгновенного источника тепла, действующего на поверхности упругой полуплоскости [4], были получены [5] аналитические выражения квазистационарных поверхностных перемещений и касательных напряжений, пригодные для произвольных значений числа Пекле.

Было построено [6] асимптотическое решение для больших (< 10) значений параметра Пекле, определяющее распределение потока тепла в каждом из контактирующих тел. С этой же целью осуществлено [7] применение метода конечных элементов.

Во всех упомянутых работах предполагалось, что поверхность полуплоскости вне области нагрева теплоизолирована. Решение квазистационарной задачи теплопроводности для равномерно движущегося по границе полуплоскости источника тепла, учитывающее теплообмен с внешней средой по закону Ньютона, получено в работе [1]. Соответствующие термические напряжения и перемещения в случае больших значений параметра Пекле определены позже [8].

1. Задача теплопроводности. Задача формулируется в рамках классической линейной теории термоупругости. Уравнение теплопроводности в системе координат x, y , жестко связанной с источником, движущимся с постоянной скоростью V по границе $y = 0$ полуплоскости, имеет вид

$$\Delta T + \beta T_x = 0, \quad |x| < \infty, \quad y \geq 0, \quad \beta = V/k \quad (1.1)$$



Фиг. 1

(k – коэффициент теплопроводности). Построим решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям

$$KT_y - hT = -Q\delta(x), \quad |x| < \infty, \quad y = 0$$

$$T, T_x, T_y \rightarrow 0, \quad r \equiv (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty$$

(K – коэффициент теплопроводности), при помощи интегрального преобразования Фурье по переменной x . Полученное решение представим в виде

$$T(x, y) = \frac{Q}{\pi K} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} \exp[-y\eta(\xi)] P(x, 0, \xi) d\xi \right\} \quad (1.2)$$

$$P(x, y, \xi) = \exp[-\xi(y - ix)] / [\gamma + \eta(\xi)], \quad \gamma = h/K, \quad \eta(\xi) \equiv \sqrt{\xi^2 - \beta\xi}$$

В результате интегрирования вдоль замкнутых контуров (фиг. 1)

$$\Gamma^{\pm} = L^{\pm} \cup C_R^{\pm} \cup C^{\pm} \cup I \cup C_{\varepsilon} \quad (1.3)$$

(индексы плюс и минус означают интегрирование по кривой Γ^+ при $x > 0$ и Γ^- , когда $x < 0$) из соотношения (1.2) находим температуру в произвольной точке полуплоскости

$$T(x, y) = \frac{Q}{\pi K} \exp(-s_0) \int_0^{\infty} \frac{R(x, y, s) e^{-s} ds}{\sqrt{s^2 + (2s_0 - \beta x)s}} \quad (1.4)$$

$$R(x, y, s) = \frac{s^2 + a_1 s + b_1}{s^2 + a_2 s + b_2}, \quad s_0 = \frac{1}{2} \beta (x + \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$a_1 = \beta r + \gamma y, \quad a_2 = \beta r + 2\gamma y, \quad b_1 = (\beta y / 2)^2 + \gamma \beta y r / 2, \quad b_2 = (\beta y / 2)^2 + \gamma \beta y r + \gamma^2 r^2$$

Рассмотрим два уже известных частных случая решения (1.4):

1) $h = 0, y \geq 0$; тогда $\gamma = 0, R(x, y, s) = 1$, и

$$T(x, y) = \frac{Q}{\pi K} \exp\left(-\frac{\beta x}{2}\right) K_0\left(\frac{\beta r}{2}\right) \quad (1.5)$$

($K_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода);

2) $h \neq 0, y = 0$; тогда температура граничных точек конвективно охлаждаемой полуплоскости равна

$$T(x, 0) = \frac{Q}{\pi K} \exp(-s_0) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{s^2 + s} \exp(-\beta |x| s) ds}{s^2 + s + \alpha^2}, \quad \alpha = \frac{\gamma}{\beta} \quad (1.6)$$

Соотношения (1.5), (1.6) впервые получены в работах [4] и [1] соответственно.

