

УДК 539.3

© 1996 г. В.М. Александров

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОГО НАКЛОННОГО КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА С УПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

Асимптотическими методами [1–3] строятся решения задачи о действии на упругое полупространство плоского наклонного кольцевого штампа при обычных допущениях, что силы трения в области контакта штампа с полупространством отсутствуют, а вне области контакта поверхность полупространства не нагружена. Решения получены в виде простых формул для больших и малых значений безразмерного параметра λ , характеризующего относительную толщину кольца. Эти решения перекрывают друг друга с высокой степенью точности на некотором промежуточном диапазоне изменения λ .

В аналогичной постановке задача изучалась ранее многими авторами, в частности, следует отметить работы [4–6]. Здесь получено исчерпывающее решение задачи, обеспечивающее возможность ее полного качественного и количественного анализа.

1. По классической схеме (см., например, [7]) задача о кольцевом штампе (фигура) может быть приведена к определению контактных давлений $q(r, \phi)$ из интегрального уравнения

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{q(\rho, \psi) \rho d\rho d\psi}{R} = 2\pi\theta\delta(r, \phi)$$

$$(R = [r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\phi - \psi)]^{1/2}, \theta = G / (1 - \nu), a \leq r \leq b, \phi \in [0, 2\pi)) \tag{1.1}$$

где a и b – внутренний и внешний радиусы кольцевой области контакта, $\delta(r, \phi)$ – осадка точек поверхности упругого полупространства в области контакта, G и ν – упругие постоянные.

Далее, используя интеграл ([8], 6.511(1)) и соотношение ([8], 8.531(1))

$$J_0(uR) = J_0(ur)J_0(u\rho) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(ur)J_m(u\rho) \cos m(\phi - \psi) \tag{1.2}$$

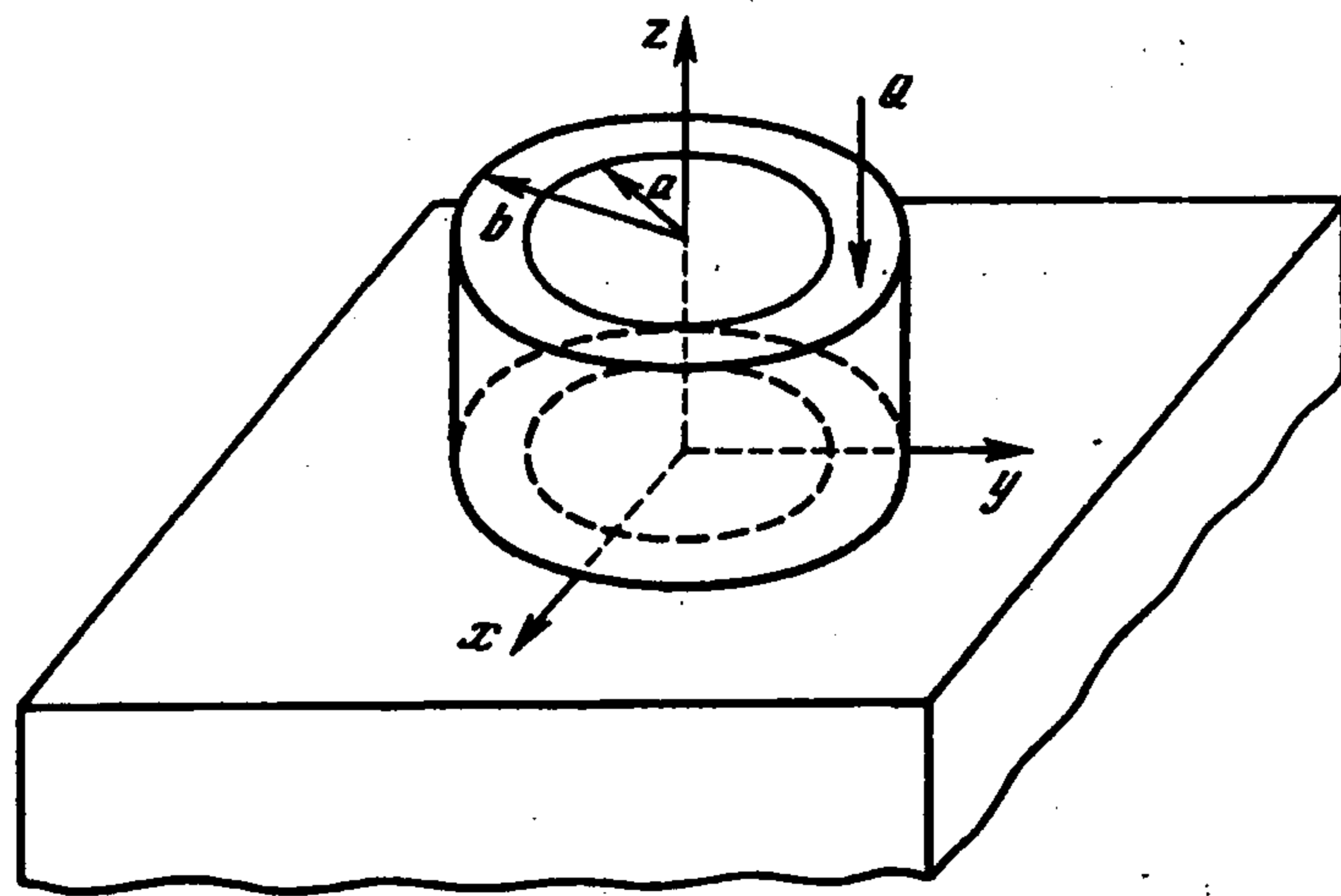
($J_m(x)$ – функции Бесселя), придадим уравнению (1.1) форму

