

УДК 539.3

© 1996 г. Ю.И. Виноградов, Г.Б. Меньков

**ПОСТРОЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ
ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ТЕОРИИ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК**

Строится линейно независимая при вычислениях на ЭВМ фундаментальная система решений (ФСР) обыкновенных дифференциальных уравнений деформирования слоистых ортотропных конических оболочек. Полученная ФСР позволяет аналитически решать краевые задачи для оболочек с произвольными параметрами.

Многие аналитически полученные ФСР для тонкостенных элементов конструкций и аналитические алгоритмы решения краевых задач перестали использоваться, так как при вычислениях на ЭВМ эти ФСР оказываются практически линейно зависимыми, и счет становится неустойчивым. Причина неустойчивости вычислений в данном случае заключается в том, что среди интегралов рассматриваемых дифференциальных уравнений есть быстроизменяющиеся функции. Если в каждое решение или какую-то часть ФСР войдут одна или несколько быстро возрастающих функций, то они будут доминировать при больших значениях аргумента, и такая ФСР станет практически линейно зависимой, а матрица системы линейных алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных из граничных условий – плохо обусловленной.

Поскольку для одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений существуют различные ФСР, возникает задача построения такой ФСР, которая при счете остается линейно независимой для произвольных параметров тонкостенных элементов. Эта задача решается ниже для конической оболочки.

Для изотропных конических оболочек при неосесимметричном нагружении построены решения [1] в специальных функциях для обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных после разделения переменных методом Фурье. Для нулевой гармоники разложения, т.е. при осесимметричной деформации, и для первой гармоники, то есть при антисимметричной деформации, для оболочек постоянной толщины решения были выражены [1] через хорошо изученные функции Томсона первого и второго рода, применение которых удобно в силу двух обстоятельств. Во-первых, при любых параметрах конической оболочки для вычисления функций Томсона достаточно всего двух методов: при малых значениях независимой переменной можно использовать степенные ряды или разложения по ортогональным полиномам, а при больших значениях переменной – асимптотические разложения в окрестности бесконечно удаленной точки. Как правило, область применения этих методов ограничена, но в данном случае их сочетание обеспечивает достаточную точность при любых значениях независимой переменной. Во-вторых, ФСР обыкновенных дифференциальных уравнений, построенная с помощью функций Томсона, линейно независима в окрестности бесконечно удаленной точки и допускает функциональное нормирование, предложенное авторами [2]. Поэтому для расчета напряженно-деформированного состояния осесимметрично и антисимметрично деформируемой изотропной конической оболочки постоянной толщины достаточно лишь нормировать решение [1], и тогда оно может быть использовано практически при любых геометрических параметрах оболочки.

Решение задачи для других гармоник, т.е. при циклической деформации конической изотропной оболочки постоянной толщины, было выражено [1] через обобщенные гипергеометрические функции. Построенная таким образом ФСР пригодна для вычислений только в окрестности вершины оболочки – при малых значениях независимой переменной. При больших же ее значениях, имеющих место в практических задачах, воспользоваться этой системой решений не удастся из-за упомянутого выше доминирования быстро возрастающих решений.

Рассмотрим вопрос выбора ФСР разрешающего уравнения задачи о циклической деформации конической оболочки и применим полученные результаты к более общему случаю – слоистой ортотропной оболочке.

После разделения переменных в уравнениях статики имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений [3]. Следуя [1], выполним их комплексное преобразование и получим одно разрешающее уравнение четвертого порядка

$$\left\{ \delta^4 + 2\delta^3 + \delta^2 [1 - \xi^2 (1 + D_\Delta)] - 2\xi^2 D_\Delta \delta + D_\Delta \frac{k^2 - 1}{k^2} \xi^4 - z(\delta^2 + 3\delta + 2) \right\} N(z) = 0 \quad (1)$$

$$\delta = z \frac{d}{dz}, \quad D_\Delta = \frac{D_{22}}{D_{11}}, \quad \xi = \frac{k}{\sin \gamma}$$

$$z = is \operatorname{ctg} \gamma \sqrt{\frac{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} D_{11}}} \quad (2)$$

где $N(z)$ – искомая функция, z – новая переменная, C_{ij}, D_{ij} – обобщенные жесткости слоистого материала, s – длина меридиана, отсчитываемая от вершины срединной поверхности, γ – угол между меридианом и осью срединной поверхности, k – номер члена ряда Фурье в разложении по окружной координате.

Представим уравнение (1) в виде [4]

$$\left[(-1)^\tau z \prod_{j=1}^p (\delta - a_j + 1) - \prod_{j=1}^q (\delta - b_j) \right] N(z) = 0,$$

$$\tau = 0, \quad p = 2, \quad q = 4, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -1 \quad (3)$$

Параметры b_j ($j = 1, \dots, 4$) – корни определяющего для (1) уравнения. Было показано [1], что для изотропной оболочки параметры b_j – действительные величины. В случае слоистой ортотропной оболочки они, как правило, комплексные.

