УДК 539.3:534.1

© 1996 г. А.В. Белоконь, А.В. Наседкин

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ТЕЛ ОГРАНИЧЕННЫХ РАЗМЕРОВ

Рассматриваются однородные задачи о собственных колебаниях ограниченных электроупругих тел, контактирующих с жесткими плоскими штампами и покрытых системой разомкнутых и короткозамкнутых электродов. Строится вариационный принцип, обладающий свойствами минимальности, аналогичный известному [1] вариационному принципу для задач с только короткозамкнутыми электродами. Доказывается дискретность спектра и полнота собственных функций. Как следствия из вариационных принципов, устанавливаются свойства увеличения или уменьшения собственных частот при изменениях механических и электрических граничных условий и модулей электроупругого тела. Отмечается, что изменения механических и электрических параметров вызывают противоположные изменения собственных частот. Утверждение о том, что для электроупругого тела с многоэлектродным покрытием собственные частоты при короткозамкнутых электродах (частоты электрического резонанса) не превосходят соответствующих частот при разомкнутых электродах (частот антирезонанса), получается как частный случай одной из доказанных теорем.

1. Постановка задачи. Пусть электроупругое тело занимает ограниченную в R^3 область Ω. Предполагается, что область Ω и ее граница $\partial\Omega = S$ подчиняются следующим условиям: Ω – сумма конечного числа множеств, звездных относительно содержащихся в них каких-либо шаров, а S – липшицева граница класса C^1. Более развернуто данные условия (Ω, S) приведены в [1].

Ограничиваясь изучением режимов установившихся колебаний по закону $\exp(i\omega t)$, будем использовать только амплитудные значения для всех рассматриваемых физических величин без дополнительных оговорок.

Однородные задачи о колебаниях электроупругих тел включают дифференциальные уравнения в Ω, состоящие из полевых уравнений в приближениях электростатики

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} = \rho\omega^2\mathbf{u} \tag{1.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = 0 \tag{1.2}$$

и определяющих соотношений линейного электроупругого тела

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^E\cdot\cdot\,\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{e}^T\cdot\mathbf{E} \tag{1.3}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\epsilon} + \text{э}^S\cdot\mathbf{E} \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2,\quad \mathbf{E} = \mathbf{E}(\varphi) = -\nabla\varphi \tag{1.5}$$

Приняты стандартные [2] для теории электроупругости обозначения: $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}$ – тензоры второго ранга напряжений и деформаций, $\mathbf{D}, \mathbf{E}$ – векторы электрической индукции и напряженности электрического поля, ρ – плотность материала, ω – круговая частота колебаний, $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, φ – потенциал электрического поля,

$\mathbf{c}^E$ – тензор упругих модулей четвертого ранга, $\mathbf{e}$ – тензор пьезомодулей третьего ранга, $\mathbf{э}^S$ – тензор диэлектрических проницаемостей второго ранга, $(...)^T$ – операция транспонирования.

Предполагается, что функция $\rho(\mathbf{x})$ кусочно-непрерывна и $\rho(\mathbf{x}) \geqslant \rho_0 > 0$, компоненты тензоров $\mathbf{c}^E$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{э}^S$ кусочно-непрерывны вместе со своими первыми производными по $\mathbf{x}$, причем $c^E_{ijkl} = c^E_{ijlk} = c^E_{jikl} = c^E_{klij}$, $e_{ijk} = e_{ikj}$, $э^s_{ij} = э^s_{ji}$, и c^E_{ijkl} и $э^S_{ij}$ удовлетворяют условиям строгой положительной определенности.

Граничные условия разделяются на два типа: механические и электрические.

Для формулировки механических граничных условий предположим, что существует разбиение границы S на два подмножества: S_σ и S_u ($S = S_\sigma \cup S_u$).

Участки границы S_σ свободны от напряжений, т.е.

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_\sigma \tag{1.6}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный орт внешней нормали к поверхности.