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} q(\rho, \psi) [k_0(r, \rho) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} k_m(r, \rho) \cos m(\phi - \psi)] \rho d\rho d\psi = 2\pi\theta\delta(r, \phi) \tag{1.3}$$

где ядра $k_m(r, \rho)$ имеют вид

$$k_m(r, \rho) = \int_0^{\infty} J_m(ur)J_m(u\rho) du \tag{1.4}$$

Используя интеграл ([8], 6.512(1)) и одно из тождественных преобразований гипер-



геометрического ряда ([8], 9.134(3)), будем иметь

$$k_m(r, \rho) = \frac{(2m-1)!! e^{2m}}{2^{2m} (2m)!! (r+\rho)} F\left(m + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, 2m+1, e^2\right) \left(e = \frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) \quad (1.5)$$

($F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ – гипергеометрический ряд). Воспользовавшись, наконец, интегральным представлением гипергеометрического ряда ([8], 9.111), перепишем (1.5) в виде

$$k_m(r, \rho) = \frac{e^{2m}}{\pi(r+\rho)} \int_0^1 t^{m-1/2} (1-t)^{m-1/2} (1-e^2 t)^{-m-1/2} dt \quad (1.6)$$

При любом m интеграл в (1.6) может быть выражен линейной комбинацией полных эллиптических интегралов $K(e)$ и $E(e)$. Например, при $m = 0$ и $m = 1$ соответственно имеем

$$k_0(r, \rho) = \frac{2}{\pi(r+\rho)} K(e), \quad k_1(r, \rho) = \frac{2}{\pi(r+\rho)e^2} [(2-e^2)K(e) - 2E(e)] \quad (1.7)$$

Важно отметить, что ядра $k_m(r, \rho)$ могут быть еще представлены следующим интегралом

$$k_m(r, \rho) = \frac{1}{\pi\sqrt{r\rho}} \int_0^\infty \frac{L_m(s)}{s} \cos\left(s \ln \frac{r}{\rho}\right) ds$$

$$L_m(s) = \frac{s\Gamma(1/4 + is/2 + m/2)\Gamma(1/4 - is/2 + m/2)}{2\Gamma(3/4 + is/2 + m/2)\Gamma(3/4 - is/2 + m/2)} \quad (1.8)$$

($\Gamma(z)$ – гамма-функция). Здесь было использовано соотношение

$$\int_0^\infty J_m(t) J_m\left(t \frac{r}{\rho}\right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(s) \left(\frac{r}{\rho}\right)^{-s} ds$$

$$g(s) = \frac{\Gamma(s/2 + m/2)\Gamma(1/2 - s/2 + m/2)}{2\Gamma(1 - s/2 + m/2)\Gamma(1/2 + s/2 + m/2)} \quad (1.9)$$

полученное на основании формул прямого и обратного преобразования Меллина функции Бесселя [9].