Уравнение (3) имеет регулярную особую точку $z = 0$ и иррегулярную особую точку $z = \infty$. Его интегралы могут быть выражены через обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_pF_q(\alpha_p; \rho_q | z)$ и функцию Мейера $G_{p,q}^{m,n}(z | a_p; b_q)$. Обозначения этих функций записаны в сокращенном виде: принято при перечислении параметров писать, например, b_q вместо b_1, b_2, \dots, b_q ; аналогично в дальнейшем $\Gamma(a_p + k)$ будет означать

$$\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j + k) \text{ и т.д.}$$

Решение, приведенное в [1], использует ФСР в окрестности точки $z = 0$. В рассматриваемом здесь случае аналогичную систему функций составляют

$$N_h(z) = \exp(i\pi b_h) G_{2,4}^{1,2} \left(z \exp(-i\pi) \left| \begin{matrix} a_p \\ b_h, b_1, \dots, b_{h-1}, b_{h+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \\ = \frac{\Gamma(1 + b_h - a_p)}{\Gamma(1 + b_h - b_q)} z^{b_h} {}_2F_3 \left(\begin{matrix} 1 + b_h - a_p \\ 1 + b_h - b_q^* \end{matrix} \middle| z \right), \quad h = 1, \dots, 4 \quad (4)$$

Здесь и далее звездочка означает, что член $1 + b_h - b_q$ опускается, если $h = q$.

В (2) под радикалом стоит отношение изгибной жесткости оболочки к мембранной жесткости, т.е. величина, пропорциональная квадрату толщины оболочки h . Поэтому модуль переменной z пропорционален отношению s/h и может быть весьма большим. При таких значениях переменной для анализа поведения рассматриваемых специальных функций удобно использовать их асимптотические разложения в окрестности бесконечно удаленной точки.

Для функции ${}_2F_3(\alpha_p; \rho_q|z)$ разложение при $|z| \rightarrow \infty$ имеет вид [4]

$${}_2F_3\left(\begin{matrix} \alpha_p \\ \rho_q \end{matrix} \middle| z\right) \sim \frac{\Gamma(\rho_q)}{\Gamma(\alpha_p)} \{K_{2,3}(z) + K_{2,3}(ze^{i2\pi}) + L_{2,3}(ze^{i\pi})\} \quad (5)$$

$$-3\pi + \delta \leq \arg z \leq \pi - \delta, \quad \delta > 0$$

При $|z| \rightarrow \infty$ функция $K_{2,3}(z)$ экспоненциально стремится к бесконечности, $K_{2,3}(ze^{i2\pi})$ экспоненциально стремится к нулю, изменение $L_{2,3}(ze^{i\pi})$ имеет алгебраический характер. Следовательно, $K_{2,3}(z)$ будет доминирующей функцией, т.е. при больших значениях переменной $K_{2,3}(ze^{i2\pi})$ и $L_{2,3}(ze^{i\pi})$ пренебрежимо малы по сравнению с $K_{2,3}(z)$. Далее, из процедуры [5] определения коэффициентов асимптотических рядов $K_{p,q}(z)$ следует, что для всех решений из (4) выражения $z^{b_h} K_{p,q}(z)$ являются одной и той же величиной. В итоге получается, что при больших значениях переменной решения (4) практически отличаются друг от друга лишь на постоянный множитель, и данная ФСР с очень высокой степенью точности оказывается линейно зависимой.

Указанного недостатка нет у ФСР, построенной в окрестности иррегулярной особой точки $z = \infty$. Следуя [4], составим эту систему решений.

Введем обозначения

$$\sigma = q - p = 2; \quad \varepsilon = 1; \quad \nu = q - p - \tau = 2 \quad (6)$$

Выберем такие целые числа λ и ω , что

$$|\arg z + (\nu - 2\lambda + 1)\pi| < (\sigma/2 + 1)\pi$$

$$|\arg z + (\nu - 2\psi)\pi| < (\sigma + \varepsilon)\pi, \quad \psi = \omega, \omega + 1, \dots, \omega + \sigma - 1$$

Этим условиям удовлетворяют $\lambda = 1$, $\omega = 0$ и два значения ψ : 0 и 1. Тогда ФСР уравнения (3) может быть составлена из следующих функций:

1°. Две функции

$$G_{p,q}^{q,0}\left(z \exp[i\pi(\nu - 2\psi)] \middle| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right)$$

соответствующие $\psi = 0$ и $\psi = 1$, т.е.