Пусть $S_u = \cup S_{uk}$, $k = 0, 1, \ldots, L$; $S_{u0} \neq \varnothing$, S_{uk} не граничат друг с другом, и среди S_{uk} имеется $L + 1 - l$ жесткозащемленных участков и l плоских участков, контактирующих с плоскими штампами, массами которых будем пренебрегать. Предположим для простоты, что все эти l плоских участков перпендикулярны оси x_3. Тогда на S_{uk} можно принять следующие граничные условия

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_{ui}, \; i = 1, 2, \ldots, l, \quad l \leqslant L \tag{1.7}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \sum_{j=0}^{2} \alpha^u_{ji} x_j, \quad \mathbf{x} \in S_{ui}, \quad x_0 = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, l, \quad l \leqslant L \tag{1.8}$$

$$\int_{S_{ui}} x_j \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad x_0 = 1, \quad j = 0, 1, 2, \quad i = 1, 2, \ldots, l, \quad l \leqslant L \tag{1.9}$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_{uj}, \; j = 0, l+1, l+2, \ldots, L, \quad S_{u0} \neq \varnothing \tag{1.10}$$

причем при $l = 0$ контактные условия (1.7)–(1.9) отсутствуют.

Неизвестные величины α^u_{ji}, задающие плоские смещения участков S_{ui}, подлежат определению из интегральных условий (1.9).

Для задания электрических граничных условий предположим, что граница S разбивается на два подмножества: S_D и S_φ. Участки S_D не электродированы, и на них выполняются условия

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_D \tag{1.11}$$

Подмножество S_φ есть объединение $M + 1$ не граничащих друг с другом участков $S_{\varphi k}$ ($k = 0, 1, \ldots, M$), покрытых бесконечно тонкими электродами. На этих участках зададим граничные условия

$$\varphi = \Phi_i, \quad \mathbf{x} \in S_{\varphi i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad m \leqslant M, \quad \Phi_i = \mathrm{const} \tag{1.12}$$

$$\int_{S_{\varphi i}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} dS = 0, \quad \mathbf{x} \in S_{\varphi i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad m \leqslant M \tag{1.13}$$

$$\varphi = 0, \quad \mathbf{x} \in S_{\varphi j}, \quad j = 0, m+1, m+2, \ldots, M, \quad S_{\varphi 0} \neq \varnothing \tag{1.14}$$

По (1.12), (1.13) имеется m разомкнутых электродов, на которых потенциалы Φ_i изначально не известны, но суммарные заряды на каждом электроде равны нулю. Остальные $M + 1 - m$ электродов считаются короткозамкнутыми с нулевыми значениями потенциалов. Случаи $m = 0$ и $m = M$ не исключаются из рассмотрения. В первом случае условия (1.12), (1.13) отсутствуют, и все электроды короткозамкнуты. Во втором случае условие (1.14) ставится только для электрода $S_{\varphi 0}$, и все электроды $S_{\varphi k}$ ($k = 0, 1, \ldots, m = M$) можно считать разомкнутыми.

Действительно, поскольку потенциал φ определяется с точностью до постоянной, то для $S_{\varphi 0}$ можно принять (1.14), а из следующего из (1.2) равенства

$$\int\limits_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}dS = 0$$

и (1.11), (1.13) вытекает, что (1.13) выполняется и для $S_{\varphi 0}$ с $\Phi_0 = 0$.

Предполагается также, что все участки $S_{uк}$ и $S_{\varphi к}$ имеют липшецевы границы класса C^1 [1] и не пересекаются между собой.

Сформулированная задача (1.1)–(1.14) является задачей о собственных колебаниях и состоит в нахождении собственных значений ω^2 и собственных функций $\mathbf{u}$ и φ, доставляющих нетривиальные решения однородной краевой задаче.

Условия (1.12), (1.13) аналогичны механическим контактным условиям (1.7)–(1.9) с жесткими штампами. Эти "контактные" граничные условия отличают данную задачу от изученной ранее [1] задачи с только короткозамкнутыми электродами при $m = 0$ и $l = 0$.

Математические свойства спектра задачи (1.1)–(1.14) установим, комбинируя подходы, примененные в [1, 3] при исследовании динамических задач электроупругости и контактных задач теории упругости.

2. Обобщенная и вариационная формулировки задачи. Введем в рассмотрение необходимые для дальнейшего пространства функций φ и вектор-функций $\mathbf{u}$, определенных на Ω.

