

УДК 539.3

© 1996 г. И.В. Панферов

## РАВНОМЕРНЫЙ НАГРЕВ ЛОКАЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

Решается плоская задача о равномерном нагреве локально неоднородной упругой изотропной пластины. Неоднородность исследуемого материала сконцентрирована в круге или кольце, причем термомеханические характеристики материала имеют круговую симметрию и резко изменяются внутри данного круга или кольца. Функции, характеризующие свойства материала, непрерывны всюду (вместе со своими первыми производными) и принимают постоянные значения вне области локальной неоднородности. Рассматривается случай неограниченной пластины. Наряду с этой решена также температурная задача для ограниченной пластины, когда размеры этой пластины намного больше размера области неоднородности. Предлагается полуаналитический метод решения этих температурных задач.

Большинство из опубликованных работ по теории упругости неоднородных тел посвящено материалам с однородным включением, а также кусочно-однородным материалам. Значительно меньше исследовались конструкции, обладающие локально непрерывной неоднородностью механических свойств, особенно в случаях, когда механические свойства тела описываются быстро изменяющимися функциями [1–3].

Рассматривается упругое равновесие локально неоднородной изотропной пластины при равномерно распределенной температуре. Неоднородность исследуемого материала сконцентрирована в круге радиуса  $a$ , причем термомеханические характеристики материала имеют круговую симметрию и быстро изменяются внутри данного круга.

Начало координат поместим в центре круга. Осесимметричную задачу будем решать в полярной системе координат  $r, \theta$ . Используется безразмерный полярный радиус  $r$  (отнесенный к  $a$ ).

Запишем связь между напряжениями  $\sigma_r, \sigma_\theta$  и деформациями  $\epsilon_r, \epsilon_\theta$  для случая плоского напряженного состояния

$$E(r) \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} - \nu(r) \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \end{Bmatrix} + E(r) \alpha(r) \Delta T \quad (1)$$

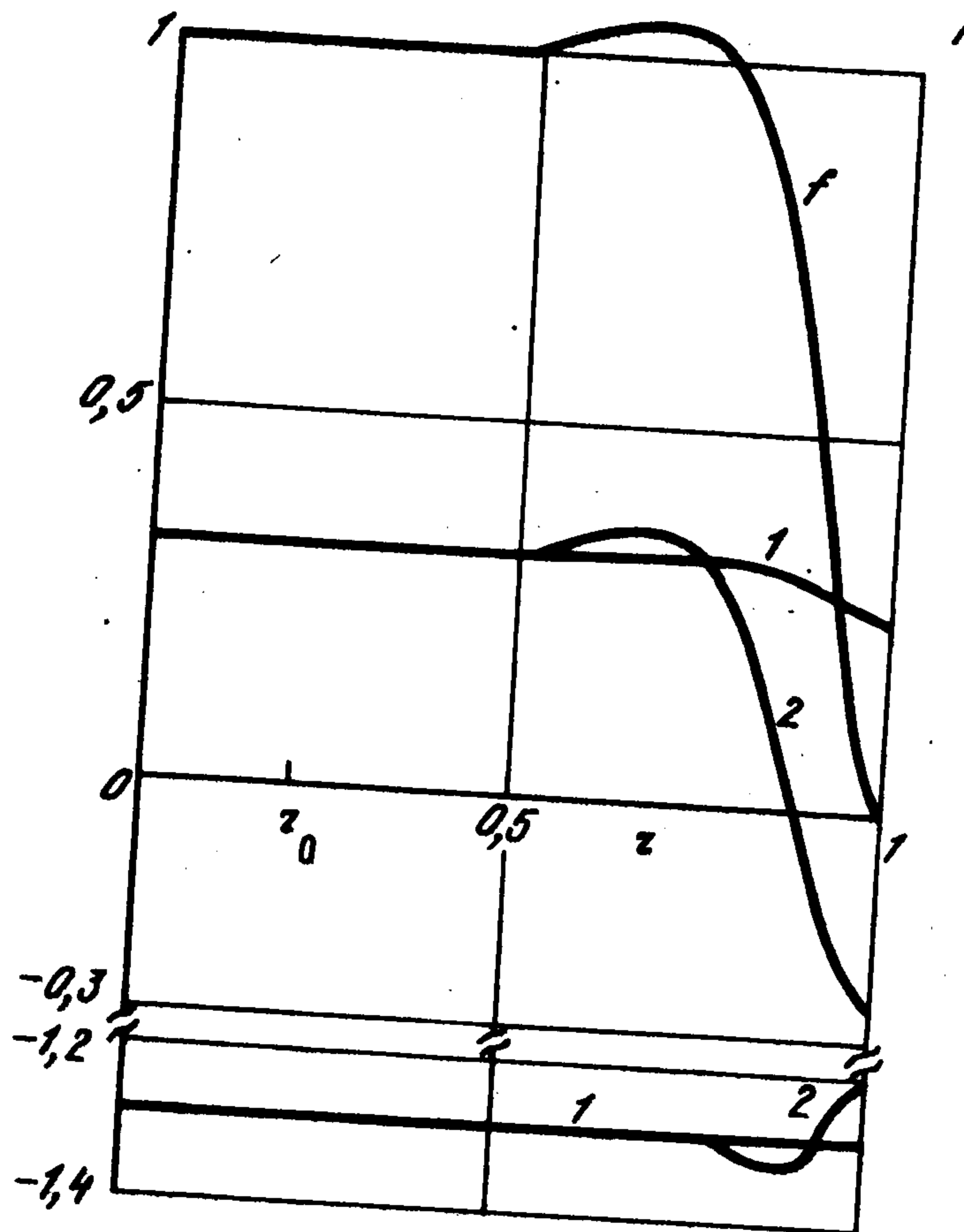
$$G(r) = \frac{E(r)}{2(1+\nu(r))}, \quad \Delta T = \text{const}$$

