ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 60, Вып. 1, 1996

УДК 539.3:534.1

© 1996 г. В.М. Фомин

СТАЦИОНАРНАЯ АНТИПЛОСКАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Изучается антиплоская стационарная динамическая контактная задача для периодической системы штампов на упругом полупространстве, аналогичная изученной ранее плоской задаче [1]. Большое внимание уделяется исследованию резонансных явлений, возникающих при действии гармонических нагрузок на штампы.

1. Рассматривается антиплоское стационарное движение однородного изотропного упругого полупространства $y \geqslant 0$ (ось y предполагается направленной вниз), на верхней грани которого $y = 0$ приложена сдвигающая нагрузка $\tau_{zy} / (2\mu) = f(x)\exp(-i\omega t)$ (μ – постоянная Ламе). Под антиплоским понимается такое движение полупространства, при котором перемещения точек параллельны оси z.

Амплитудные перемещения точек полупространства определяются из формулы [2]

$$w(\omega, x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\gamma^{-1} \exp(i\xi x - \gamma y) d\xi \tag{1.1}$$

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-i\xi x)dx, \quad \gamma = (\xi^2 - \kappa^2)^{1/2}, \quad \kappa = \frac{\omega}{\upsilon}$$

Здесь $f(\xi)$ – преобразование Фурье функции $f(x)$, υ – скорость распределения поперечных волн в упругой среде, причем, исходя из условий излучения, принято, что $\gamma \geqslant 0$ при $|\xi| \geqslant \kappa$ и $\gamma = -i(\kappa^2 - \xi^2)^{1/2}$ при $|\xi| < \kappa$.

Предположим теперь, что нагрузка на поверхности полупространства квазипериодична, т.е. что

$$f(x + l) = f(x)\exp(-i\alpha) \tag{1.2}$$

где l – длина некоторого отрезка, α – вещественный параметр $|\alpha| \leqslant \pi$.

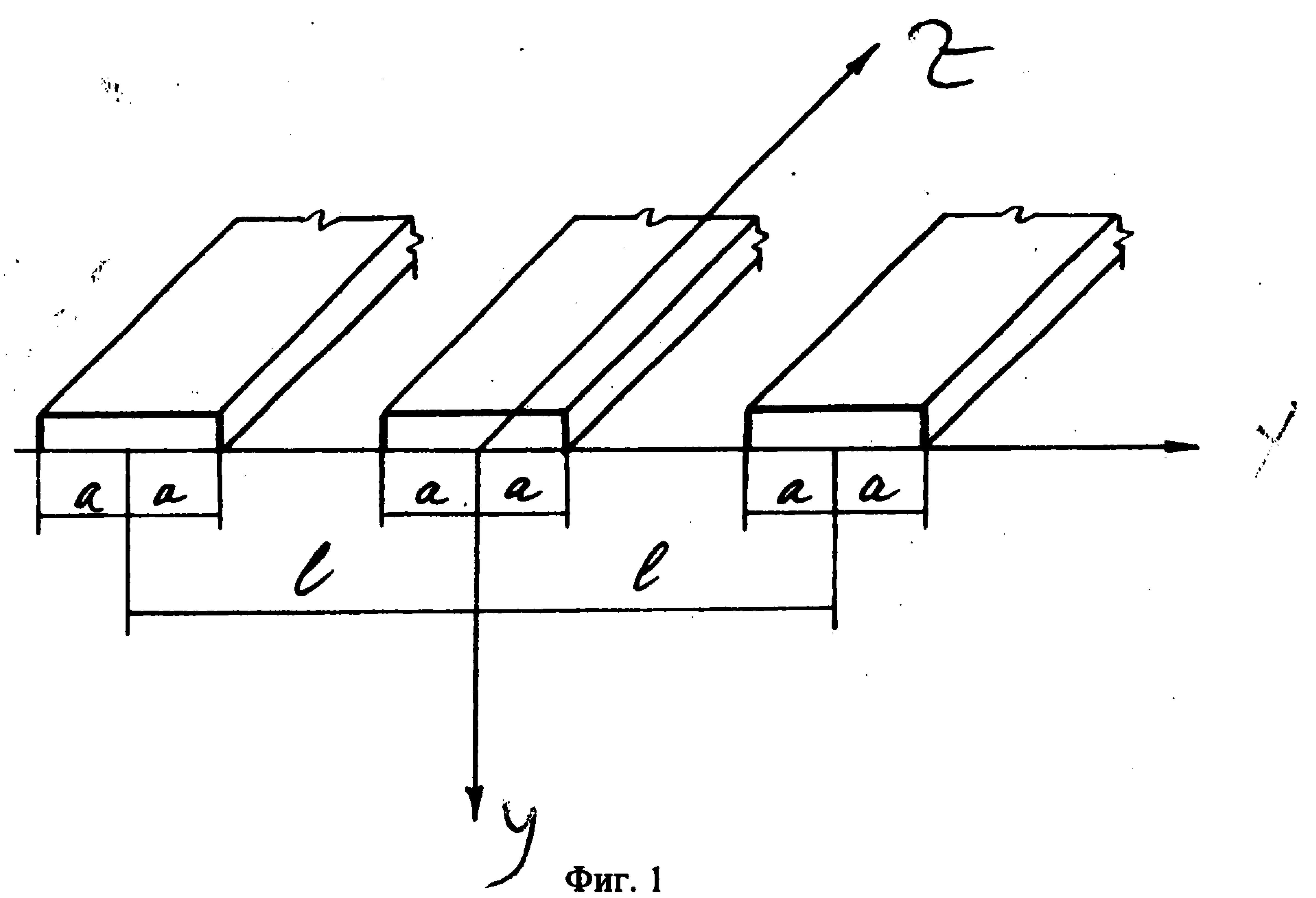
Можно убедиться, что в этом случае

$$f(\xi) = g(\xi)\sum_m \exp[-im(\xi l + \alpha)], \quad g(\xi) = \int_{-l/2}^{l/2} f(x)\exp(-i\xi x)dx \tag{1.3}$$

Сходимость ряда в (1.3) понимается в смысле сходимости в пространстве обобщенных функций [3].