Обозначим через H_ρ пространство вектор-функций $\mathbf{u} \in L_2$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_\rho = \int\limits_\Omega \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}d\Omega$$

На множестве вектор-функций $\mathbf{u} \in C^1$, удовлетворяющих (1.10) и (1.8) при произвольных α^u_{ji} на S_{ui}, введем скалярное произведение

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{ul} = \int\limits_\Omega (\nabla\mathbf{u})\cdot\cdot(\nabla\mathbf{v})^T d\Omega \tag{2.1}$$

Замыкание указанного множества вектор-функций $\mathbf{u}$ в норме, порожденной скалярным произведением (2.1), назовем H_{ul}.

На множестве функций $\varphi \in C^1$, удовлетворяющих (1.14), (1.12) при произвольных Φ_i на $S_{\varphi i}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) введем скалярное произведение

$$(\varphi,\psi)_{\varphi m} = \int\limits_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla\psi d\Omega \tag{2.2}$$

Замыкание данного множества в норме, порожденной скалярным произведением (2.2), назовем $\mathrm{H}_{\varphi m}$.

Тогда при произвольных $\mathbf{v} \in \mathrm{H}_{ul}$, $\chi \in \mathrm{H}_{\varphi m}$, используя стандартные действия, (1.1)–(1.14) можно преобразовать к виду

$$-\omega^2\rho(\mathbf{u},\mathbf{v}) + c(\mathbf{u},\mathbf{v}) + e(\varphi,\mathbf{v}) = 0 \tag{2.3}$$

$$-e(\chi,\mathbf{u}) + э(\varphi,\chi) = 0 \tag{2.4}$$

где

$$\rho(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int\limits_\Omega \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}d\Omega, \quad c(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int\limits_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\cdot\cdot\mathbf{c}^E\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})d\Omega$$

$$e(\varphi,\mathbf{v}) = \int\limits_\Omega \nabla\varphi\cdot\mathbf{e}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})d\Omega, \quad э(\varphi,\chi) = \int\limits_\Omega \nabla\varphi\cdot э^S\cdot\nabla\chi d\Omega \tag{2.5}$$

В силу принятых ранее свойств формы $\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $c(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ и $э(\varphi, \chi)$ в (2.5) симметричны, билинейны и положительно определены в L_2, H_{ul} и $H_{\varphi m}$ соответственно, а $e(\varphi, \mathbf{v})$ – билинейная форма.

Поскольку при фиксированных $\mathbf{u} \in H_{ul}$, $\varphi \in H_{\varphi m}$, $e(\chi, \mathbf{u})$ и $э(\varphi, \chi)$ есть линейные ограниченные функционалы в $H_{\varphi m}$, то по теореме Рисса существуют и единственны элементы $e\mathbf{u}$, $э\varphi \in H_{\varphi m}$, такие что для всех $\chi \in H_{\varphi m}$

$$e(\chi, \mathbf{u}) = (\chi, e\mathbf{u})_{\varphi m} \tag{2.6}$$

$$э(\varphi, \chi) = (э\varphi, \chi)_{\varphi m} \tag{2.7}$$

Очевидно, что $e\mathbf{u}$ и $э\varphi$ – линейные ограниченные операторы, действующие из H_{ul} в $H_{\varphi m}$ и из $H_{\varphi m}$ в $H_{\varphi m}$ соответственно, причем для оператора $э\varphi$ существует обратный.

Из (2.4), (2.6), (2.7) получаем, что

$$э\varphi = e\mathbf{u}, \ \ \varphi = A_{lm}\mathbf{u}, \ \ A_{lm} = э^{-1}e \tag{2.8}$$

где оператор A_{lm} действует из H_{ul} в $H_{\varphi m}$, линеен и ограничен.

Используя (2.6)–(2.8), систему (2.3), (2.4) можно представить в виде

$$-\omega^2\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + cэ_{lm}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \tag{2.9}$$

где

$$cэ_{lm}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + э(A_{lm}\mathbf{u}, A_{lm}\mathbf{v}) \tag{2.10}$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.14) назовем тройку величин (ω^2, $\mathbf{u} \in H_{ul}$, $\varphi \in H_{\varphi m}$), удовлетворяющих (2.9), (2.8) для произвольных вектор-функций $\mathbf{v} \in H_{ul}$, или, что эквивалентно, (2.3), (2.4) для произвольных $\mathbf{v} \in H_{ul}$, $\chi \in H_{\varphi m}$.