2. Задача термоупругости. Представим компоненты температурных напряжений через функцию Эри Φ и термоупругий потенциал перемещений Ψ в виде [9]

$$\sigma_x = F_{,yy}, \quad \sigma_y = F_{,xx}, \quad \sigma_{xy} = -F_{,xy}, \quad F \equiv \Phi - 2\mu\Psi \quad (2.1)$$

(μ – модуль сдвига).

Функции Φ и Ψ определим из решения граничной задачи термоупругости

$$\Delta\Delta\Phi = 0, \quad \Delta\Psi = NT, \quad |x| < \infty, \quad y \geq 0; \quad N = (1 + \nu)\alpha_T/(1 - \nu) \quad (2.2)$$

$$\sigma_y(x, 0) = \sigma_{xy}(x, 0) = 0, \quad |x| < \infty \quad (2.3)$$

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона, α_T – коэффициент линейного температурного расширения.

Решение граничной задачи (2.2)–(2.4) находим с помощью интегрального преобразования Фурье по переменной x . Имеем

$$F(x, y) = 2\mu N\beta^{-1}[L(x, y) + M(x, y)] \quad (2.5)$$

Здесь

$$L = L_1 + y(L_2 + L_3) \quad (2.6)$$

$$L_1(x, y) \equiv \frac{Q}{\pi K} \operatorname{Re} L_1^*(x, y) = \frac{Q}{\pi K} \operatorname{Re} \left\{ i \int_0^\infty \frac{P(x, y, \xi) d\xi}{\xi} \right\} \quad (2.7)$$

$$L_2(x, y) \equiv \frac{Q}{\pi K} \operatorname{Re} L_2^*(x, y) = \frac{Q}{\pi K} \operatorname{Re} \left\{ -i \int_0^\infty \frac{\eta(\xi) P(x, y, \xi) d\xi}{\xi} \right\}$$

$$L_3(x, y) \equiv \frac{Q}{\pi K} \operatorname{Re} L_3^*(x, y) = \frac{Q}{\pi K} \operatorname{Re} \left\{ i \int_0^\infty P(x, y, \xi) d\xi \right\} \quad (2.8)$$

$$M(x, y) \equiv \frac{Q}{\pi K} \operatorname{Re} M^*(x, y) = \frac{Q}{\pi K} \operatorname{Re} \left\{ -i \int_0^\infty \frac{\exp[-y\eta(\xi)] P(x, 0, \xi) d\xi}{\xi} \right\} \quad (2.9)$$

Из формулы (2.5) следует, что функция напряжений F – сумма двух интегралов. Первый из них, L (2.6), соответствует бигармонической функции Φ и имеет вид трансформанты интегрального преобразования Лапласа по переменной ξ некоторой функции при $y \geq 0$. Второй интеграл, M (2.9), связан с термоупругим потенциалом перемещений Ψ

$$\Psi(x, y) = 2\mu N\beta^{-1} M(x, y) \quad (2.10)$$

причем

$$M_{,x} = T, \quad M_{,yy} = -T_x - \beta T \quad (2.11)$$

Обозначим

$$y(L_{2,xx}^* + L_{3,xx}^*) \equiv S_1, \quad iL_{3,x}^* = L_{3,y}^* = L_{1,xx}^* = -L_{1,xy}^* = -iL_{1,yy}^* \equiv S_2 \quad (2.12)$$

$$L_{2,x}^* = -iL_{2,y}^* \equiv S_3$$

Дифференцируя функцию напряжений F (2.5) в соответствии с формулами (2.1) при учете соотношений (2.10)–(2.12), находим

$$\sigma_x = N_1 \operatorname{Re}(-S_1 + S_2 + 2iS_3 - \beta T^* - T_{,x}^*), \quad \sigma_y = N_1 \operatorname{Re}(S_1 + S_2 + T_{,x}^*) \quad (2.13)$$

$$\sigma_{xy} = -N_1 \operatorname{Re}(iS_1 + S_3 + T_{,y}^*), \quad N_1 = 2\mu NQ(\pi K\beta)^{-1}, \quad T^* = \pi KT/Q$$

Отметим, что при $y = 0$ из формул (2.13) следует $\sigma_y = \sigma_{xy} = 0$.