Подставляя (1.3) в (1.1) и используя равенство [3]

$$\sum_m \exp(iml\xi) = \frac{2\pi}{l} \sum_k \delta\left(\xi - k\frac{2\pi}{l}\right)$$



Фиг. 1

($\delta(\xi)$ – дельта-функция), находим, что

$$w(\omega, x, y) = -\frac{2}{l} \sum_k g_k \gamma_k^{-1} \exp(-\gamma_k y + i\xi_k x)$$

$$\xi_k = (2k\pi - \alpha)/l, \quad g_k = g(\xi_k), \quad \gamma_k = (\xi_k^2 - \kappa^2)^{1/2} \tag{1.4}$$

Полагая, что квазипериодическая нагрузка состоит из сосредоточенных нагрузок, т.е. что $f(x) = -\delta(x)$ при $|x| < l/2$, получаем из (1.4) при $y = 0$ так называемую групповую функцию влияния

$$K(\alpha, \omega, x) = \frac{2}{l} \sum_k \gamma_k^{-1} \exp(i\xi_k x) \tag{1.5}$$

так как в этом случае $g(\xi) = 1$.

При $\gamma_k = 0$ групповая функция влияния обращается в бесконечность. Как легко выяснить, это происходит при частотах $\omega_k = |2k\pi - \alpha| \upsilon / l$ ($k \in Z$, Z – множество целых вещественных чисел включая нуль). Эти частоты соответствуют частотам запирания слоя $|x| \leqslant l/2$ со следующими граничными условиями:

$$w(l/2, y) = w(-l/2, y)\exp(-i\alpha), \qquad \tau_{zx}(l/2, y) = \tau_{zx}(-l/2, y)\exp(-i\alpha)$$

Заметим, что квазипериодическая задача для полупространства (т.е. когда на поверхности квазипериодическая нагрузка) эквивалентна задаче для полуслоя $|x| \leqslant l/2$, $y \geqslant 0$ с указанными выше граничными условиями. Появление бесконечно больших перемещений можно объяснить тем, что энергия от источника, находящегося на поверхности, не может продвигаться внутрь полуслоя, так как он "заперт" для волн, перемещающихся вниз. Будем называть эти частоты α-резонансными для полупространства.

Рассмотрим теперь движение полупространства при кинематическом возбуждении, т.е. вызванное движением ленточных штампов с плоским основанием, расположенных на границе полупространства, при заданных амплитудных перемещениях штампов (фиг. 1). В дальнейшем такую задачу будем называть кинематической. Штампы параллельны оси z, ширина их равна $2a$, а расстояние между их осями равно l. Штампы пронумерованы подряд целыми числами от $-\infty$ до $+\infty$. Изучается квазипериодическая задача, когда амплитудные перемещения штампов заданы следующим образом:

$$w_m = \exp(-im\alpha) \tag{1.6}$$

Тогда контактные напряжения тоже будут обладать свойством квазипериодичности (1.2). Отсюда следует, что достаточно определить контактные напряжения под одним из штампов, например, под "основным", т.е. имеющим номер нуль. Приравнивая перемещения точек границы полупространства под основным штампом перемещению штампа, получаем интегральное уравнение задачи

$$\int_{-a}^{a} K(\alpha,\omega,x-s)p(s)ds = 1 \quad (|x| \leq a) \tag{1.7}$$

Здесь $p(s)$ – контактные напряжения.

Рассмотрим сначала случай, когда частота движения штампов не совпадает ни с одной из α-резонансных частот для полупространства. Тогда, представляя γ_k в виде

$$\gamma_k = |\xi_k|[1-(\kappa/\xi_k)^2]^{1/2}$$

получаем асимптотическое представление γ_k^{-1} при больших $|k|$

$$\gamma_k^{-1} = \frac{l}{2\pi|k|}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi k}\right)+r_k, \qquad r_k = O(|k|^{-3}) \tag{1.8}$$

Из (1.5) и (1.8) получаем

$$K(\alpha,\omega,x) = \frac{1}{\pi}\exp\left(-i\frac{\alpha}{l}x\right)\left[\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\cos\left(\frac{2\pi}{l}kx\right)+\right.$$

$$\left.+i\frac{\alpha}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\sin\left(\frac{2\pi}{l}kx\right)\right]+K_1(\alpha,\omega,x) \tag{1.9}$$

$$K_1(\alpha,\omega,x) = \frac{2}{l}\exp\left(-i\frac{\alpha}{l}x\right)\sum_{k\neq 0} r_k \exp\left(i\frac{2\pi}{l}kx\right)-\frac{1}{\pi\gamma_0}$$

Используя известную формулу [4]

$$\frac{1}{2}\ln[2(1-\cos x)] = -\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\cos(kx)$$

находим, что

$$K(\alpha,\omega,x) = \frac{1}{\pi}\exp\left(-i\frac{\alpha}{l}x\right)\left[\ln\frac{a}{|x|}+i\frac{\alpha}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\sin\left(\frac{2\pi}{l}kx\right)\right]+K_2(\alpha,\omega,x)$$

$$K_2(\alpha,\omega,x) = \frac{1}{\pi}\exp\left(-i\frac{\alpha}{l}x\right)\ln\left\{|x|\left[2a\left|\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)\right|\right]^{-1}\right\}+K_1(\alpha,\omega,x) \tag{1.10}$$

Можно убедиться, что $K_2(\alpha,\omega,x)$ – дважды непрерывно-дифференцируемая функция x на отрезке $|x| \leq a$ $(a < l)$.

Из (1.10) следует, что ядро $K(\alpha, \omega, x)$ интегрируемо с квадратом на отрезке $|x| \leq a$, и следовательно, уравнение (1.7) – интегральное уравнение Фредгольма первого рода, причем слагаемое $\pi^{-1}\exp(-i\alpha/lx)\ln|x|^{-1}$ представляет собой так называемую "сингулярную" часть ядра. Из соотношения

$$\int_{-1}^{1} \ln|x-y|T_j(y)[1-y^2]^{-1/2}dy = -\nu_j T_j(x) \quad (j = 0,1,2,\ldots)$$

($\nu_0 = \pi \ln 2,\ \nu_j = \pi / j$ при $j > 0$) вытекает, что собственными функциями сингулярной части ядра являются полиномы Чебышева $T_j(y)$. Поэтому решение уравнения (1.7) ищется в виде

$$p(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j T_j\left(\frac{s}{a}\right)\left[1-\left(\frac{s}{a}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{1.11}$$

Подставляя (1.11) в (1.7), умножая на $T_n(x/a)[1-(x/a)^2]^{-1/2}$ и интегрируя по x от $-a$ до $+a$, приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_{nj} p_j = l\delta_{n0} \tag{1.12}$$

$$A_{nj} = 2a^2 \pi i^{j-n} \sum_k \gamma_k^{-1} J_n(\xi_k a) J_j(\xi_k a)$$

где δ_{nm} – символ Кронекера, $J_n(x)$ – функция Бесселя.