Проводя рассуждения, аналогичные приведенным в [1] для случая $m = 0$, $l = 0$, убеждаемся, что пространство $H_{cэlm}$, являющееся замыканием множества вектор-функций $\mathbf{u} \in C^1$, удовлетворяющих (1.8), (1.10), в норме, порожденной скалярным произведением (2.10), эквивалентно H_{ul}, а из вполне непрерывности оператора вложения из H_{ul} в H_ρ вытекают, как и в общей ситуации [4], следующие теоремы.

Теорема 2.1. Операторное уравнение (2.9) имеет дискретный спектр $0 < \omega^2_{lm1} \leqslant \leqslant \omega^2_{lm2} \leqslant \ldots \leqslant \omega^2_{lmk} \leqslant \ldots$, $\omega^2_{lmk} \to \infty$ при $k \to \infty$, а соответствующие собственные функции $\mathbf{u}^{(k)}_{lm}$ образуют систему, ортогональную и полную в пространствах H_ρ и $H_{cэlm}$.

Теорема 2.2 (*минимаксный принцип Куранта–Фишера*)

$$\omega^2_{lmk} = \max_{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{k-1} \in H_{ul}} \left[\min_{\substack{\mathbf{v} \neq 0, \mathbf{v} \in H_{ul} \\ \rho(\mathbf{v}, \mathbf{w}_j) = 0, j = 1, 2, \ldots, k-1}} R_{lm}(\mathbf{v}) \right]$$

где $R_{lm}(\mathbf{v})$ – частное Релея

$$R_{lm}(\mathbf{v}) = \frac{cэ_{lm}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{\rho(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$$

Нижние индексы l и m в формулировках теорем 2.1 и 2.2 введены для удобства дальнейших ссылок на принадлежность обобщенных решений к задачам с l участками, контактирующими с жесткими плоскими штампами, и с m разомкнутыми электродами.

Отметим, что теорема 2.1 имеет важное значение для обоснования метода Фурье решения нестационарных задач электроупругости [5, 6].

3. Связь между операторами A_{lm} и A_{l0}. Введем в рассмотрение функции $\psi_j \in \mathrm{H}_{\varphi M}$ $(j = 1, 2, \ldots, M)$, $\psi_j = \delta_{jk}$, $\mathbf{x} \in S_{\varphi k}$ $(k = 0, 1, \ldots, M)$, удовлетворяющие для всех $\chi \in \mathrm{H}_{\varphi 0}$ интегральному тождеству

$$э(\psi_j, \chi) = 0 \tag{3.1}$$

Используя величины $C_{ij}^M = э(\psi_i, \psi_j)$образуем матрицу $\mathbf{C}^M$ размера $M \times M$, называемую в электростатике матрицей статических емкостей. В силу симметрии и положительной определенности формы $э(\varphi, \chi)$ в пространстве $\mathrm{H}_{\varphi m}$ матрица C^M будет симметричной и положительно определенной. Тогда симметричными и положительно определенными будут и любые главные подматрицы C^m размера $m \times m$, составленные из элементов C_{ij}^m, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, как и обратные к ним матрицы $S^m = (C^m)^{-1}$.

Для задачи с m разомкнутыми электродами произвольный элемент $\chi \in \mathrm{H}_{\varphi m}$ и решение $\varphi \in \mathrm{H}_{\varphi m}$ можно представить в виде

$$\chi = \chi_0 + \sum_{k=1}^{m} \mathrm{X}_k \psi_k, \quad \varphi = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{m} \Phi_k \psi_k \tag{3.2}$$

где $\chi_0, \varphi_0 \in \mathrm{H}_{\varphi 0}$, X_k – произвольные постоянные, а Φ_k – изначально не известные значения φ на $S_{\varphi k}$ из (1.12).

Подставляя (3.2) в (2.4) и учитывая (3.1) и произвольность χ_0, X_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, получаем

$$э(\varphi_0, \chi_0) = e(\chi_0, \mathbf{u}) \tag{3.3}$$

$$e(\psi_k, \mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{m} C_{kj}^m \Phi_j \tag{3.4}$$

Из (3.3) по (2.6)–(2.8) имеем $\varphi_0 = A_{l0}\mathbf{u}$, а из (3.4) –

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^{m} S_{kj}^m \Psi_j^u, \quad \Psi_j^u = e(\psi_j, \mathbf{u}) \tag{3.5}$$