Упругие смещения связаны с температурными напряжениями при помощи формул

Дюамеля–Неймана [9]

$$2\mu u_{,x} = (1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y + 2\mu(1+\nu)\alpha_T T \quad (2.14)$$

$$2\mu v_{,y} = (1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x + 2\mu(1+\nu)\alpha_T T$$

Подставляя в правые части соотношений (2.14) значение напряжений (2.13) и интегрируя по x и y соответственно, получаем

$$u = N_2 \operatorname{Re}\{(1-\nu)i[2L_2^* + L_3^* + yL_{23}^*] - \nu L_{,x}^* - T^*\} \quad (2.15)$$

$$v = N_2 \operatorname{Re}\{(1-\nu)[L_2^* + 2L_3^* - yL_{23}^*] - \nu L_{,y}^* - M_{,y}^*\}$$

$$N_2 = N_1 / (2\mu), \quad L_{23}^* = S_2 + iS_3, \quad L_{,x}^* = iS_3 - iyL_{23}^*, \quad L_{,y}^* = L_2^* + yL_{23}^*$$

3. Нахождение функций L_2^* , L_3^* и $M_{,y}^*$. Как следует из соотношений (2.13), (2.15), компоненты тензора температурных напряжений и вектора перемещений можно выразить через функции L_2^* , L_3^* , T^* , их производные, а также функцию $M_{,y}^*$. Температура в произвольной точке полупространства дается формулой (1.4).

Рассмотрим интегралы L_j^* , $j = 2, 3$ (2.7), (2.8). Обозначим

$$s \equiv \xi(y - ix), \quad 2s_{\pm}^2 \equiv \pm(s^2 - \beta xs) + \sqrt{(s^2 - \beta xs)^2 + \beta^2 y^2}$$

Тогда

$$\sqrt{\xi^2 - \beta\xi} = (S_+ - iS_-) / (y - ix)$$

и функции L_2^* , L_3^* принимают вид трансформант интегрального преобразования Лапласа с параметром преобразования $p = 1$

$$L_j^*(x, y) = \int_0^{\infty} \bar{L}_j(x, y, s) e^{-s} ds, \quad \bar{L}_j = \frac{A_j}{D}, \quad j = 2, 3 \quad (3.1)$$

$$sA_2 = \gamma(xs_+ - ys_-) - i[s_+(s_+ + \gamma y) + s_-(s_- + \gamma x)]$$

$$A_3 = -(s_- + \gamma x) + i(s_+ + \gamma y), \quad D = (s_+ + \gamma y)^2 + (s_- + \gamma x)^2$$

При учете формулы (2.9) интеграл

$$M_{,y}^* = i \int_0^{\infty} \frac{\eta(\xi) \exp[-y\eta(\xi)] P(x, 0, \xi) d\xi}{\xi}$$

приведем к виду, удобному для вычислений на ЭВМ с помощью интегрирования по замкнутым контурам (1.3). В результате получаем

$$M_{,y}^*(x, y) = \int_{S_0}^{\infty} \bar{M}_{,y}(x, y, s) e^{-s} ds \quad (3.2)$$

$$\bar{M}_{,y}(x, y, s) = \frac{(-\gamma\xi_- + i(\xi_+^2 + \xi_-^2 + \gamma\xi_+))(B - \beta y)}{s((\gamma + \xi_+^2) + \xi_-^2)B}, \quad B = \sqrt{4s^2 - 4\beta xs - \beta^2 y^2}$$

$$\xi_+ = r^{-2}y(2s - \beta x)/2, \quad \xi_- = r^{-2}xB/2, \quad \sqrt{\xi^2 - \beta\xi} = \xi_+ + i\xi_-$$