Разложим в (1.3) функции $q(\rho, \psi)$ и $\delta(r, \phi)$ в ряды Фурье

$$q(\rho, \psi) = q_0(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [q_n(\rho) \cos n\psi + \tilde{q}_n(\rho) \sin n\psi]$$

$$\delta(r, \phi) = \delta_0(r) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\delta_n(r) \cos n\phi + \tilde{\delta}_n(r) \sin n\phi] \quad (1.10)$$

Вычислив, затем, в (1.6) интеграл по ψ и приравнявая справа и слева коэффициенты при одинаковых $\cos n\psi$ и $\sin n\psi$, получим

$$\pi \int_a^b q_n(\rho) k_n(r, \rho) \rho d\rho = \theta \delta_n(r), \quad \int_a^b \tilde{q}_1(\rho) k_1(r, \rho) \rho d\rho = \theta \tilde{\delta}_1(r) \quad (n = 0, 1) \quad (1.11)$$

и т.д. Для плоского наклонного кольцевого штампа $\delta_0(r) = \delta$, $\delta_1(r) = \alpha r$, $\tilde{\delta}_1(r) = \beta r$, все остальные $\delta_n(r)$ и $\tilde{\delta}_n(r)$ равны нулю, соответственно будут равны нулю все $q_n(r)$ и $\tilde{q}_n(r)$ при $n \geq 2$. Здесь δ – поступательное перемещение штампа по оси z , α и β – углы поворота его относительно осей y и x .

Итак, задача о плоском наклонном кольцевом штампе сведена к решению интегральных уравнений (1.11). К ним для завершения постановки задачи необходимо еще добавить условия равновесия штампа

$$Q = 2\pi \int_a^b q_0(\rho) \rho d\rho$$

$$M_x = Q e_y = \pi \int_a^b \tilde{q}_1(\rho) \rho^2 d\rho, \quad M_y = Q e_x = \pi \int_a^b q_1(\rho) \rho^2 d\rho \quad (1.12)$$

где e_x и e_y – проекции точки приложения вдавливающей силы Q на оси x и y . Условия (1.12) служат для определения связей между Q и δ , e_x и α , e_y и β .

2. Рассмотрим сначала случай относительно узкого кольца. Произведем в интегральных уравнениях (1.11) следующую замену переменных:

$$r = a \exp[(1+x)/\lambda], \quad \rho = a \exp[(1+\xi)/\lambda], \quad \lambda = 2[\ln(b/a)]^{-1} \quad (2.1)$$

и введем обозначения

$$p_0(\xi) = \frac{\rho^{3/2} q_0(\rho)}{\theta \delta a^{1/2}}, \quad p_1(\xi) = \frac{\rho^{3/2} q_1(\rho)}{\theta \alpha a^{3/2}} = \frac{\rho^{3/2} \tilde{q}_1(\rho)}{\theta \beta a^{3/2}}$$

$$M_0(t) = \operatorname{sch} \frac{t}{2} K \left[\operatorname{sch} \frac{t}{2} \right] \left(t = \frac{x-\xi}{\lambda} \right) \quad (2.2)$$

$$M_1(t) = \left\{ \left[2 - \operatorname{sch}^2 \frac{t}{2} \right] K \left[\operatorname{sch} \frac{t}{2} \right] - 2E \left[\operatorname{sch} \frac{t}{2} \right] \right\} \left[\operatorname{sch} \frac{t}{2} \right]^{-1}$$

где $\operatorname{sch}(x)$ – гиперболический секанс. Тогда уравнения (1.11) можно переписать в виде

$$\int_{-1}^1 p_n(\xi) M_n \left(\frac{x-\xi}{\lambda} \right) d\xi = \pi \lambda \exp \left[\left(\frac{1}{2} + n \right) \frac{(1+x)}{\lambda} \right] \quad (n = 0, 1) \quad (2.3)$$

Важно отметить, что ядра $M_0(t)$ и $M_1(t)$ уравнений (2.3) могут быть представлены на основании выражений (2.2) и разложений полных эллиптических интегралов при значениях аргумента, близких к единице ([8], 8.113(3) и 8.114(3)), в одной и той же форме

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{2i} + \ln|t| \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^{2i} \quad (2.4)$$

где ряды абсолютно сходятся при $|t| < \pi$. Здесь для $M_0(t)$ имеем $a_0 = 2,079$; $a_1 = -0,1091$; $a_2 = 0,005352$; $b_0 = -1$; $b_1 = 0,06250$; $b_2 = -0,003581$ и для $M_1(t)$ имеем $a_0 =$