$$G_{2,4}^{4,0}\left(z \middle| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right) \quad \text{и} \quad G_{2,4}^{4,0}\left(ze^{2i\pi} \middle| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right) \quad (7)$$

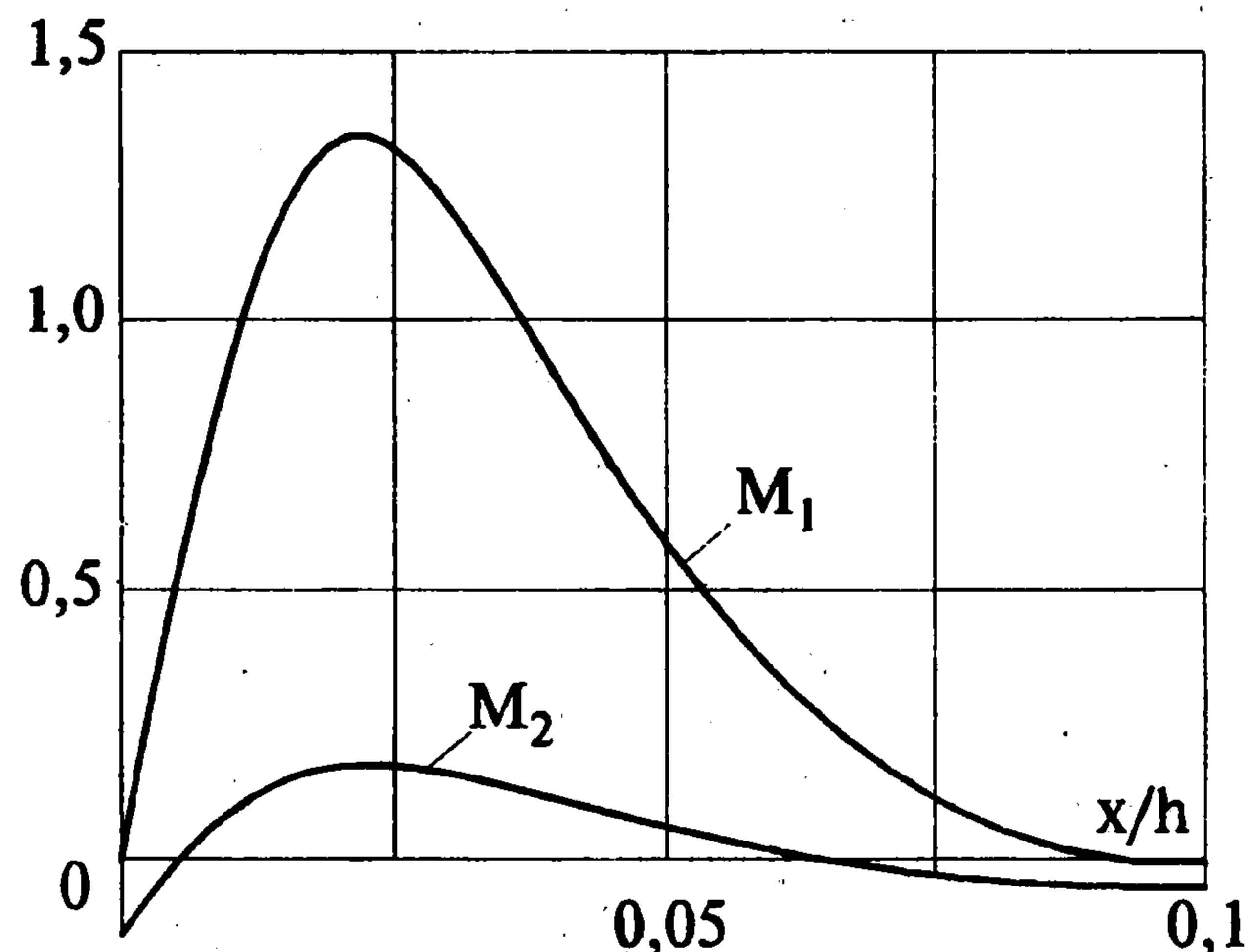
Асимптотические ряды [4, 5] для этих решений с точностью до множителя равны $z^{b_h} K_{2,3}(z)$ и $z^{b_h} K_{2,3}(ze^{i2\pi})$ соответственно (b_h — любой из параметров b_1, \dots, b_q), т.е. одна из этих функций при $|z| \rightarrow \infty$ стремится к нулю, а другая — к бесконечности.