Если поверхность полуплоскости теплоизолирована ($h = 0$, $y \neq 0$), то из формул (3.1) следует

$$\bar{L}_2 = -is^{-1}, \quad \bar{L}_3 = i[s^2 - \beta(y - ix)s]^{-1/2}$$

Отсюда [10] получаем

$$L_2^* = i \ln|_{y-ix}^{\infty}, \quad L_3^* = i \exp[-\beta(y - ix)/2] K_0[-\beta(y - ix)/2] \quad (3.3)$$

Отметим, что функция L_2^* , хотя и неограничена, но дифференцируема. При учете связи [11]

$$K_0(z) = \pi i H_0^{(1)}(iz) / 2, \quad -\pi < \arg(z) < 0$$

($H_0^{(1)}(\cdot)$ – функция Ганкеля), из (3.3) находим

$$L_3^* = -\pi \exp[-\beta(y-ix)/2] H_0^{(1)}[\beta(y-ix)/2] / 2$$

Действительная часть функции M_y^* при $\gamma = 0$, $y \neq 0$ на основании (3.2) имеет вид

$$\operatorname{Re} M_y^* = -\frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{x}{r}\right) - \frac{\beta y}{2} \int_0^1 \exp\left(-\frac{\beta x s}{2}\right) K_0\left(\frac{\beta r s}{2}\right) ds$$

Если же $\gamma \neq 0$, $y = 0$, то из соотношения (3.1) находим

$$L_2^* = -i \left[\alpha \int_0^1 s^{-1} \sqrt{s-s^2} E_-(x,s) ds + \int_0^\infty (s-1) E_-(x,s) ds + \right. \\ \left. + \alpha \exp(-\beta x) \int_0^\infty (s^2+s)^{-1/2} E_+(x,s) ds, \quad x > 0 \right] \quad (3.4)$$

$$L_2^* = -i \int_0^\infty (s-1) E_-(x,s) ds - \alpha \int_0^\infty (s+1)(s^2+s)^{-1/2} E_+(x,s) ds, \quad x < 0$$

$$E_\pm(x,s) = \exp(-\beta|x|s) / (s^2 \pm s + \alpha^2)$$

Для функции L_3^* соответствующие формулы примут вид

$$L_3^* = -\int_0^1 (\sqrt{s^2+s+\alpha})^{-1} \exp(-\beta x s) ds - \alpha \exp(-\beta x) \int_0^\infty E_+(x,s) ds + \\ + i \exp(-\beta x) \int_0^\infty \sqrt{s^2+s} E_+(x,s) ds, \quad x > 0 \quad (3.5)$$

$$L_3^* = i \int_0^1 \sqrt{s^2+s} E_+(x,s) ds + \alpha \int_0^\infty E_+(x,s) ds, \quad x < 0$$

Действительная часть функции M_y^* в рассмотренном случае равна $-\operatorname{Re} L_2^*$.

4. Асимптотика. Для решения контактных задач термоупругости с учетом фрикционного тепловыделения необходимо иметь выражения нормальных термических смещений поверхности соприкасаемых тел. Из второго из соотношений (2.15) при $y = 0$ имеем