$= 0,07944$; $a_1 = 0,2857$; $a_2 = 0,004494$; $b_0 = -1$; $b_1 = -0,1875$; $b_2 = 0,0009766$. Таким образом, дальнейшее рассмотрение можно вести для единого уравнения

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) \left[\sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\frac{x-\xi}{\lambda} \right)^{2i} + \ln \left| \frac{x-\xi}{\lambda} \right| \sum_{i=0}^{\infty} b_i \left(\frac{x-\xi}{\lambda} \right)^{2i} \right] d\xi = \lambda \exp \left[\frac{\mu(1+x)}{\lambda} \right] \quad (2.5)$$

где $\varphi(\xi) = p_0(\xi)$, $\mu = 1/2$ в случае первого уравнения (2.3) и $\varphi(\xi) = p_1(\xi)$, $\mu = 3/2$ в случае второго уравнения (2.3).

При достаточно больших значениях безразмерного параметра λ ($\lambda > 2/\pi$), т.е. для относительно узкого кольца, асимптотическое решение интегрального уравнения (2.5) может быть построено по стандартной схеме, изложенной, например, в [3]. Приведем окончательные формулы:

$$\varphi(x) = \varphi_0(\lambda, x) + \lambda^{-2} \varphi_1(\lambda, x) + \lambda^{-4} \varphi_2(\lambda, x) + O(\lambda^{-6})$$

$$\varphi_0(\lambda, x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ \frac{P}{\pi} - [c_0 x Q_0 + 2c_1 Q_1 + 3c_2 x Q_1 + 4c_3 Q_2 + 5c_4 x Q_2 + 6c_5 Q_3] \right\}$$

$$\varphi_1(\lambda, x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ \frac{2P}{\pi} A\left(\frac{3}{2}\right) Q_1 - c_0 [A(1)x Q_0 + b_1 x Q_1] + c_1 b_1 \left(Q_1 - \frac{2}{3} Q_2 \right) - \right. \\ \left. - c_2 \left[\frac{3}{4} A\left(\frac{5}{4}\right) x Q_0 + \frac{1}{2} b_1 x Q_2 \right] + c_3 b_1 \left(\frac{3}{4} Q_1 - \frac{2}{5} Q_3 \right) \right\}$$

$$\varphi_2(\lambda, x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ \frac{4P}{\pi} \left[B\left(\frac{25}{12}\right) Q_2 + \frac{3}{2} B\left(\frac{13}{12}\right) Q_1 + \frac{1}{2} b_1 A\left(\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} Q_1 + \frac{1}{3} Q_2 \right) \right] - \right. \\ \left. - c_0 \left[\frac{3}{2} B\left(\frac{5}{6}\right) x Q_0 + 6B\left(\frac{19}{20}\right) x Q_1 + b_2 x Q_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[A\left(\frac{1}{2}\right) A\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{1}{2} b_1 A\left(\frac{11}{8}\right) \right] x Q_0 + b_1 A(1)x Q_1 + \frac{1}{6} b_1^2 x Q_2 \right] + \right. \\ \left. \left. + c_1 \left[3B\left(\frac{4}{3}\right) Q_1 + 2b_2 \left(Q_2 - \frac{1}{5} Q_3 \right) + b_1^2 \left(-\frac{3}{8} Q_1 + \frac{1}{3} Q_2 - \frac{1}{15} Q_3 \right) \right] \right\}$$

$$P = \pi \vartheta(\lambda) [\Theta(\lambda)]^{-1}$$

$$\vartheta(\lambda) = c_{-1} + \frac{1}{2} c_1 + \frac{3}{8} c_3 + \frac{15}{16} c_5 - \frac{1}{4\lambda^2} (c_1 + c_3) A\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{12\lambda^4} c_1 b_1 A\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{\lambda^4} c_1 B\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\Theta(\lambda) = \ln 2\lambda + a_0 + \frac{1}{\lambda^2} A(1) - \frac{1}{4\lambda^4} \left[A\left(\frac{3}{2}\right) \right]^2 + \frac{9}{4\lambda^4} B\left(\frac{7}{6}\right)$$