В результате с учетом (2.8), (3.5) из представления (3.2) для φ получаем связь между операторами A_{lm} и A_{l0}

$$A_{lm}\mathbf{u} = A_{l0}\mathbf{u} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} S_{kj}^m \Psi_j^u \psi_k$$

Поскольку $A_{l0}\mathbf{u} \in \mathrm{H}_{\varphi 0}$, то воспользовавшись свойством (3.1), будем также иметь

$$э(A_{lm}\mathbf{u}, A_{lm}\mathbf{v}) = э(A_{l0}, \mathbf{u}, A_{l0}\mathbf{v}) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} S_{kj}^m \Psi_k^u \Psi_j^v \tag{3.6}$$

для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{H}_{ul}$.

4. Следствия из вариационных формулировок. Назовем задачу (1.1)–(1.4) lm-задачей, подчеркивая этим наличие l участков S_{ui}, контактирующих с плоскими штампами, и m разомкнутых электродов $S_{\varphi i}$.

Рассмотрим две однотипные lm- и pm-задачи, различающиеся только числами l и p контактирующих участков S_{ui} в (1.7)–(1.10). Все же остальные определяющие параметры из (1.1)–(1.14) в lm- и lp-задачах предполагаются одинаковыми.

Теорема 4.1. Если $0 \leqslant l < p \leqslant L$, то при любом k k-я собственная частота lm-задачи не меньше k-й собственной частоты pm-задачи, т.е. $\omega_{lmk}^2 \geqslant \omega_{pmk}^2$.

Так как $l < p$, то $\mathrm{H}_{ul} \subset \mathrm{H}_{up}$, и для всех $\mathbf{v} \in \mathrm{H}_{ul}$ $\mathrm{A}_{lm}\mathbf{v} = A_{pm}\mathbf{v}$ и $R_{lm}(\mathbf{v}) = R_{pm}(\mathbf{v})$.

Тогда из известных рассуждений [4], использующих теорему 2.2, следует теорема 4.1.

Рассмотрим теперь две однотипные lm- и ln-задачи (1.1)–(1.14), различающиеся только числами m и n разомкнутых электродов $S_{\varphi i}$ в (1.12)–(1.14).

Теорема 4.2. Если $0 \leqslant m < n \leqslant M$, то при любом k k-я собственная частота lm-задачи не превосходит k-й собственной частоты ln-задачи, т.е. $\omega^2_{lmk} \leqslant \omega^2_{lnk}$.

По (2.10), (3.6) при $m \neq 0$ имеем

$$cэ_{ln}(\mathbf{v},\mathbf{v}) - cэ_{lm}(\mathbf{v},\mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S^n_{kj}\Psi^\upsilon_k\Psi^\upsilon_j - \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} S^m_{kj}\Psi^\upsilon_k\Psi^\upsilon_j \qquad (4.1)$$

Представим матрицу $\mathbf{S}^n$ в блочном виде

$$\mathbf{S}^n = \begin{vmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{F} \end{vmatrix} \qquad (4.2)$$

где $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$ – положительно определенные симметричные матрицы размера $m \times m$ и $(n - m) \times (n - m)$ соответственно. Так как матрица $\mathbf{S}^n$ – обратная к $\mathbf{C}^n$, а $\mathbf{S}^m$ – обратная к подматрице $\mathbf{C}^m$ матрицы $\mathbf{C}^n$, то из представления [7] для матрицы, обратной к блочной, имеем

$$\mathbf{S}^m = \mathbf{G} - \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{B} \qquad (4.3)$$

Используя (4.2) и (4.3), правую часть равенства (4.1) можно представить в форме

$$(\boldsymbol{\Psi}^\upsilon)^T \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{F} \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{\Psi}^\upsilon \qquad (4.4)$$

где $\boldsymbol{\Psi}^\upsilon$ – вектор размерности n с компонентами Ψ^υ_k.

Участвующая в (4.4) матрица положительно полуопределена [7], и следовательно, для всех $\mathbf{v} \in \mathrm{H}_{ul}$ справедливы неравенства

$$cэ_{lm}(\mathbf{v},\mathbf{v}) \leqslant cэ_{ln}(\mathbf{v},\mathbf{v}), \quad R_{lm}(\mathbf{v}) \leqslant R_{ln}(\mathbf{v})$$

Эти же неравенства имеют место и при $m = 0$, так как в этом случае суммы с S^m_{kj} в (4.1) отсутствуют, а матрица $\mathbf{S}^n$ положительно определена.