$$v(x,0) = 2(1-\nu)N_2 \operatorname{Re}(L_2^* + L_3^*)$$

откуда при учете формул (3.4), (3.5) получаем

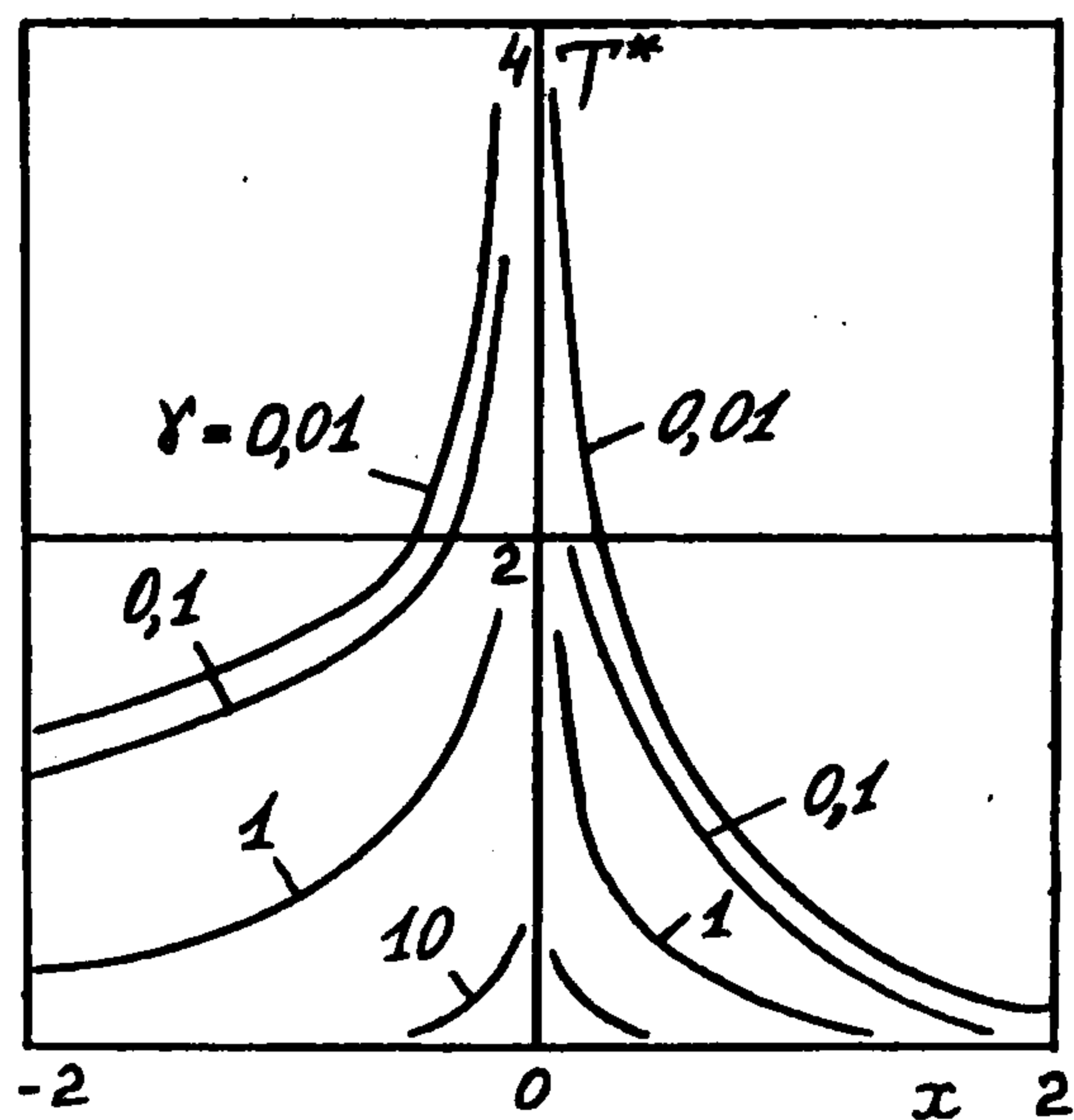
$$v(x,0) = -2(1-\nu)N_2 V(x) \quad (4.1)$$

$$V(x) = H(x) \int_0^1 \frac{\exp(-\beta x s) ds}{\sqrt{s-s^2+\alpha}} - \alpha \begin{cases} \exp(-\beta x) V_+(x), & x > 0 \\ V_-(x), & x < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