где  $E(r), G(r), \nu(r), \alpha(r)$  – соответственно переменные модуль Юнга, модуль сдвига, коэффициент Пуассона и коэффициент теплового расширения.

Зададим термомеханические характеристики материала следующим образом:

$$\xi(r) = \xi_1 + (\xi_0 - \xi_1) f(r - r_0), \quad \xi = E, G, \alpha \quad (2)$$

Индексом единица отмечены упругие постоянные в области  $r \geq 1$  нулевым ин-



Фиг. 1

дексом – в области  $r \leq r_0$ ,  $1 > r_0 > 0$ . Функция  $f(r - r_0) = 0$  при  $r \geq 1$ ,  $f(r - r_0) = 1$  при  $r \leq r_0$ , а в области  $r_0 \leq r \leq 1$

$$f(y) = \{s_1 \operatorname{ch}(\beta y) \cos(\beta y) + s_2 \operatorname{sh}(\beta y) \sin(\beta y) + 1\} / (s_1 + 1), \quad y = r - r_0$$

Постоянные  $s_1$  и  $s_2$  заданы, они подчинены требованию  $f'(1 - r_0) = f'(1 - r_0) = 0$ . При этом автоматически выполняются условия  $f'(0) = 0$ ,  $f(0) = 1$ . Функция  $f$  и ее первая производная непрерывны всюду. Параметр  $\beta$  удовлетворяет условию  $\beta^{-1} \ll 1$ . В этом случае функция  $f$  быстро изменяется вблизи границы  $r = 1$  (фиг. 1, кривая  $f$ ). Подобное распределение термомеханических характеристик (при  $E_0 > E_1$ ) может быть, например, в результате наклепа круговой пластины  $r \leq a_1$  из пористого материала с кусочно постоянной толщиной. Кольцо  $a_0 \leq r \leq a_1$  имеет толщину  $h_1$ , область  $r \leq a_0$  соответственно толщину  $h_0 > h_1$ . Цель наклепа – получение пластины однородной толщины  $h_0 < h_1$ .

Уравнения равновесия и совместности деформаций для случая осесимметричной задачи запишем в виде

$$\sigma_\theta = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r, \quad r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0 \quad (3)$$

В неограниченной пластине деформации  $\varepsilon_\theta$ ,  $\varepsilon_r$  при  $r \rightarrow \infty$  стремятся к нулю, а в точке  $r = 0$  функции  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_r$  ограничены.