$$c_{-1} = \lambda + \mu + \frac{\mu^2}{2\lambda} + \frac{\mu^3}{6\lambda^2} + \frac{\mu^4}{24\lambda^3} + \frac{\mu^5}{120\lambda^4} + \frac{\mu^6}{720\lambda^5}$$

$$c_0 = \mu + \frac{\mu^2}{\lambda} + \frac{\mu^3}{2\lambda^2} + \frac{\mu^4}{6\lambda^3} + \frac{\mu^5}{24\lambda^4} + \frac{\mu^6}{120\lambda^5}$$

$$c_1 = \frac{\mu^2}{2\lambda} + \frac{\mu^3}{2\lambda^2} + \frac{\mu^4}{4\lambda^3} + \frac{\mu^5}{12\lambda^4} + \frac{\mu^6}{48\lambda^5}$$

$$c_2 = \frac{\mu^3}{6\lambda^2} + \frac{\mu^4}{6\lambda^3} + \frac{\mu^5}{12\lambda^4} + \frac{\mu^6}{36\lambda^5}, \quad c_3 = \frac{\mu^4}{24\lambda^3} + \frac{\mu^5}{24\lambda^4} + \frac{\mu^6}{48\lambda^5}$$

$$c_4 = \frac{\mu^5}{120\lambda^4} + \frac{\mu^6}{120\lambda^5}, \quad c_5 = \frac{\mu^6}{720\lambda^5}$$

$$Q_0 = -1, \quad Q_1 = -x^2 + \frac{1}{2}, \quad Q_2 = -x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}, \quad Q_3 = -x^6 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}$$

$$A(\gamma) = \alpha_1 + \gamma b_1 - b_1 \ln 2\lambda, \quad B(\gamma) = a_2 + \gamma b_2 - b_2 \ln 2\lambda \quad (2.6)$$

Далее по формулам (1.12) найдем действующие на штамп усилия

$$\frac{Q}{\theta b \delta} = \frac{2\pi}{\lambda} \exp\left(-\frac{2}{\lambda}\right) \left\{ P \left[1 + \frac{1}{2\lambda} + \frac{3}{16\lambda^2} + \frac{5}{96\lambda^3} + \frac{35}{3072\lambda^4} + \frac{21}{10240\lambda^5} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{32\lambda^4} A\left(\frac{3}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2\lambda}\right) \right] + \pi c_0 \left\langle \frac{1}{4\lambda} + \frac{1}{8\lambda^2} + \frac{5}{128\lambda^3} + \frac{7}{768\lambda^4} + \frac{7}{4096\lambda^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\lambda^3} A\left(\frac{5}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{8\lambda^2}\right) + \frac{1}{128\lambda^5} A\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2\lambda^5} \left[\frac{3}{2} B\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{3}{8} b_1 A\left(\frac{23}{18}\right) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} A\left(\frac{1}{2}\right) A\left(\frac{5}{4}\right) \right] \right\rangle + \pi c_1 \left(\frac{1}{32\lambda^2} + \frac{1}{64\lambda^3} + \frac{7}{1536\lambda^4} - \frac{b_1}{96\lambda^4} \right) + \pi c_2 \left[\frac{3}{16\lambda} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{64\lambda^2} + \frac{1}{32\lambda^3} + \frac{3}{16\lambda^3} A\left(\frac{4}{3}\right) \right] + \pi c_3 \frac{1}{32\lambda^2} + \pi c_4 \frac{5}{32\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^6}\right) \right\} \quad (2.7)$$

$$\frac{M_x}{\theta b^3 \beta} = \frac{M_y}{\theta b^3 \alpha} = \frac{\pi}{\lambda} \exp\left(-\frac{6}{\lambda}\right) \left\{ P \left[1 + \frac{3}{2\lambda} + \frac{27}{16\lambda^2} + \frac{45}{32\lambda^3} + \frac{945}{1024\lambda^4} + \frac{5103}{10240\lambda^5} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{9}{32\lambda^4} A\left(\frac{3}{2}\right) \left(1 + \frac{3}{2\lambda}\right) \right] + \pi c_0 \left\langle \frac{3}{4\lambda} + \frac{9}{8\lambda^2} + \frac{135}{128\lambda^3} + \frac{189}{256\lambda^4} + \frac{8505}{20480\lambda^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4\lambda^3} A\left(\frac{5}{4}\right) \left(1 + \frac{3}{2\lambda} + \frac{9}{8\lambda^2}\right) + \frac{27}{128\lambda^5} A\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{3}{2\lambda^5} \left[\frac{3}{2} B\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{3}{8} b_1 A\left(\frac{23}{18}\right) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} A\left(\frac{1}{2}\right) A\left(\frac{5}{4}\right) \right] \right\rangle + \pi c_1 \left(\frac{9}{32\lambda^2} + \frac{27}{64\lambda^3} + \frac{189}{512\lambda^4} - \frac{3b_1}{32\lambda^4} \right) + \pi c_2 \left[\frac{9}{16\lambda} + \right.$$