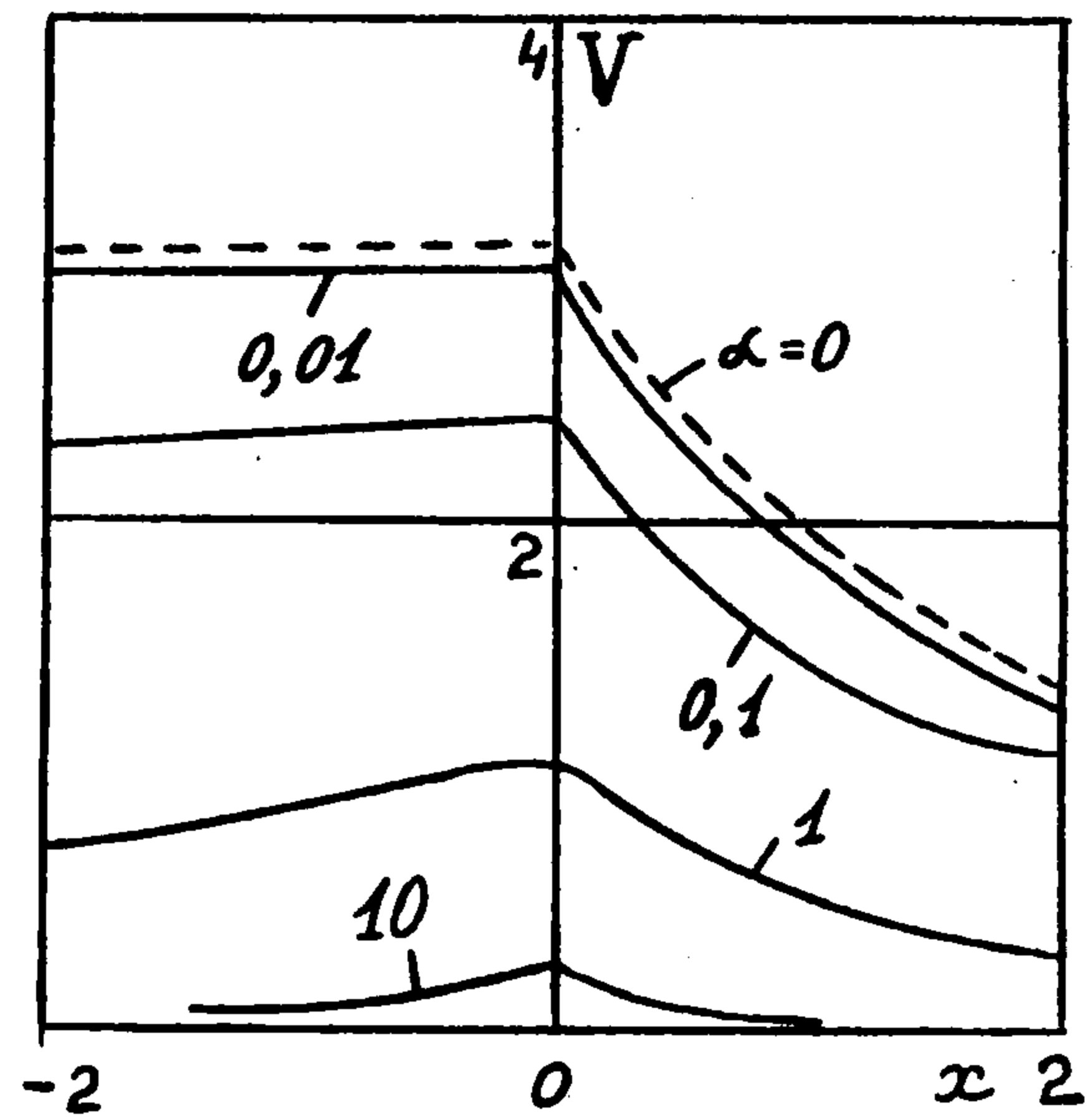
$$V_+(x) = \int_0^\infty (s - \sqrt{s^2+s})(s^2+s)^{-1/2} E_+(x,s) ds \quad (4.3)$$