Механические характеристики материала постоянны вне области  $1 \geq r \geq r_0$ . Следовательно, в области  $0 \leq r \leq r_0$  напряжения постоянны:  $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_r(r_0)$ , а в области  $r \geq 1$  распределение напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= [\sigma_r(1) + P(1 - \nu_1)^{-1}] r^{-2} - P(1 - \nu_1)^{-1}, \quad P = E_1 \alpha_1 \Delta T \\ \sigma_\theta &= -[\sigma_r(1) + P(1 - \nu_1)^{-1}] r^{-2} - P(1 - \nu_1)^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

Для ограниченной пластины вместо распределения напряжений (4) будем иметь в

области  $r \geq 1$  решение

$$\begin{aligned}\sigma_r &= [\sigma_r(1) + A] r^{-2} - A, \quad A = \sigma_r(1) / (r_*^2 - 1) \\ \sigma_\theta &= -[\sigma_r(1) + A] r^{-2} - A\end{aligned}\quad (5)$$

где  $r = r_*$  – свободная граница пластины.

Таким образом, задача сводится к решению системы (1)–(3) в области  $1 \geq r \geq r_0$  при следующих граничных условиях:

$$r = 1: \sigma = -2P(1 - \nu_1)^{-1}; \quad r = r_0: \sigma = 2\sigma_r \quad (6)$$

или

$$r = 1: \sigma = -2\sigma_r / (r_*^2 - 1); \quad r = r_0: \sigma = 2\sigma_r \quad (7)$$

где  $\sigma = \sigma_r + \sigma_\theta$ .

Условие (7) соответствует решению температурной задачи для ограниченной пластины ( $r = r_*$  – свободная граница).

Заметим, что при  $r_*^{-1} \ll 1$  имеем  $\sigma(1) \approx 0$ , и напряженное состояние в области  $r \leq 1$  практически не зависит от расположения границы (т.е. от  $r_*$ ).

Соотношения (6), (7) следуют из условия непрерывности напряжений и деформаций на границах  $r = 1, r = r_0$  при учете характера напряженного состояния вне области  $1 \leq r \leq r_0$ .

Опишем метод решения задачи (1)–(3). Разобьем область  $[r_0, 1]$  на  $N$  равных отрезков  $[\eta_n, \eta_{n+1}]$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ ;  $\eta_0 = r_0, \eta_N = 1$ .

Систему уравнений (3) запишем в интегральной форме:

$$\begin{aligned}C(\eta) &= C(\eta_n)(\eta / \eta_n)^{-2} + \frac{1}{2} \eta^{-2} L_1[C(\eta)]_{\eta_n}^\eta + \\ &+ D(\eta_n) \eta^{-2} \int_{\eta_n}^\eta r \frac{E(r)}{E(\eta_n)} dr - \eta^{-2} \int_{\eta_n}^\eta r E(r) [\alpha(r) - \alpha(\eta_n)] \Delta T dr\end{aligned}\quad (8)$$

$$D(\eta) = D(\eta_n) E(\eta) / E(\eta_n) - E(\eta) [\alpha(\eta) - \alpha(\eta_n)] \Delta T + \frac{1}{2} E(\eta) L_2[C(\eta)]_{\eta_n}^\eta$$

Здесь

$$C(\eta) = \sigma_r(\eta), \quad D(\eta) = \sigma_r(\eta) + \sigma_\theta(\eta), \quad r \in [\eta_n, \eta_{n+1}]$$

$$L_1[C(\eta)]_{\eta_n}^\eta = \int_{\eta_n}^\eta E(r) r \int_{\eta_n}^r \left( \frac{1}{G(\xi)} \right) C(\xi) d\xi dr$$

$$L_2[C(\eta)]_{\eta_n}^\eta = \int_{\eta_n}^\eta \left( \frac{1}{G(\xi)} \right) C(\xi) d\xi$$

Найдем общее решение исходной однородной системы уравнений (3), а также ее частное решение.

Предварительно вычислим следующие функции:  $C_n^{(1)}(\eta)$  – решение однородной системы уравнений (8) на отрезке  $[\eta_n, \eta_{n+1}]$  при граничных условиях  $C_n^{(1)}(\eta_{n+1}) = 1, D_n^{(1)}(\eta_{n+1}) = 0$ ;  $C_n^{(2)}(\eta)$  – соответственно решение системы (8) при граничных условиях

$$C_n^{(2)}(\eta_{n+1}) = 0, \quad D_n^{(2)}(\eta_{n+1}) = 1;$$

$C_n^{(0)}(\eta)$  – частное решение системы (8) на отрезке  $[\eta_n, \eta_{n+1}]$  при условиях  $C_n^{(0)}(\eta_{n+1}) = 0, D_n^{(0)}(\eta_{n+1}) = 0$ .