Доказанное неравенство для частных Релея при учете теоремы 2.2. фактически и доказывает теорему 4.2 [4].

Исследуем изменение собственных частот lm-задачи (1.1)–(1.14) при изменении некоторых ее параметров. Эти изменения будем явно указывать в формулировках последующих теорем, а все величины, относящиеся к модифицированным m-задачам будем помечать звездочкой. Как и выше, для исходной и модифицированной задач все не указываемые в формулировках теорем определяющие параметры из (1.1)–(1.14) предполагаются идентичными.

Теорема 4.3. Если $S_u \supset S_{*u}$, $S_{uj} \supset S_{*uj}$, $j = 0, 1, \ldots, L$, то $\omega^2_{lmk} \geqslant \omega^2_{*lmk}$ для всех k.

Теорема 4.4. Ели упругие модули и плотности двух lm-задач таковы, что $c(\mathbf{v},\mathbf{v}) \geqslant c_*(\mathbf{v},\mathbf{v})$, $\rho(\mathbf{v},\mathbf{v}) \leqslant \rho_*(\mathbf{v},\mathbf{v})$ для любых $\mathbf{v} \in \mathrm{H}_{ul}$, то $\omega^2_{lmk} \geqslant \omega^2_{*lmk}$ для всех k.

Если $S_u \supset S_{*u}$, $S_{uj} \supset S_{*uj}$, то $\mathrm{H}_u \subset \mathrm{H}_{*u}$ и $A_{lm}(\mathbf{v}) = A_{*lm}(\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{v} \in \mathrm{H}_{ul}$. Следовательно, $R_{lm}(\mathbf{v}) \geqslant R_{*lm}(\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{v} \in \mathrm{H}_{ul}$, причем в условиях обеих теорем. Установленное неравенство доказывает теоремы 4.3 и 4.4.

Замечание. Эффекты влияния S_u, упругих модулей и плотности электроупругого материала на первую собственную частоту ω^2_{001} задачи (1.1)–(1.11) при $l = 0$, $m = 0$ рассматривались в [8]. Для этих целей использовался следующий вариационный принцип: $\omega^2_{001} = \min\ R(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} = 0$ на S_u, $R(\mathbf{v}) = (c(\mathbf{v},\mathbf{v}) + э(\chi,\chi))/\rho(\mathbf{v},\mathbf{v})$ при условии, что χ определяется через $\mathbf{v}$ как решение задачи (1.2), (1.4), (1.5), (1.11), (1.14) при замене φ на χ и $\mathbf{u}$ на $\mathbf{v}$. Отметим, что данная формулировка не является математически строгой, так как χ определяется как классическое решение, а для ω^2 и $\mathbf{u}$ используется вариационный подход, дающий обобщенное решение. Предлагаемое же в [8] условие $\overset{E}{c}_{ijkl} \geqslant \overset{E}{c}_{*ijkl}$ вместо $c(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geqslant c_*(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ в теореме 4.4 не является ни необходимым, ни достаточным. Правильное условие теоремы 4.4 требует, чтобы для разностей модулей $\Delta c_{ijkl} = \overset{E}{c}_{ijkl} - \overset{E}{c}_{*ijkl}$ форма $\Delta c(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ была положительно определена, что не обеспечивается неравенствами $\overset{E}{c}_{ijkl} \geqslant \overset{E}{c}_{*ijkl}$, причем все эти неравенства не обязаны выполняться при положительной определенности формы $\Delta c(\mathbf{v}, \mathbf{v})$.

Теорема 4.5. Если $S_\varphi \supset S_{*\varphi}$, $S_{\varphi j} \supset S_{*\varphi j}$, $j = 0, 1, \dots, M$, то $\omega^2_{lmk} \leqslant \omega^2_{*lmk}$ для всех k.