Используя представление (1.10) можно показать, что система (1.12) квазирегулярна и решается при помощи редукции.

Предположим теперь, что значения ω близки к α-резонансной частоте для полупространства ω_k (индекс k фиксирован). Тогда γ_k сколь угодно близко к нулю, а k-е слагаемое в (1.5) может принимать сколь угодно большие значения. Умножив (1.7) на γ_k будем иметь

$$V_1 p + \varepsilon V_2 p = \varepsilon, \qquad \varepsilon = \gamma_k \tag{1.13}$$

$$V_1 p = -\frac{2}{l}\exp(i\xi_k x)\int_{-a}^{a} \exp(-i\xi_k s) p(s) ds$$

$$V_2 p = -\frac{2}{l}\int_{-a}^{a} \sum_{m \neq k} \gamma_m^{-1} \exp[i\xi_m (x-s)] p(s) ds$$

Заметим, что V_1 – конечномерный оператор, отображающий пространство $L(-a, a)$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор $\exp(i\xi_k x)$.

Будем искать решение уравнения (1.13) в следующем виде:

$$p(y) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m h_m(y)[1-(y/a)^2]^{-1/2} \tag{1.14}$$

$$h_0(y) = \exp(i\xi_k y), \qquad h_m(y) = T_{m-1}(y) - d_m \exp(i\xi_k y) \qquad (m > 0)$$

Коэффициенты d_m определяются из условия ортогональности

$$\int_{-a}^{a} h_m(y)[1-(y/a)^2]^{-1/2} \exp(-i\xi_k y) dy = 0 \qquad (m > 0)$$

Нетрудно определить, что $d_m = i^{m-1} \pi J_{m-1}(\xi_k a)$.

Подставим (1.14) в (1.13), умножим на $h_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и проинтегрируем по x от $-a$ до $+a$. В результате будем иметь

$$\frac{2}{l} a^2 \pi^2 q_0 + \varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} q_m (V_2 h_m, h_0) = \varepsilon(1, h_0)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} q_m (V_2 h_m, h_n) = (1, h_n) \qquad (n > 0) \tag{1.15}$$

$$(f_1, f_2) = \int_{-a}^{a} f_1(x) \bar{f}_2(x) dx$$

Исключая из (1.15) q_0, приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно $q_m (m > 0)$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} q_m = b_n \quad (n = 1,2,\ldots) \tag{1.16}$$

$$B_{nm} = (V_2 h_m, h_n) - \frac{\varepsilon l (V_2 h_m, h_0)(V_2 h_0, h_n)}{2a^2\pi^2 + \varepsilon l (V_2 h_0, h_0)}$$

$$b_n = (1, h_n) - \frac{\varepsilon l (1, h_0)(V_2 h_0, h_n)}{2a^2\pi^2 + \varepsilon l (V_2 h_0, h_0)}$$

Можно убедиться, что

$$(V_2 h_m, h_n) = 2a^2\pi^2 \sum_{j \neq k} \gamma_j^{-1} [(-i)^{n-1} J_{n-1}(\xi_j a) - \bar{d}_n J_0(\xi_k a - \xi_j a)] \times$$
$$\times [i^{m-1} J_{m-1}(\xi_j a) - d_m J_0(\xi_k a - \xi_j a)] - \tag{1.17}$$
$$-[\delta_{n1} - \bar{d}_n J_0(\xi_k a)][\delta_{m-1} - d_m J_0(\xi_k a)]$$

Из (1.17) следует, что система (1.16) квазирегулярна при любом достаточно малом ε (включая $\varepsilon = 0$).

2. Будем называть α-резонансными частотами квазипериодической кинематической задачи такие частоты, при которых главный вектор контактных напряжений под штампом обращается в бесконечность. Очевидно, существование таких частот связано с наличием нетривиальных решений у уравнения

$$\int_{-a}^{a} K(\alpha, \omega, x - s) p(s) ds = 0 \quad (|x| \leq a) \tag{2.1}$$

Подставив (1.5) в (2.1), получаем

$$\sum_k p_k \gamma_k^{-1} \psi_k(x) = 0 \quad (|x| \leq a) \tag{2.2}$$

$$\psi_k(x) = l^{-1/2} \exp(i\xi_k x), \qquad p_k = \int_{-a}^{a} p(y) \overline{\psi}_k(y) dy$$

Будем исследовать вопрос о наличии нетривиальных решений у (2.1) в $L(-a, a)$. Будем считать их принадлежащими $L(-a, l-a)$ и обращающимися в нуль почти всюду на $[a, l-a)$, т.е. удовлетворяющими равенствам

$$\int_{a}^{l-a} p(s) \overline{\varphi}_n(s) ds = 0 \quad (n \in Z) \tag{2.3}$$

где $\{\varphi_n(y)\}_{-\infty}^{\infty}$ — базис банахова пространства $C(a, l-a)$.

Пусть $\{\eta_n(x)\}_{-\infty}^{\infty}$ – базис пространства $C(-a, a)$. Умножив (2.2) на $\overline{\eta}_n(x)$ и проинтегрировав от $-a$ до a, получим

$$\sum_k p_k \gamma_k^{-1} (\psi_k, \eta_n) = 0 \quad (\eta_n(x) \equiv 0, \quad x \in (a, l-a]) \tag{2.4}$$

Здесь и ниже

$$(f_1, f_2) = \int_{-a}^{l-a} f_1(x) \bar{f}_2(x) dx$$

Подставив в (2.3) разложение

$$p(y)=\sum_k p_k\psi_k(x)$$

будем иметь

$$\sum_k p_k(\psi_k,\varphi_n)=0 \quad (\varphi_n(x)\equiv 0, \quad x\in[-a,a]) \tag{2.5}$$

Введя обозначения $x_k=p_k/\gamma_k$, $b_{nk}=(\psi_k,\varphi_n)$, $c_{nk}=(\psi_k,\eta_n)$, запишем (2.4) и (2.5) в следующем виде:

$$\sum_k x_k\gamma_k b_{nk}=0, \quad \sum_k x_k c_{nk}=0 \quad (n\in Z) \tag{2.6}$$

Функции $\{\psi_k(x)\}_{-\infty}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис гильбертова пространства $H=L_2(-a,l-a)$, а $\{\eta_k(x)\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\{\varphi_k(x)\}_{-\infty}^{\infty}$ – базисы пространства $H_1=L_2(-a,a)$ и $H_2=L_2(a,l-a)$ соответственно. Очевидно, $H=H_1\oplus H_2$. Без ограничения общности можно считать, что $\{\eta_n(x)\}_{-\infty}^{\infty}$ – ортонормированный базис в H_1.