Указанные функции можно найти методом последовательных приближений, решая систему (8) на малом отрезке  $[\eta_n, \eta_{n+1}]$ . При интегрировании системы (8) предполагается, что интегральные члены  $L_1$  и  $L_2$  известны, они определены на предыдущем шаге итерационного процесса. При отыскании первого приближения члены  $L_1$  и  $L_2$  считаются равными нулю.

Найдем решение однородной системы уравнений (8).

Подставим в интегральные члены  $L_1$  и  $L_2$  системы (8) решение  $C(\eta) = C(\eta_{n+1}) C_n^{(1)}(\eta) + D(\eta_{n+1}) C_n^{(2)}(\eta)$  на отрезке  $[\eta_n, \eta_{n+1}]$  и перепишем однородную систему уравнений (8) при  $\eta = \eta_{n+1}$  в виде

$$C(\eta_{n+1}) = C(\eta_n) (\eta_{n+1} / \eta_n)^{-2} + \frac{1}{2} \eta_{n+1}^{-2} [C(\eta_{n+1}) \varphi_{1,n} + D(\eta_{n+1}) \varphi_{2,n}] + D(\eta_n) \eta_{n+1}^{-2} \int_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} r \frac{E(r)}{E(\eta_n)} dr \quad (9)$$

$$D(\eta_{n+1}) = D(\eta_n) E(\eta_{n+1}) / E(\eta_n) + \frac{1}{2} E(\eta_{n+1}) [C(\eta_{n+1}) \psi_{1,n} + D(\eta_{n+1}) \psi_{2,n}]$$

$$\varphi_{i,n} = L_1 [C_n^{(i)}(\eta)]_{\eta_n}^{\eta_{n+1}}, \quad \psi_{i,n} = L_2 [C_n^{(i)}(\eta)]_{\eta_n}^{\eta_{n+1}}, \quad i = 0, 1, 2$$

Система (9) позволяет определить искомые величины  $C(\eta_{n+1})$ ,  $D(\eta_{n+1})$  при известных значениях  $C(\eta_n)$ ,  $D(\eta_n)$ . Вычисления производятся по неявной схеме [4], что обеспечивает устойчивость счета. Решение системы линейных алгебраических уравнений (9) является общим решением однородной исходной системы (3) в узлах  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ , т.е. это решение линейно зависит от начальных условий  $C(r_0)$ ,  $D(r_0)$ .

Чтобы получить частное решение  $C_*(\eta_{n+1})$ ,  $D_*(\eta_{n+1})$  системы (3), следует к правым частям уравнений системы (9) добавить соответственно члены

$$\frac{1}{2} \eta_{n+1}^{-2} \varphi_{0,n} - \eta_{n+1}^{-2} \int_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} r E(r) [\alpha(r) - \alpha(\eta_n)] \Delta T dr$$

и

$$\frac{1}{2} E(\eta_{n+1}) \psi_{0,n} - E(\eta_{n+1}) [\alpha(\eta_{n+1}) - \alpha(\eta_n)] \Delta T$$

а величины  $C(\cdot)$  и  $D(\cdot)$  переобозначить в  $C_*(\cdot)$ ,  $D_*(\cdot)$ .

Отметим, что в этом случае операторы  $L_1$  и  $L_2$  применялись к решению

$$C_*(\eta) = C_*(\eta_{n+1}) C_n^{(1)}(\eta) + D_*(\eta_{n+1}) C_n^{(2)}(\eta) + C_n^{(0)}(\eta)$$

Положим, что частное решение удовлетворяет условию

$$C_*(r_0) = D_*(r_0) = 0$$

Общее решение задачи запишем в форме

$$\sigma_r = BC(\eta) + C_*(\eta), \quad \sigma_\theta = B[D(\eta) - C(\eta)] + D_*(\eta) - C_*(\eta)$$

где решение  $C(r)$ ,  $D(r)$  однородной системы уравнений задано условием  $C(r_0) = 1$ ,  $D(r_0) = 2$ . В этом случае второе граничное условие (6) или (7) выполняется автоматически. Постоянная  $B$  определяется из первого граничного условия (6) или (7).

Таким образом, мы построили формально точное решение системы (3) при условиях (6) или (7).