Если $S_\varphi \supset S_{*\varphi}$, $S_{\varphi j} \supset S_{*\varphi j}$, то $\mathrm{H}_{\varphi m} \subset \mathrm{H}_{*\varphi m}$. Из (2.4), (2.8) при произвольных функциях $\mathbf{u} \in \mathrm{H}_{ul}$ имеем

$$e(\chi, \mathbf{u}) = э(\varphi, \chi), \quad \varphi, \chi \in \mathrm{H}_{\varphi m}, \quad \varphi = A_{lm}\mathbf{u}$$

$$e(\chi, \mathbf{u}) = э(\varphi_*, \chi), \quad \varphi_*, \chi \in \mathrm{H}_{*\varphi m}, \quad \varphi_* = A_{*lm}\mathbf{u}$$

Подставляя в эти равенства $\chi = \varphi$ получаем: $э(\varphi_*, \varphi) = э(\varphi, \varphi)$. Следовательно, $0 \leqslant э(\varphi - \varphi_*, \varphi - \varphi_*) = э(\varphi_*, \varphi_*) - э(\varphi, \varphi)$, что влечет за собой неравенство $R_{lm}(\mathbf{v}) \leqslant$ $\leqslant R_{*lm}(\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{v} \in \mathrm{H}_{ul}$, доказывающее теорему 4.5.

Теорема 4.6. Если диэлектрические проницаемости двух lm-задач таковы, что $э(\psi, \psi) \geqslant э_*(\psi, \psi)$ для любых $\psi \in \mathrm{H}_{\varphi m}$, то $\omega^2_{lmk} \leqslant \omega^2_{*lmk}$ для всех k.

Так как $(э_{(*)}\psi, \chi)_{\varphi m} = э_{(*)}(\psi, \chi)$ для всех $\chi \in \mathrm{H}_{\varphi m}$, то $\nabla э_{(*)}\psi = э^s_{(*)} \cdot \nabla\psi$. Тогда для любых $\varphi, \psi \in \mathrm{H}_{\varphi m}$ справедлива цепочка равенств

$$(э_*э\varphi, \psi)_{\varphi m} = (э\varphi, э_*\psi)_{\varphi m} = \int\limits_\Omega \nabla э\varphi \cdot \nabla э_*\psi d\Omega =$$

$$= \int\limits_\Omega \nabla\varphi \cdot э^S \cdot э^S_* \cdot \nabla\psi d\Omega = \int\limits_\Omega \nabla\varphi \cdot э^S_* \cdot э^S \cdot \nabla\psi d\Omega = (ээ_*\varphi, \psi)_{\varphi m}$$

в силу симметрии тензора $э^S \cdot э^S_*$. Из установленной перестановочности симметричных положительно определенных операторов $э_ж$ и $э$ следует и перестановочность их квадратных корней [9].

Далее, для всех $\varphi \in \mathrm{H}_{\varphi m}$ имеем

$$э(\varphi, \varphi) = (э\varphi, \varphi)_{\varphi m} = (э^{1/2}\varphi, э^{1/2}\varphi)_{\varphi m} = (э_*^{-1/2} э_*^{1/2} э^{1/2} \varphi, э_*^{-1/2} э_*^{1/2} э^{1/2} \varphi)_{\varphi m} =$$

$$= (э_*^{-1}(э_*^{1/2} э^{1/2}\varphi), \quad э_*^{1/2} э^{1/2}\varphi)_{\varphi m}$$

Аналогично,

$$э_*(\varphi, \varphi) = (э^{-1}(э^{1/2} э_*^{1/2}\varphi), \quad э^{1/2} э_*^{1/2}\varphi)_{\varphi m}$$

А так как $э_*^{1/2} э^{1/2} = э^{1/2} э_*^{1/2}$, то из условия теоремы следует

$$(э^{-1}\psi, \psi)_{\varphi m} \leqslant (э_*^{-1}\psi, \psi)_{\varphi m} \tag{4.5}$$

для всех $\psi \in \mathrm{H}_{\varphi m}$.

Наконец, по (2.7), (2.8)

$$э_{(*)}(A_{(*)lm}\mathbf{v}, \quad A_{(*)lm}\mathbf{v}) = (э_{(*)}^{-1} e\mathbf{v}, e\mathbf{v})_{\varphi m} \tag{4.6}$$

и таким образом, по (4.5), (4.6) имеем

$$э(A_{lm}\mathbf{v},\ \ A_{lm}\mathbf{v}) \leqslant э_*(A_{*lm}\mathbf{v},\ \ A_{*lm}\mathbf{v})$$

для всех $\mathbf{v} \in \mathrm{H}_{ul}$, что фактически и доказывает теорему.