Исследуем вопрос о существовании нетривиальных решений у системы (2.6) в l_2.

Заметим, что системы в некотором смысле подобные (2.6) исследовались ранее [5], однако между ними имеются существенные различия: системы, рассмотренные в [5], относятся к системам второго рода, а (2.6) – первого рода. Кроме того, было принято упрощающее предположение, что все $\gamma_k\neq 0$, в то время как здесь в случае α-резонансных частот конечное число γ_k обращается в нуль. Все это существенно влияет на выбор методов исследования. Поэтому результаты и во многом методы работы [5] не могут применены к (2.6).

Можно убедиться, что γ_k удовлетворяют следующим условиям:

1) каждое из них является либо вещественным, либо чисто мнимым числом, причем все отличные от нуля вещественные числа одного знака (положительны);

2) количество чисто мнимых и равных нулю γ_k конечно.

Лемма. Если

$$\{\gamma_k b_{mk}\}_{k=-\infty}^{\infty}\in l_2 \tag{2.7}$$

при любом m, то система (2.6) имеет в l_2 только тривиальное решение.

Доказательство. Введем операторы **G** и **G*** по формулам

$$Gf=\sum_k \gamma_k(f,\psi_k)\psi_k, \quad G^*f=\sum_k \gamma_k(f,\psi_k)\psi_k$$

определенные на некотором множестве E_G, всюду плотном в H, состоящем из элементов $f\in H$, для которых сходится ряд $\sum_k |\gamma_k(f,\psi_k)|^2$. Условие (2.7) означает, что $\varphi_m\in E_G$.

Определение. Линейный оператор T, определенный на некотором множестве E_T гильбертова пространства, принадлежит классу (S), если из $(Tf_n,f_n)\to 0$ следует, что $f_n\to 0$.

Убедимся, что $G\in(S)$ на H_2. Пусть $f\in E_G$. Используя обозначения $(f,\psi_k)=f_k$, находим

$$(Gf,f)=G_1(f)+iG_2(f) \tag{2.8}$$

$$G_1(f)=\sum_k \operatorname{Re}\gamma_k|f_k|^2, \quad G_2(f)=\sum_k \operatorname{Im}\gamma_k|f_k|^2$$

Заметим, что в сумме, определяющей $G_1(f)$, конечное число слагаемых тождественно равно нулю. Покажем, что $G_1(f)$ положительно определена на H_2. Допустим противное, т.е. что существует последовательность элементов $f_n\in H_2(\|f_n\|=1,\ n=1,2,\ldots)$, таких, что $G_1(f_n)\to 0$.

Представим элемент f_n в следующем виде: $f_n = f_n^{(0)} + f_n^{(1)}$, $f_n^{(0)} \in H_0$ (H_0 – линейная оболочка элементов ψ_p, для которых $\operatorname{Re}\gamma_p = 0$, а $f_n^{(1)} \perp f_n^{(0)}$. Тогда $G_1(f_n) = G_1(f_n^{(1)})$ и $G_1(f_n^{(1)}) \geqslant \gamma \| f_n^{(1)} \|$, где $\gamma = \min \gamma_k$ (для тех k, которым соответствует $\operatorname{Re}\gamma_k \neq 0$). Поэтому $\| f_n^{(1)} \| \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. $\| f_n - f_n^{(0)} \| \to 0$.

Отсюда следует, что все $\| f_n^{(0)} \|$ ($n = 1,2,\ldots$) ограничены одним числом. Из конечномерности H_0 вытекает, что из последовательности $f_n^{(0)}$ ($n = 1,2,\ldots$) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $f_q^{(0)} \to f^{(0)} \in H_0$ ($q = n_1, n_2, \ldots$). Тогда $f_q (q = n_1, n_2, \ldots)$ также стремится к этому пределу. Так как H_2 полно, $f^{(0)} \in H_2$. Таким образом, $f^{(0)} \in H_0 \cap H_2$. Но $H_0 \cap H_2 = \{0\}$, поскольку кратчайшее расстояние от любого вектора $\psi_k = l^{-1/2} \exp(i \xi_k x)$ до H_2 не менее величины

$$s = \left[\int_a^{l-a} dx \right]^{1/2} = (l - 2a)^{1/2} \tag{2.9}$$

Пришли к противоречию: с одной стороны, $\| f^{(0)} \| = 1$ (как предела $\| f_q \|$), с другой – $f^{(0)} = 0$, а значит, $G_1(f) > \rho > 0$ на H_2.

Допустим теперь, что $(Gf_m, f_m) \to 0$ для некоторой последовательности элементов $f_m \in H_2$. Из (2.8) следует, что $G_1(f_m) \to 0$, а это возможно только для $f_m \to 0$. Таким образом, $G \in (S)$ на H_2. Аналогично доказывается, что и $G^* \in (S)$ на H_2.

При помощи оператора G система (2.6) может быть записана в следующем виде:

$$(Gx, \varphi_m) = 0, \quad (x, \eta_m) = 0 \quad (m \in Z) \tag{2.10}$$

Пусть система (2.10) имеет ненулевое решение $x \in E_G$. Из второго равенства (2.10) следует, что $x \in H_2$, а из первого – что $Gx \in H_1$. Поэтому $(Gx, x) = 0$, а из принадлежности G классу (S) вытекает, что $x = 0$.