Построенный алгоритм реализован на ПЭВМ. При реализации метода последовательных приближений использовались подпрограммы численного интегрирования функций. Расчеты показывают высокую точность предложенного в данной работе

полуаналитического метода решения температурной задачи даже при малом числе  $M$  итераций (например, при  $M = 3, M = 2$ ) метода последовательных приближений для вычисления функций  $C_n^{(i)}(\eta)$ ,  $i = 0, 1, 2$  на малом интервале  $[\eta_n, \eta_{n+1}]$ .

На фиг. 1 сплошными линиями показано распределение напряжений в ограниченной пластине ( $r_* = 100$ ):  $\sigma_r^* = \sigma_r/P$  (кривая 1),  $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta/P$  (кривая 2) и функции  $f(r - r_0)$  (кривая  $f$ ) по  $r$  в области  $r \leq 1$  при  $k = 0,5$ ,  $c_\alpha = -0,5$ ,  $\nu_1 = 0,2$ ,  $\nu_0 = 0,47$ ,  $r_0 = 0,2$ ,  $\beta = 10$ , где

$$P = E_1 \alpha_1 \Delta T, \quad k = \frac{E_0 - E_1}{E_1}, \quad c_\alpha = \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_1}$$

При тех же значениях параметров распределение напряжений в неограниченной пластине показано штриховыми линиями ( $\sigma_r^*$  — линия 1).

В области  $r > 1$  распределение напряжений описывается формулами (4).

Аналогичным образом решена температурная задача ( $\Delta T = \text{const}$ ) для неоднородной пластины в случае, когда неоднородность материала локализована внутри кольца  $r_0 \leq r \leq 1$ . Рассматривается случай ограниченной круговой пластины  $r_*^{-1} \ll 1$ .

Термомеханические характеристики материала заданы соотношениями, аналогичными (2)

$$\xi(r) = \xi_1 + (\xi_2 - \xi_1) f(r - r_2), \quad r_2 = (1 + r_0)/2, \quad \xi = E, G, \alpha$$

где индексом 1 отмечены упругие постоянные в областях  $r \geq 1, r \leq r_0$ , а индексом 2 — в срединной поверхности  $r = r_2$  кольца неоднородности.

Функция  $f(r - r_2) = 0$  при  $r \geq 1, r \leq r_0$ , а в области  $r_0 \leq r \leq 1$  она, как в предыдущей задаче, задается выписанной выше аналитической формулой  $f(y)$ , в которой  $y = r - r_2$ .

Постоянные  $s_1$  и  $s_2$  известны, они подчинены требованию  $f'(1 - r_2) = f(1 - r_2) = 0$ . При этом автоматически выполняются условия  $f'(r_0 - r_2) = f(r_0 - r_2) = 0$ , а также  $f(0) = 1$ .

Рассматривается случай  $\beta^{-1} \ll 1$ .