$$V_-(x) = \int_0^\infty (\sqrt{s^2+s} - s - 1)(s^2+s)^{-1/2} E_+(x,s) ds$$

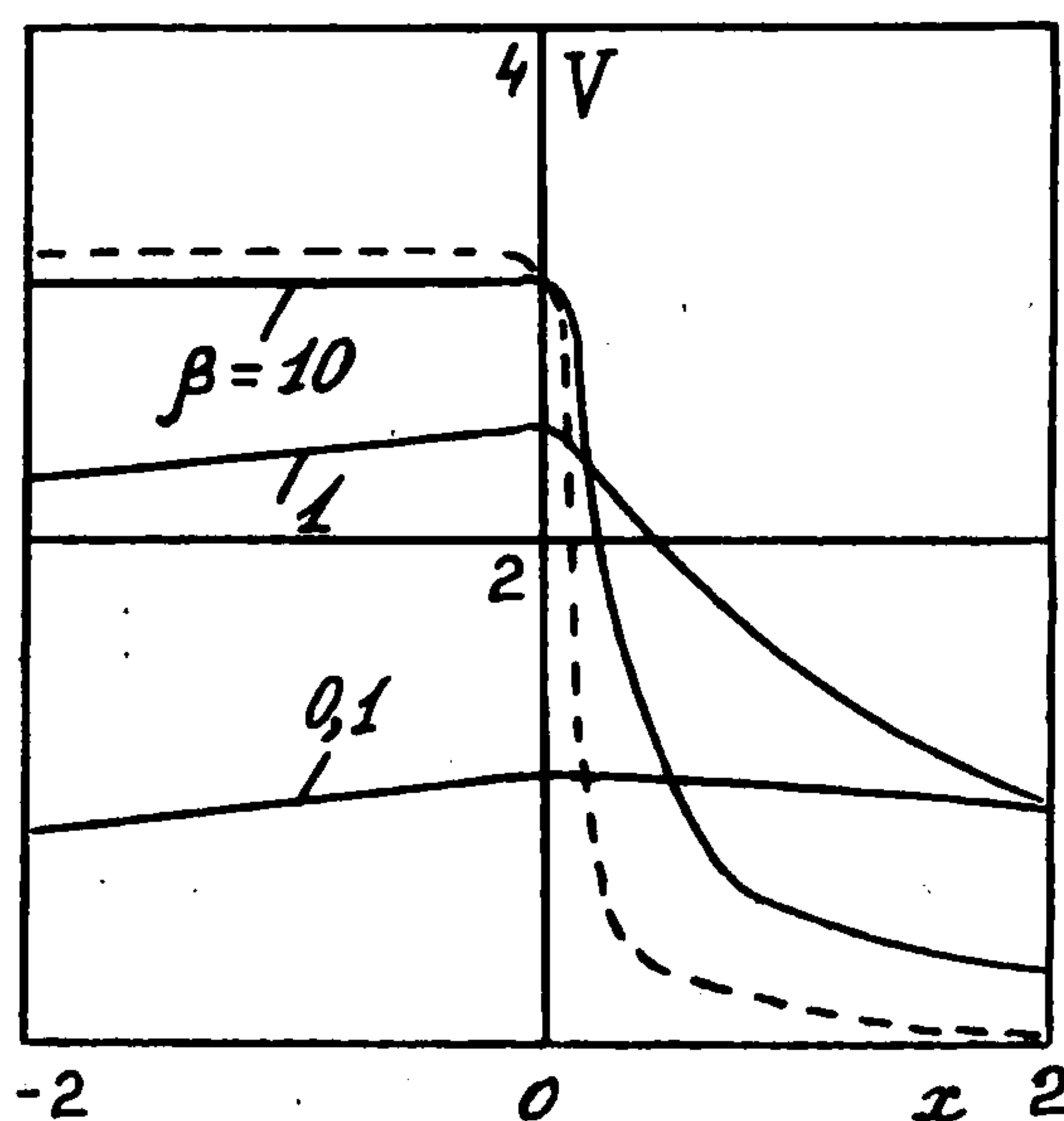
($H(\cdot)$ – функция Хевисайда).