Если же $x \notin E_G$, то в $H_2 \cap E_G$ можно найти последовательность элементов $x_k \to x$, так как E_G всюду плотно в H. Запишем (2.10) так:

$$(x, G^* \varphi_m) = 0, \quad (x, \eta_m) = 0 \quad (m \in Z)$$

Тогда из стремления x_k к x вытекает, что $\lim\limits_{k \to \infty} (x_k, G^* \varphi_m) = 0$ при каждом m. Таким образом,

$$\lim_{k \to \infty} (Gx_k, \varphi_m) = 0, \quad (x_k, \eta_m) = 0 \quad (m \in Z)$$

Введем обозначение $G_{km} = (Gx_k, \varphi_m)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $|G_{km}|$ монотонно убывают при фиксированном m. Тогда ряд $\sum\limits_m |G_{km}|^2 \to 0$ при $k \to \infty$.

Действительно, для любого сколь угодно малого ε можно найти такое m_0, что

$$\sum_{m=m_0+1}^{\infty} (|G_{1m}|^2 + |G_{1,-m}|^2) < \varepsilon / 2$$

С другой стороны, можно найти такое k_0, что

$$\sum_{m=-m_0}^{m_0} |G_{km}|^2 < \varepsilon / 2$$

при $k > k_0$, следовательно, для таких k

$$\sum_m |G_{km}|^2 < \sum_{m=-m_0}^{m_0} |G_{km}|^2 + \sum_{m=m_0+1}^{\infty} (|G_{1m}|^2 + |G_{1,-m}|^2) < \varepsilon$$

что и означает стремление вышеуказанного ряда к нулю

Но

$$(Gx_k, x_k) = \left(Gx_k, \sum_m x_{km}\varphi_m \right) = \sum_m x_{km} G_{km}$$

и используя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$|(Gx_k, x_k)| \leqslant \left[\sum_m |x_{km}|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_m |G_{km}|^2 \right]^{1/2}$$

При $k \to \infty$ первый множитель в правой части неравенства стремится к $\| x \|$, а второй – к нулю, т.е. $(Gx_k, x_k) \to 0$ и из принадлежности G классу (S) вытекает, что $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$.

Таким образом, лемма доказана.

Теорема. Интегральное уравнение (2.1) при любом $\omega > 0$ имеет в $L(-a, a)$ только тривиальное решение.

Доказательство. Построим в H_2 последовательность функций $\varphi_m(x) (m \in Z)$ следующим образом:

$$\varphi_m(x) = \varphi_m^0(x)\zeta_m(x) \tag{2.11}$$

$$\varphi_m^0(x) = \exp[i2\pi m(x-a)/b]/\sqrt{b}, \quad b = l - 2a \quad (a \leqslant x \leqslant l-a)$$

$$\zeta_m(x) = \begin{cases} (x-a)/\varepsilon_m & (a \leqslant x \leqslant a+\varepsilon_m) \\ 1 & (a+\varepsilon_m \leqslant x \leqslant l-a-\varepsilon_m) \\ (l-a-x)/\varepsilon_m & (l-a-\varepsilon_m \leqslant x \leqslant l-a) \end{cases} \tag{2.12}$$

Здесь $\varepsilon_m > 0$ – некотора суммируемая последовательность $\left(\sum_m \varepsilon_m < \infty \right)$.

Можно, например, положить $\varepsilon_m = \varepsilon_0 / (|m|+1)^2$. Заметим, что $|\zeta_m(x)| \leqslant 1$, а $\varphi_m^0(x)$ – ортонормированная последовательность.

Можно убедиться, что (2.11) – базис, квадратично близкий к ортонормированному [6]. Для этого достаточно выполнения для оператора T, определенного формулами

$$T\varphi_m^0 = \varphi_m - \varphi_m^0 (m \in Z)$$

следующих условий [6]:

а) оператор T является оператором Гильберта–Шмидта;

б) оператор $I + T$ обратим (I – единичный оператор в пространстве H_2).

Из (2.12) следует

$$\|\varphi_m - \varphi_m^0\|^2 = \int_a^{l-a} |\varphi_m(x) - \varphi_m^0(x)|^2\,dx \leqslant \frac{1}{b} \int_a^{l-a} |\zeta_m(x) - 1|^2\,dx \leqslant \frac{2\varepsilon_m}{b}$$