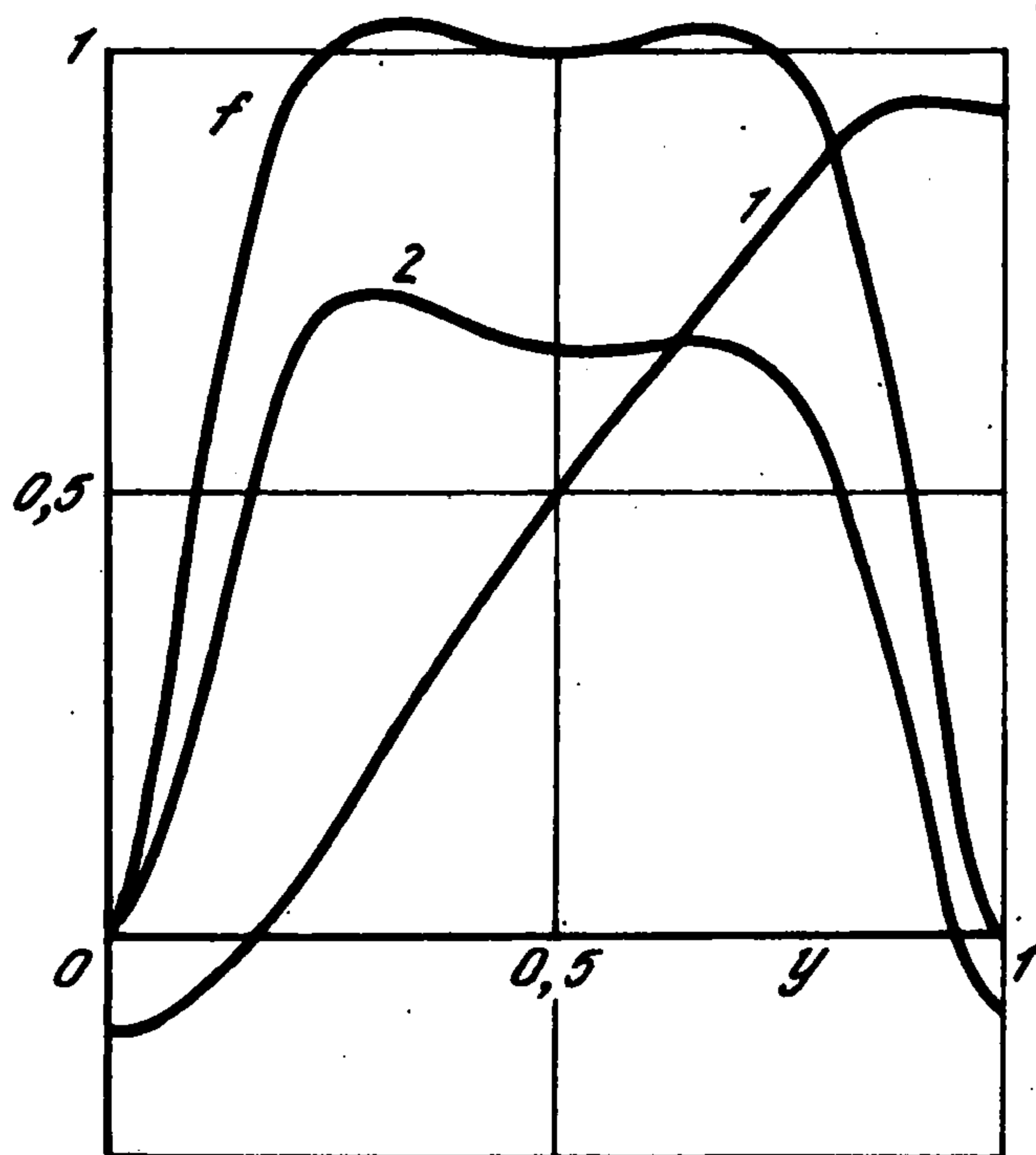
В области  $0 \leq r \leq r_0$  напряжения постоянны:  $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_r(r_0)$ , а в области  $r_* \geq r \geq 1$  распределение напряжений определено формулами (5).

На фиг. 2 показаны функция  $f(r - r_2)$  (кривая  $f$ ) и распределение напряжений  $\sigma_r^* = 10 \times \sigma_r/P$  (кривая 1),  $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta/P$  (кривая 2) по  $r$  в кольце  $r_0 \leq r \leq 1$ , где локализовано возмущение термомеханических характеристик материала, при  $k = 0,5$ ,  $c_\alpha = -0,5$ ,  $\nu_1 = 0,2$ ,  $\nu_2 = 0,47$ ,  $r_0 = 0,8$ ,  $\beta = 10/(1 - r_0)$ ,  $r_* = 100$ . Здесь  $P = E_1 \alpha_1 \Delta T$ ,  $k = (E_2 - E_1)/E_1$ ,  $c_\alpha = (\alpha_2 - \alpha_1)/\alpha_1$ . По оси абсцисс отложены величины  $y = (r - r_0)/(1 - r_0)$ .

Отметим, что для случая, когда термомеханические характеристики заданы в виде

$$G = \text{const}, \quad E(r) = 2G(1 + \nu(r)), \quad \nu = \nu(r) \leq 1/2, \quad \alpha = \alpha(r)$$

можно найти точное аналитическое решение температурной задачи (см. формулу (8) при  $n = 0$ ).



Фиг 2

## ЛИТЕРАТУРА

1. Колчин Г.Б., Фаверман Э.А. Теория упругости неоднородных тел: Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы. Кишинев: Штиинца, 1972. 246 с.
2. Колчин Г.Б., Фаверман Э.А. Теория упругости неоднородных тел: Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы за 1970–1973 гг. Кишинев: Штиинца, 1977. 146 с.
3. Колчин Г.Б., Фаверман Э.А. Теория упругости неоднородных тел: Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы за 1974–1979 гг. Кишинев: Штиинца, 1987. 163 с.
4. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1990. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию  
14.VII.1994