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Подынтегральные функции в выражениях (4.3) являются быстроубывающими при $s \rightarrow \infty$. Поэтому основной вклад в $V_{\pm}(x)$ будет определяться поведением этих функций в окрестности нуля. Считая, что $0 \leq s \leq \delta \ll 1$ и $\alpha < \sqrt{\delta}$, найдем

$$V_+(x) \cong J_2(x, \delta) - J_1(x, \delta), \quad V_-(x) \cong J_1(x, \delta) - J_2(x, \delta) - J_3(x, \delta) \quad (4.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} J_1(x, \delta) &= \ln|\alpha^2 + \delta| - \ln|\alpha^2| + \beta|x| (\delta - \alpha^2 \ln|\alpha^2 + \delta| + \alpha^2 \ln|\alpha^2|) \\ J_2(x, \delta) &= 2[\delta - \alpha \arctg(\delta^{1/2} / \alpha)] + 2\beta|x| [\delta^{3/2} / 3 - \alpha^2 \delta^{1/2} + \alpha^3 \arctg(\delta^{1/2} / \alpha)] \\ J_3(x, \delta) &= 2 \arctg(\delta^{1/2} / \alpha) / \alpha + 2\beta|x| [\delta - \alpha \arctg(\delta^{1/2} / \alpha)] \end{aligned} \quad (4.5)$$

При $\alpha \rightarrow 0$ из соотношений (4.4), (4.5) следует, что $V_+(x) = 0$, $V_-(x) = -\pi/\alpha$. Поскольку [12]

$$\int_0^1 \frac{\exp(-\beta|x|s) ds}{\sqrt{s-s^2}} = \pi \exp\left(-\frac{\beta x}{2}\right) I_0\left(\frac{\beta|x|}{2}\right)$$

то

$$V(x) = \begin{cases} \pi \exp(-\beta x / 2) I_0(\beta|x|/2), & x > 0 \\ \pi, & x < 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

($I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода).

Соотношение (4.1) при $V(x)$ (4.6), совпадает с известным результатом работы [5].

5. Численный анализ. На фиг. 2 показано распределение безразмерной температуры $T^*(x, 0)$ поверхности упругой полуплоскости, рассчитанное по формуле (1.6) при $\beta = 1$ и разных значениях γ . Результаты для $\gamma = 0,01$ с точностью до 10^{-4} совпадают с данными, полученными по формуле (1.5) в случае, когда поверхность $y = 0$ полуплоскости теплоизолирована.

На фиг. 3 представлено изменение нормального перемещения $V(x)$ границы полуплоскости, найденное при $\beta = 1$ в разных α по формуле (4.2). Результаты, представленные штриховой линией, получены путем вычислений по формуле (4.6). При малых (порядка 0,01 и меньше) значениях параметра α для расчета нормальных смещений можно использовать асимптотические соотношения (4.4), (4.5).

Изменение $V(x)$ при фиксированном значении параметра $\gamma = 0,1$ для разных β показано на фиг. 4. Штриховой линией представлены данные расчета по формуле (4.6) при $\beta = 10$. Анализ результатов вычислений показал, что применение формулы (4.6) возможно при $\gamma < 0,1$. При этом с ростом параметра β (больших 10) поведение перемещения $V(x)$ с большой степенью точности можно приблизить ступенчатой функцией $H(-x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cameron A., Gordon A.N., Symm G.T. Contact temperatures in rolling/sliding surfaces // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1965. V. 286. № 1404. P. 45–61.
2. Burton R.A., Nerlikar V., Kilaparti S.R. Thermoelastic instability in a seal-like configuration // Wear. 1973. V. 24. № 1. P. 177–188.
3. Heckman S.R., Burton R.A. Surface displacements for high speed rubs // Wear. 1980. V. 59. № 1. P. 61–77.
4. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
5. Barber J.R. Thermoelastic displacement and stresses due to a heat source moving over the surface of a half plane // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1984. V. 51. № 3. P. 636–640.
6. Yuen W.Y.D. Heat conduction in sliding solids // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1988. V. 31. № 3. P. 637–646.
7. Kennedy F.E. Thermomechanical phenomena in high speed rubbing // Wear. 1980. V. 59. № 1. P. 149–163.
8. Ling F.F. Surface mechanics. New York: Willey, 1973. 317 p.
9. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. Киев: Наук. думка, 1972. 308 с.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.
11. Справочник по специальным функциям с формулами и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
12. Градштейн И.С., Рыжик И.Н. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.