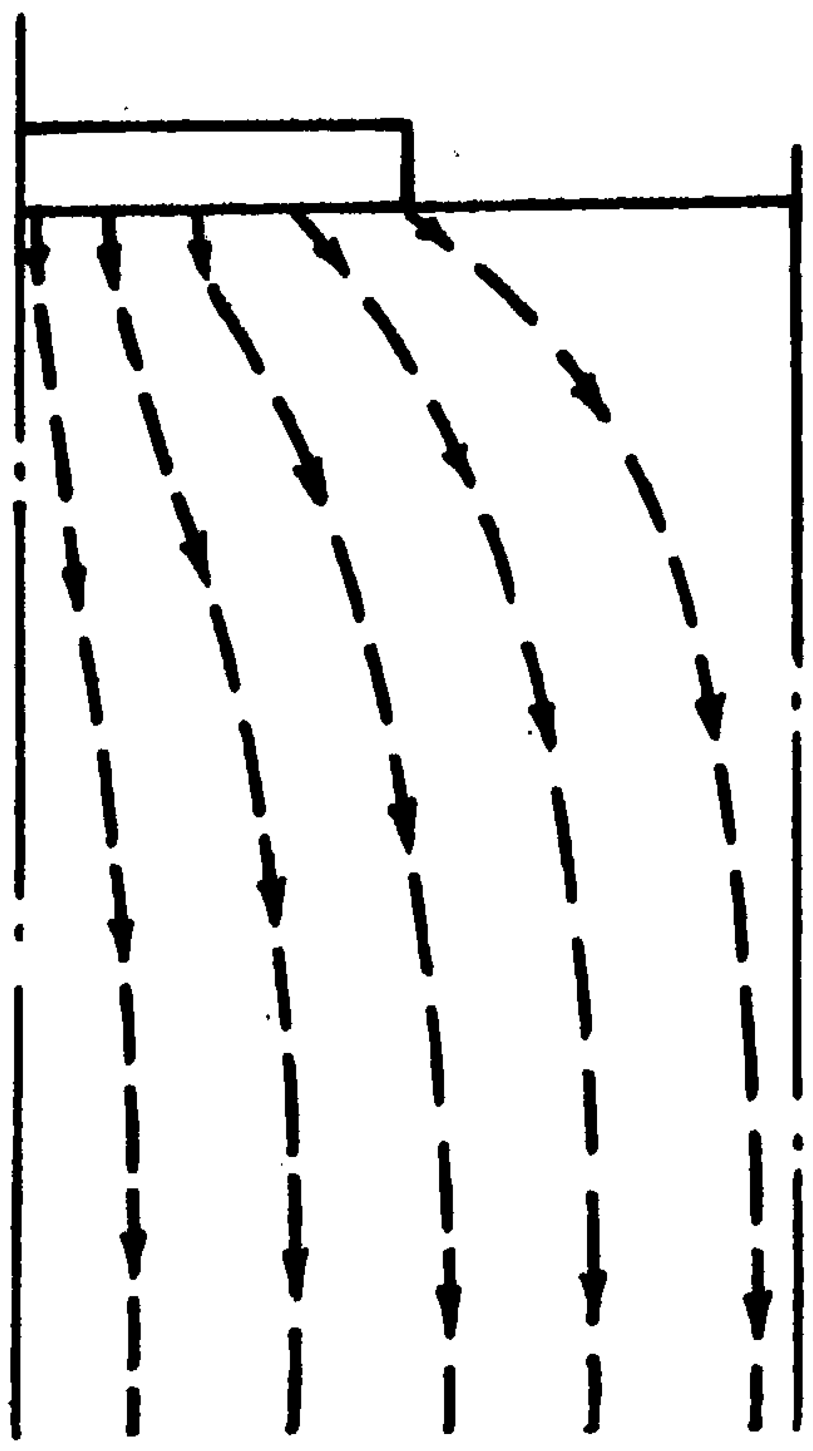
Тогда

$$\sum_m \|T\varphi_m^0\|^2 = \sum_m \|\varphi_m - \varphi_m^0\|^2 \leqslant \frac{2}{b} \sum_m \varepsilon_m < \infty$$

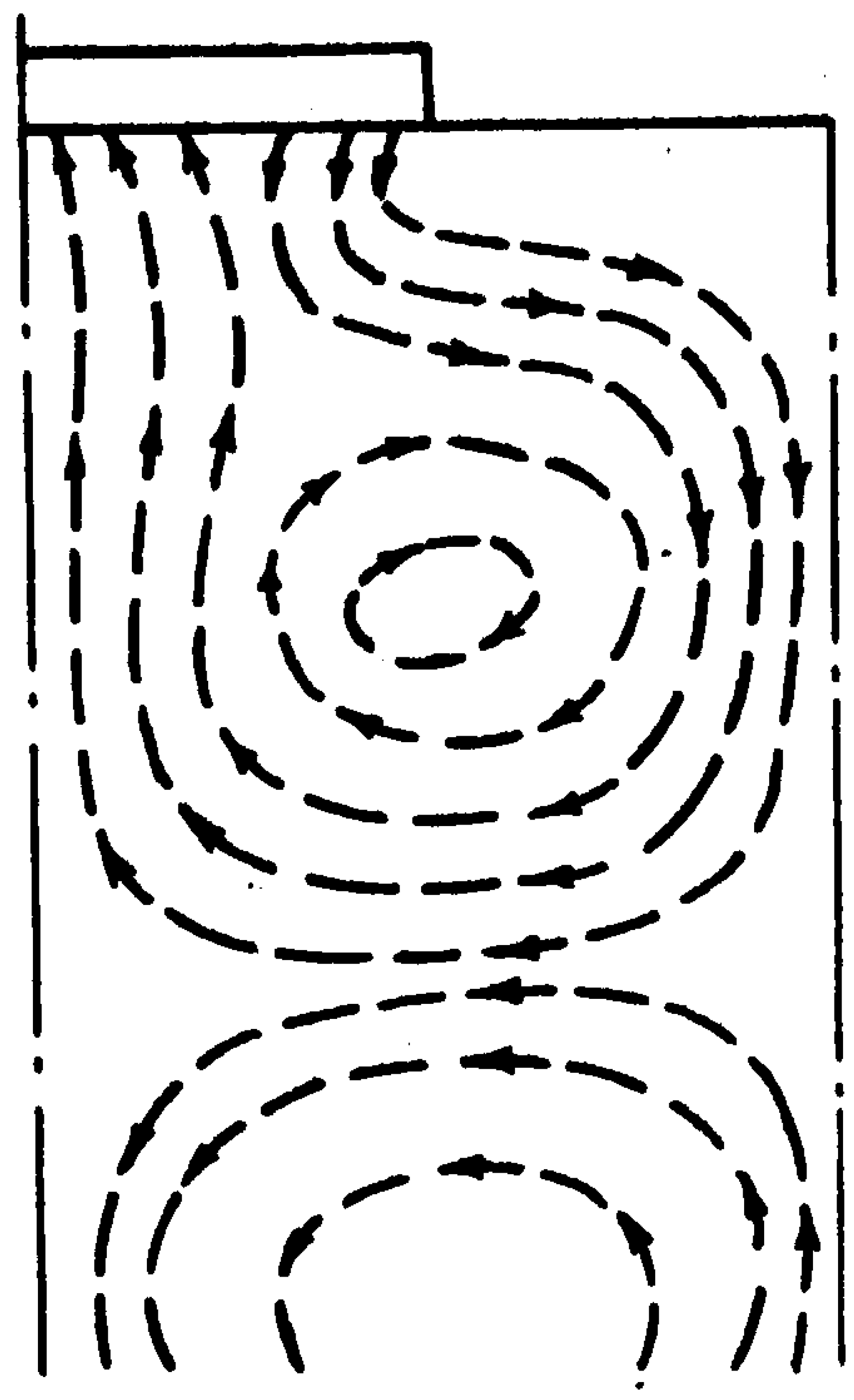
Это и означает, что T – оператор Гильберта–Шмидта [6].

Для проверки условия б возьмем последовательность комплексных чисел $z_k (k \in Z)$, такую, что $\sum_k |z_k|^2 \leqslant 1$. Элемент $\varphi(x) = \sum_k z_k \varphi_k^0(x)$ пространства H_2 имеет норму, не превышающую единицы. Тогда

$$\|T\varphi\| \leqslant \sum_k |z_k|\, \|T\varphi_k^0\| = \sum_k |z_k|\, \|\varphi_k - \varphi_k^0\|$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Используя неравенство Коши–Буняковского, находим

$$\|T\varphi\| \leqslant \left[\sum_k |z_k|^2\right]^{1/2} \left[\sum_k \|\varphi_k - \varphi_k^0\|^2\right]^{1/2} \leqslant \left[\frac{2}{b} \sum_m \varepsilon_m\right]^{1/2}$$

Если выбрать величины ε_m таким образом, чтобы $\sum_m \varepsilon_m < b/2$, то тогда окажется, что $\|T\varphi\| < 1$, а это и означает выполнение неравенства $\|T\| < 1$. Отсюда следует, что оператор $I + T$ обратим, т.е. условие δ выполнено. Таким образом, последовательность $\varphi_m(x)(m \in Z)$ является базисом пространства H_2.