$$\left. + \frac{27}{32\lambda^2} + \frac{27}{32\lambda^3} + \frac{9}{16\lambda^3} A\left(\frac{4}{3}\right) \right] + \pi c_3 \frac{9}{32\lambda^2} + \pi c_4 \frac{15}{32\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^6}\right) \right\} \quad (2.8)$$

3. Перейдем к рассмотрению случая малых значений параметра λ , т.е. случая относительно широкого кольца. Здесь главный член асимптотики решения интегральных уравнений (1.11) при малых λ необходимо сконструировать из решений типа погранслоя, описывающих быструю изменчивость контактного давления в окрестности контуров $r = a$ и $r = b$, и проникающего (вырожденного) решения, справедливого вдали от контуров $r = a$ и $r = b$. Эта конструкция может иметь мультипликативный вид ([3, 5])

$$q_0(r) = \frac{4\theta\delta}{\pi^2 \sqrt{b^2 - r^2}} \left(\frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} + \arccos \frac{a}{r} \right), \quad \frac{Q}{\theta b \delta} = 4 \quad (3.1)$$

$$\frac{q_1(r)}{\alpha} = \frac{\tilde{q}_1(r)}{\beta} = \frac{8\theta r}{\pi^2 \sqrt{b^2 - r^2}} \left[\frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \left(1 - \frac{a^2}{3r^2} \right) + \arccos \frac{a}{r} \right], \quad \frac{M_y}{\theta b^3 \alpha} = \frac{M_x}{\theta b^3 \beta} = \frac{8}{3} \quad (3.2)$$

или аддитивный вид [3, 5]

$$q_0(r) = \frac{2\theta\delta}{\pi\sqrt{b^2-r^2}} \left(1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1+\varepsilon^2-2\eta^2}{1-\varepsilon^2} \right) + \frac{2\theta\delta}{\pi^2\sqrt{r^2-a^2}} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

$$\frac{Q}{\theta b \delta} = 4 \left(\frac{2}{\pi} \arccos \varepsilon + \frac{1}{\pi} \sqrt{1-\varepsilon^2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \quad (3.3)$$

$$\frac{q_1(r)}{\alpha} = \frac{\tilde{q}_1(r)}{\beta} = \frac{4\theta r}{\pi\sqrt{b^2-r^2}} \left(1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1+\varepsilon^2-2\eta^2}{1-\varepsilon^2} \right) +$$

$$+ \frac{4\theta r}{\pi^2\sqrt{r^2-a^2}} \left[\ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} + \frac{b^2}{r^2} \left(\frac{1-\varepsilon^2}{2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \varepsilon \right) \right]$$

$$\frac{M_y}{\theta b^3 \alpha} = \frac{M_x}{\theta b^3 \beta} = \frac{8}{3} \left[\frac{2}{\pi} \arccos \varepsilon - \frac{1}{2\pi} \varepsilon \sqrt{1-\varepsilon^2} + \frac{1}{4\pi} (5+\varepsilon^2) \sqrt{1-\varepsilon^2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right] \quad (3.4)$$

В (3.3) и (3.4) введены обозначения $\varepsilon = a/b$ и $\eta = a/r$, выражения для Q , M_y и M_x получены в соответствии с формулами (1.12)

Если наклон штампа вызван внецентренно приложенной силой Q , как это показано на фигуре, а первоначальный наклон его отсутствовал, то на базе формул (2.6), (2.7) или (3.1), (3.2) или (3.3), (3.4) можно сформулировать условие безотрывности его подошвы от основания. Например, с помощью формул (3.1), (3.2) при $\beta = 0$, $M_x = 0$ и $\tilde{q}_1(r) \equiv 0$ найдем

$$e \leq b \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \arccos \varepsilon \right) \left[\frac{\varepsilon(3-\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + 3 \arccos \varepsilon \right]^{-1} \quad (3.5)$$

где e – эксцентриситет приложения силы Q (расстояние до нее от оси симметрии штампа).