Теорема 4.7. Если пьезомодули двух lm-задач таковы, что $e_*(\chi, \mathbf{v}) = \lambda e(\chi, \mathbf{v})$ для любых $\chi \in \mathrm{H}_{\varphi m}$, $\mathbf{v} \in \mathrm{H}_{ul}$ и $\lambda \geqslant 1$, то $\omega^2_{lmk} \leqslant \omega^2_{*lmk}$ для всех k.

Поскольку $\lambda e(\chi, \mathbf{v}) = e(\chi, \lambda\mathbf{v})$, то $e_*\mathbf{v} = e\lambda\mathbf{v} = \lambda e\mathbf{v}$, и по (4.6) $э(A_{*lm}\mathbf{v}, A_{*lm}\mathbf{v}) = \lambda^2(э^{-1}e\mathbf{v}, e\mathbf{v})_{\varphi m} = \lambda^2 э(A_{lm}\mathbf{v}, A_{lm}\mathbf{v}) \geqslant э(A_{lm}\mathbf{v}, A_{lm}\mathbf{v})$, что и доказывает теорему.

Заметим, что условия теорем 4.4, 4.6 и 4.7 для пьезокерамики, поляризованной в направлении оси x_3, выполняются, если: $\rho \leqslant \rho_*$, $\Delta\ c^E_{jj} \geqslant 0$, $j = 1, 3, 4$, $\Delta c^E_{11} \geqslant |\Delta c^E_{12}|$, $\Delta c^E_{33}(\Delta c^E_{11} + \Delta c^E_{12}) \geqslant 2(\Delta c^E_{13})^2$, $\Delta c^E_{kl} = c^E_{kl} - c^E_{*kl}$ для теоремы 4.4; $э^s_{jj} \geqslant\ э^s_{*jj}$ ($j = 1, 3$) для теоремы 4.6; $e_{*13} = \lambda e_{13}$, $e_{*15} = \lambda e_{15}$, $e_{*33} = \lambda e_{33}$, $\lambda \geqslant 1$ для теоремы 4.7. (Здесь использованы двухиндексные обозначения Фойхта для c^E_{ijkl} и e_{ijk}.)

5. Основные выводы. Суммируем результаты теорем 4.1–4.6. Если на некоторых участках S_{uk} заменить условия жесткого закрепления (1.10) на контактные условия (1.7)–(1.9), то согласно теореме 4.1 собственные частоты уменьшатся.

Если же на некоторых участках $S_{\varphi k}$ заменить условия равенства нулю потенциала (1.14) на электрические условия контактного типа (1.12), (1.13), то согласно теореме 4.2 собственные частоты увеличатся.

Отметим, что собственные частоты задачи со всеми короткозамкнутыми электродами обычно являются частотами электрического резонанса, а собственные частоты задачи со всеми разомкнутыми электродами – частотами антирезонанса. Теорема 4.2, таким образом, утверждает также, что частоты антирезонанса не меньше частот резонанса с одинаковыми порядковыми номерами.

По теоремам 4.3 и 4.4 уменьшение границы S_u или ослабление упругих модулей и увеличение плотности приводят к уменьшению собственных частот. Наоборот, согласно теоремам 4.5 и 4.6 уменьшение электродированной границы S_φ или ослабление диэлектрических проницаемостей приводят к увеличению собственных частот.

Сравнивая эффекты, отраженные в теоремах 4.1, 4.3, 4.4. и 4.2, 4.5, 4.6, можно заключить, что однотипные изменения механических и электрических граничных условий или упругих модулей и диэлектрических проницаемостей приводят к противоположным изменениям собственных частот.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-01259).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белоконь А.В., Ворович И.И.* Некоторые математические вопросы теории электроупругих тел // Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1979. С. 53–67.
2. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 159 с.
3. *Белоконь А.В.* К теории динамических контактных задач для упругих тел ограниченных размеров // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 2. С. 77–84.
4. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
5. *Жарий О.Ю.* Метод разложения по собственным функциям в задачах динамической электроупругости // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 109–115.
6. *Жарий О.Ю.* Модовая теория электромеханического преобразования энергии в пьезоэлектрических телах // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 330–337.
7. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
8. *Yang J.S.* A few properties of the resonant frequencies of a piezoelectric body // Arch. Mech. 1992. V. 44. N 4. P. 475–477.
9. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
16.01.1995