Интегрируя по частям, находим

$$b_{mk} = \frac{i}{\sqrt{l}\xi_k} \int_a^{l-a} \varphi_m(y) \exp(i\xi_k y) dy \tag{2.13}$$

Используя (2.11) и (2.12), получаем

$$b_{mk} = \frac{2\pi m}{b\xi_k} b_{mk} - \frac{d_{mk}}{\sqrt{b-l}\xi_k \varepsilon_m (2\pi m / b - \xi_k)}$$

$$d_{mk} = \exp[-i\varepsilon_m 2\pi m / b + i\xi_k(a + \varepsilon_m)] - \exp(i\xi_k a) -$$
$$- \exp[i\xi_k(l-a)] + \exp[i\varepsilon_m 2\pi m / b + i\xi_k(l - a - \varepsilon_m)]$$

Отсюда

$$b_{mk} = d_{mk}\left[\sqrt{bl}\varepsilon_m (2\pi m / b - \xi_k)^2\right]^{-1} \tag{2.14}$$

Так как $|d_{mk}| \leqslant 4$, а $\gamma_k = O(|k|)$, то из (2.14) следует, что $\{\gamma_k b_{mk}\}_{k=-\infty}^{\infty} \in l_2$ при любом m. Таким образом, условия леммы выполнены и система (2.6) имеет в l_2 только тривиальное решение.

Поскольку $x_k \in l_2$, то $x_k = o(|k|^{-1/2})$. Из равенства $p_k = x_k \gamma_k$ и асимптотики $\gamma_k \sim 2\pi|k|/l$ получаем, что $p_k = o(|k|^{1/2})$. Отсюда вытекает, что класс функций, в котором уравнение (2.1) имеет только тривиальное решение, содержит $L(-a, a)$.

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что уравнение (1.7) имеет в $L(-a, a)$ единственное решение. Таким образом, кинематическая квазипериодическая задача не имеет α-резонансных частот, т.е. в полупространстве $y \geqslant 0$, закрепленном на верхней грани вдоль полос $|x - lm| \leqslant a$ ($m \in Z$) нет бегущих волн.

Численное исследование позволяет прояснить физическую причину ограниченности главного вектора контактных напряжений при любых α и ω. Сравним поле направлений усредненного за период потока мощности под штампом при не α-резонансном значении частоты ω = 0,8 (фиг. 2) и α-резонансным ω_1 = 1,571 для полупространства (фиг. 3). При нерезонансном значении ω поток мощности свободно уходит на бесконечность, при резонансном же значении полуслой $|x| \leqslant l/2$ "заперт" и наблюдается баланс входящего и выходящего потоков мощности под штампом. В рассмотренном примере $\alpha = 0$, $l = 4$ (ω и l безразмерны: $\omega = \omega' a/\upsilon$, $l = l'/a$; ω' и l' размерные величины).

3. Рассмотрим теперь квазипериодическую контактную задачу, когда заданы не перемещения штампов, а нагрузки, действующие на них. Амплитудные значения нагрузок квазипериодичны, т.е. $F_m(\alpha) = F_0(\alpha)\exp(-im\alpha)$ (m – номер штампа, $m \in Z$).

Запишем дифференциальное уравнение движения основного штампа

$$\mu_0 = d^2 w_0(t) / dt^2 = F_0(\alpha)\exp(-i\omega t) - R_0(t) \tag{3.1}$$

Здесь μ_0 – погонная масса штампа, $w_0(t)$ – его перемещение, $R_0(t)$ – результирующая контактных напряжений.

Разыскивая установившееся движение, приходим к равенству

$$-\mu_0\omega^2 w_0(\alpha,\omega) = F_0(\alpha) - R_0(\alpha,\omega) \tag{3.2}$$

где $w_0(\alpha,\omega)$ и $R_0(\alpha,\omega)$ – амплитудные значения $w_0(t)$ и $R_0(t)$.

Приравнивая перемещения штампа перемещениям точек границы полупространства, получаем интегральное уравнение

$$\int_{-a}^{a} K(\alpha,\omega,x-s) q_0(\alpha,\omega,s)ds = -\frac{F_0(\alpha) - R_0(\alpha,\omega)}{\mu_0\omega^2} (|x| \leqslant a) \tag{3.3}$$

Здесь $q_0(\alpha, \omega)$ – контактные напряжения под основным штампом.

Сопоставляя уравнения (1.7) и (3.3), находим

$$q_0(\alpha,\omega,s) = -p_0(\alpha,\omega,s)[F_0(\alpha) - R_0(\alpha,\omega)] / (\mu_0\omega^2)$$