4. Более подробно опишем еще один способ построения асимптотического при малых λ решения задачи, который был намечен в [4].

Будем исходить из интегральных уравнений (2.3). Заметим, что ядра $M_m(t)$ ($m = 0, 1$) этих уравнений в силу (1.8) можно записать в форме

$$M_m(t) = \int_0^\infty \frac{L_m(s)}{s} \cos st ds \quad (4.1)$$

Если далее представить мероморфную функцию $L_m(s)$ в виде суммы главных значений [10], то затем можно получить для ядер еще такое разложение:

$$M_m(t) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1+2m)!!(2n-1)!!}{(2n+2m)!!(2n)!!} \exp \left[- \left(2n+m+\frac{1}{2} \right) |t| \right] \quad (4.2)$$

Рассмотрим сначала первое уравнение (2.3). Можно убедиться, что сумма функций $\zeta_1[(1+x)/\lambda]$ и $\zeta_2[(1-x)/\lambda]$, доставляющих решение системе интегральных уравнений

$$\int_{-1}^{\infty} \zeta_1 \left(\frac{1+\xi}{\lambda} \right) M_0 \left(\frac{x-\xi}{\lambda} \right) d\xi = \int_{-\infty}^{-1} \zeta_2 \left(\frac{1-\xi}{\lambda} \right) M_0 \left(\frac{x-\xi}{\lambda} \right) d\xi \quad (-1 \leq x < \infty) \quad (4.3)$$

$$\int_{-\infty}^1 \zeta_2 \left(\frac{1-\xi}{\lambda} \right) M_0 \left(\frac{x-\xi}{\lambda} \right) d\xi = \pi \lambda \exp \left(\frac{1+x}{2\lambda} \right) + \int_1^{\infty} \zeta_1 \left(\frac{1+\xi}{\lambda} \right) M_0 \left(\frac{x-\xi}{\lambda} \right) d\xi \quad (-\infty < x \leq 1)$$

будет также решением первого уравнения (2.3), т.е.

$$p_0(x) = \zeta_1\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) + \zeta_2\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) \quad (4.4)$$

Таким образом, проблема сводится к нахождению асимптотического при малых λ решения системы уравнений (4.2).

Очевидными заменами переменных уравнениям (4.3) можно придать форму

$$\int_0^{\infty} \zeta_1(\tau) M_0(t-\tau) d\tau = \int_{2/\lambda}^{\infty} \zeta_2(\tau) M_0\left(t+\tau-\frac{2}{\lambda}\right) d\tau \quad (0 \leq t < \infty) \quad (4.5)$$

$$\int_0^{\infty} \zeta_2(\tau) M_0(t-\tau) d\tau = \pi e^{1/\lambda} e^{-t/2} + \int_{2/\lambda}^{\infty} \zeta_1(\tau) M_0\left(t+\tau-\frac{2}{\lambda}\right) d\tau, \quad (0 \leq t < \infty)$$

По смыслу задачи $\zeta_1(t) \sim e^{-\kappa t}$, $\kappa > 0$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому интеграл в правой части второго уравнения (4.5) при малых λ экспоненциально мал и им можно в нулевом (главном) приближении пренебречь по сравнению с первым членом указанной правой части. Тогда для определения $\zeta_2(t)$ имеем интегральное уравнение Винера–Хопфа [11], причем функция $L_0(s)$ вида (1.8) легко факторизуется. В результате имеем [4]

$$\zeta_2(t) = 2\pi^{-1} e^{1/\lambda} e^{-3t/2} (1 - e^{-2t})^{-1/2} \quad (4.6)$$

Подставляя (4.6) в первое уравнение (4.5) и вычисляя с помощью разложения (4.2) интеграл в правой части, вновь приходим к интегральному уравнению Винера–Хопфа относительно функции $\zeta_1(t)$

$$\int_0^{\infty} \zeta_1(\tau) M_0(t-\tau) d\tau = e^{-2/\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{1}{n+1} e^{-t(2n+1/2)} \quad (0 \leq t < \infty) \quad (4.7)$$

Решение его имеет вид [4]

$$\zeta_1(t) = \frac{2}{\pi^2} e^{-2/\lambda} e^{-3t/2} (1 - e^{-2t})^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(n+1)(2n)!!} F\left(-n, 1, \frac{1}{2}, 1 - e^{-2t}\right) \quad (4.8)$$

Таким образом, главный член асимптотики решения первого интегрального уравнения (2.3) при малых λ дается формулами (4.4), (4.6) и (4.8).