Интегрируя по s от $-a$ до a, получаем

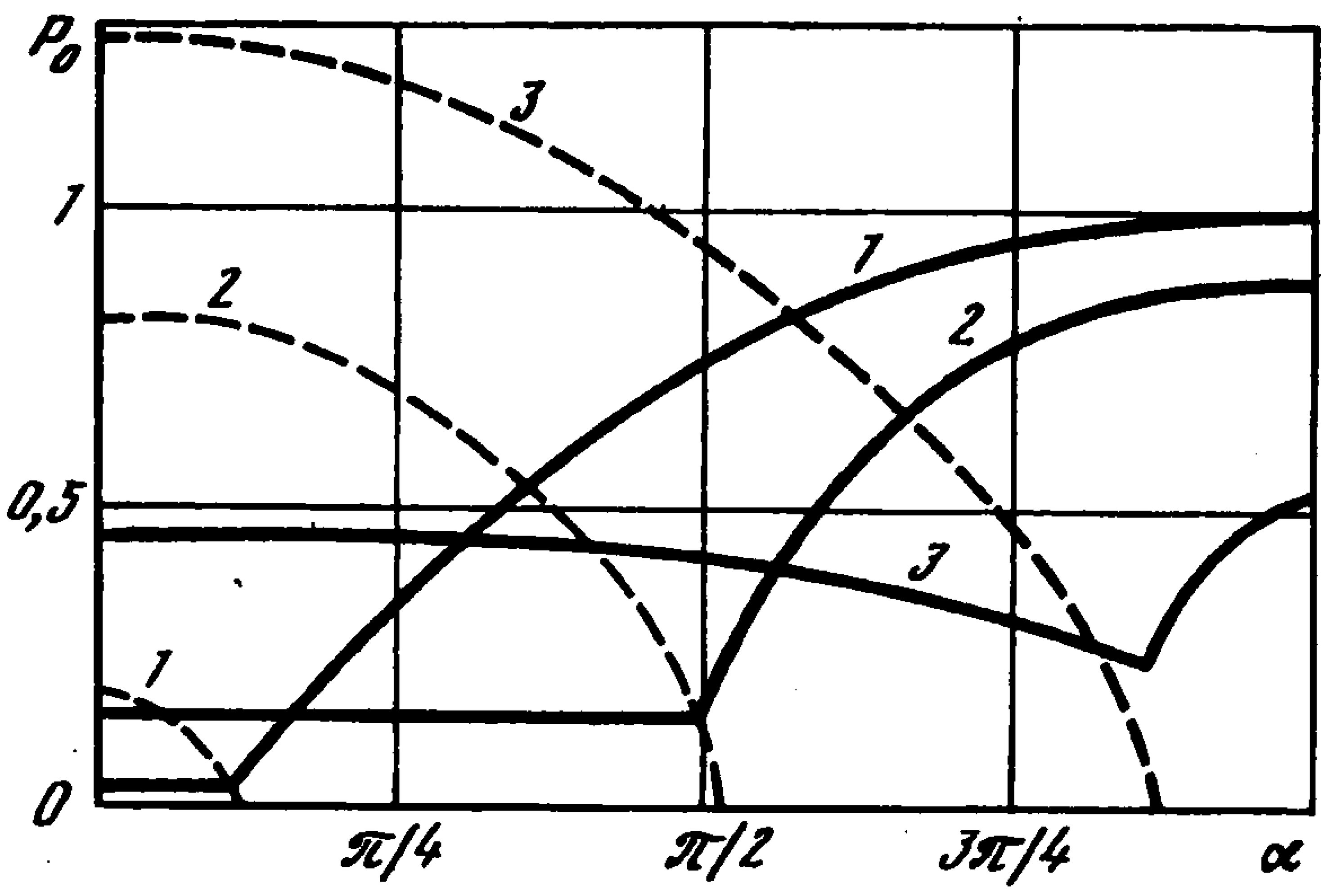
$$R_0(\alpha,\omega) = F_0(\alpha)P_0(\alpha,\omega) / [P_0(\alpha,\omega) - \mu_0\omega^2] \tag{3.4}$$

Здесь $P_0(\alpha,\omega)$ – главный вектор контактных напряжений под штампом в кинематической контактной задаче.

Таким образом, несмотря на то, что квазипериодическая кинематическая задача не имеет α-резонансов, аналогичная контактная задача может их иметь, если $P_0(\alpha,\omega)$ принимает вещественные положительные значения.

Приведенные на фиг. 4 графики зависимости $P_0(\alpha,\omega)$ от α при $l = 4$ и ω = 0,1 (кривая *1*), ω = 0,4 (кривая *2*), ω = 0,7 (кривая *3*) (сплошная линия соответствует Re $P_0(\alpha, \omega)$, штриховая – Im $P_0(\alpha, \omega)$ показывает, что существуют такие α и ω, для которых $P_0(\alpha, \omega) > 0$. Можно показать, что область этих значений определяется неравенством $\omega \leqslant \upsilon|\alpha|/l$.

Перейдем теперь к рассмотрению общей контактной задачи для периодической системы штампов, когда наличие у нагрузки каких-либо симметрических свойств не



Фиг. 4

предполагается. Результирующая контактных напряжений под m-м штампом определяется формулой [1]

$$R_m(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_0(\alpha,\omega)\exp(-im\alpha)d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{F_0(\alpha)P_0(\alpha,\omega)e^{-im\alpha}}{P_0(\alpha,\omega)-\mu_0\omega^2}d\alpha \tag{3.5}$$

Таким образом, проблема существования резонансов у общей контактной задачи сводится к вопросу существования интеграла в (3.5), который понимается в смысле главного значения по Коши. Он не существует, если знаменатель подынтегрального выражения в (3.5) имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ полюс второго или более высокого порядка, т.е. если $\mu_0\omega^2 = P_0(\alpha,\omega)$ и $\partial P_0(\alpha,\omega)/\partial\alpha = 0$.

Заметим, что вне круга $|\alpha| \leqslant \omega l/\upsilon$ в комплексной плоскости α интегральный оператор (1.7) аналитичен, а значит [7], функция $P_0(\alpha, \omega)$ аналитична по α в этой области. Следовательно, $P_0(\alpha, \omega)$ и $\partial P_0(\alpha, \omega)/\partial\alpha$ непрерывно зависят от α при $\omega l/\upsilon < |\alpha| \leqslant \pi$.

На фиг. 4 видно, что на интервале $(\omega l/\upsilon, \pi)$ функция $P_0(\alpha, \omega)$ монотонно возрастает с ростом α. Кроме того, $P_0(\alpha, \omega)$ симметрична относительно осей $\alpha = k\pi (k \in Z)$ и периодична с периодом 2π. Отсюда следует, что $\partial P_0(\pi, \omega)/\partial\alpha = 0$.

Таким образом, если $\mu_0\omega^2 = P_0(\pi, \omega)$ для $\omega \leqslant \upsilon\pi/l$, то $R_m(\omega)$ принимает бесконечно большие значения, т.е. наступает резонанс. При приближении частоты к резонансному значению движение штампов становится антипериодическим, т.е. фазы колебаний двух соседних штампов становятся противоположными с одновременным нарастанием амплитуды колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фомин В.М.* Плоская стационарная динамическая контактная задача периодической структуры // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 84–94.
2. *Гриченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
3. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.
4. *Градштейн И.М., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
5. *Розет Т.А.* О бесконечных системах теории волноводов // Изв. вузов. Математика. 1958. № 1. С. 136–142.
6. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.
7. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.

Одесса

Поступила в редакцию
9.III.1993