По первой формуле (1.12) найдем

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\theta b \delta} = & \frac{2\pi}{\lambda} e^{-2/\lambda} \int_{-1}^1 p_0(\xi) e^{(1+\xi)/2\lambda} d\xi = 4 \left[\sqrt{1-\varepsilon^2} + \frac{1}{\pi} \varepsilon^2 \arccos \varepsilon + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \varepsilon^3 \sqrt{1-\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(n+1)(2n)!!} F\left(-n+1, 1, \frac{3}{2}, 1-\varepsilon^2\right) \right] \quad (4.9) \end{aligned}$$

Здесь было использовано соотношение [12]

$$\int (1-x)^{-1/2} x^{-1/2} F\left(-n, 1, \frac{1}{2}, x\right) dx = 2x^{1/2} (1-x)^{1/2} F\left(-n+1, 1, \frac{3}{2}, x\right) \quad (4.10)$$

Совершенно аналогичным образом может быть построен при малых λ главный член асимптотики решения второго интегрального уравнения (2.3)

$$p_1(x) = \zeta_1\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) + \zeta_2\left(\frac{1-x}{\lambda}\right), \quad \zeta_2(t) = 4\pi^{-1} e^{3/\lambda} e^{-5t/2} (1 - e^{-2t})^{-1/2}$$

$$\zeta_1(t) = \frac{4}{\pi^2} e^{-2/\lambda} e^{-5t/2} (1 - e^{-2t})^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(n+2)(2n)!!} F\left(-n, 1, \frac{1}{2}, 1 - e^{-2t}\right)$$

$$\frac{M_y}{\theta b^3 \alpha} = \frac{M_x}{\theta b^3 \beta} = \frac{8}{3} \left[\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{3}{4\pi} \varepsilon^4 \arccos \varepsilon + \right. \quad (4.11)$$

$$\left. + \frac{3}{2\pi} \varepsilon^5 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(n+2)(2n)!!} F\left(-n+1, 1, \frac{3}{2}, 1 - \varepsilon^2\right) \right]$$

В заключение приведем некоторые численные результаты для величин $g_1 = Q/(\theta b \delta)$ и $g_2 = M_y/(\theta b^2 \alpha) = M_x/(\theta b^3 \beta)$, полученные по ряду приведенных в работе формул:

λ	$1/2$	1	2	4	8
$g_1(2.7)$		3,99	3,97	3,86	3,63
$g_1(3.1)$	4,00	4,00	4,00		
$g_1(3.3)$	4,00	4,00	3,96		
$g_1(4.9)$	4,00	4,00	3,96		
$g_2(2.8)$			2,64	2,64	2,53
$g_2(3.2)$	2,67	2,67	2,67	2,67	
$g_2(3.4)$	2,67	2,67	2,66	2,63	
$g_2(4.11)$	2,67	2,67	2,66	2,64	

Видно, что смыкание асимптотических при больших и малых λ решений первого уравнения (1.11) происходит при $\lambda \in [1, 2]$, а второго и третьего уравнений (1.11) – при $\lambda \in [2, 4]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-00181-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М. Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство // Инж. журн. МТГ. 1967. № 4. С. 108–116.
2. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.
3. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
4. Моссаковский В.И., Губенко В.С. О давлении кольцевого штампа на упругое полупространство // Науч. зап. Днепропетр. ун-та. 1956. Т. 45. С. 171–175.
5. Бородачев Н.М., Бородачева Ф.Н. Вдавливание кольцевого штампа в упругое полупространство // Инж. журн. МТГ. 1966. № 4. С. 158–161.
6. Бородачева Ф.Н. Действие вертикальной внецентренной силы на кольцевой фундамент, расположенный на сжимаемом основании // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1968. № 1. С. 20–22.
7. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
9. Бейтмен Г., Эрдейн А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.
10. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
11. Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
12. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.XI.1994