2°. Поскольку параметры a_1 и a_2 отличаются друг от друга на целое число, то в ФСР может войти только одна из двух функций

$$G_{p,q}^{q,1}\left(z \exp[i\pi(\nu - 2\lambda + 1)] \middle| \begin{matrix} a_t, a_1, \dots, a_{t-1}, a_{t+1}, \dots, a_p \\ b_q \end{matrix}\right), \quad t = 1, \dots, p \quad (8)$$

например, соответствующая $t = 2$

$$G_{2,4}^{4,1}\left(ze^{i\pi} \middle| \begin{matrix} a_2; a_1 \\ b_q \end{matrix}\right) \quad (9)$$



Ее асимптотическое разложение в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$G_{2,4}^{4,1} \left(ze^{i\pi} \left| \begin{matrix} a_2; a_1 \\ b_q \end{matrix} \right. \right) \sim \frac{z^{a_2-1} \Gamma(1+b_q-a_2)}{\Gamma(1+a_p-a_2)} {}_4F_1 \left(\begin{matrix} 1+b_q-a_2 \\ 1+a_p-a_2^* \end{matrix} \left| \frac{1}{z} \right. \right) \quad (10)$$

Для определения другой функции существует громоздкая процедура, описанная в [5]. В результате получается решение, обладающее в бесконечно удаленной точке логарифмической особенностью. Однако удобнее найти необходимое решение, рассмотрев асимптотическое разложение (5). Входящая в эту формулу функция $L_{r,s}(z)$ определяется как

$$L_{r,s}(z) \sim \sum_{t=1}^r \frac{z^{\alpha_t-1} \Gamma(\alpha_t) \Gamma(\alpha_r - \alpha_t)^*}{\Gamma(\rho_s - \alpha_t)} {}_{s+1}F_{r-1} \left(\begin{matrix} \alpha_t, 1+\alpha_t - \rho_s \\ 1+\alpha_t - \alpha_r^* \end{matrix} \left| \frac{(-1)^{s-r}}{z} \right. \right) \quad (11)$$

Если применить разложение (5) для вычисления функций (4), то видно, что в полученное выражение входят с некоторыми коэффициентами асимптотические ряды для трех уже построенных решений (7) и (9). В (5) есть и четвертое слагаемое, соответствующее $t=1$ в (11). Его нужно вычислять с помощью предельного перехода [4], так как a_1 и a_2 отличаются друг от друга на целое число. В результате получается логарифмическое решение.

Исходя из этих соображений, выберем, в качестве четвертого решения искомой ФСР

$$N_1(z) - N_2(z) \quad (12)$$

или разность любых других функций из (4). Как видно из (4) и (5), асимптотическое разложение для (12) не содержит доминирующей функции $K_{2,3}(z)$ и практически является линейной комбинацией (10) и (11), так как величина $K_{2,3}(ze^{i2\pi})$ пренебрежимо мала по сравнению с $L_{2,3}(z^{i\pi})$. Поскольку в (10) и (11) входят медленно изменяющиеся функции, то использование (12) в вычислениях не встречает принципиальных трудностей.

Итак, (7), (9) и (12) составляют удобную для вычислений ФСР уравнения (3). Можно показать, что эта система функций линейно независима. Ее функциональное нормирование аналогично предложенному авторами [2]: в качестве нормирующего множителя для возрастающих по модулю функций нужно взять их значения на правом торце оболочки, а для убывающих функций – на левом. Тогда при опре-

делении произвольных постоянных матрица системы линейных алгебраических уравнений будет хорошо обусловленной для сколь угодно больших длин конической оболочки.

Естественно, полученное решение оказывается эффективнее методов прогонки, так как не приводит ни к увеличению порядка рассматриваемой системы, ни к разбиению оболочки на отдельные участки, ни к использованию дополнительных вычислительных процедур типа непрерывной или дискретной ортогонализации решений [6, 7].

В качестве примера практического применения данного метода рассмотрим изотропную коническую оболочку, заделанную в торце большего радиуса ($R_2/h = 1500$). На свободном торце ($R_1/h = 1000$) приложена нагрузка, распределенная по дуге в 2° и направленная к оси оболочки. Длина оболочки $x_{\max}/h = 1000$ (x – расстояние по оси оболочки, отсчитываемое от левого торца; h – толщина оболочки). На фигуре показан график изменения моментов M_1 и M_2 вдоль образующей в зоне приложения нагрузки. Результаты представлены в безразмерной форме (в долях произведения интенсивности нагрузки на толщину оболочки). Пример демонстрирует устойчивость вычислений и перспективность использования аналитического метода решения краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко А.Д., Григоренко Я.М., Ильин Л.А. Теория тонких конических оболочек и ее приложение в машиностроении. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. 287 с.
2. Виноградов Ю.И., Меньков Г.Б. Функциональное нормирование при решении краевых задач для цилиндрических оболочек // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 1. С. 91–94.
3. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение задач теории оболочек на ЭВМ. Киев: Вища школа, 1979. 279 с.
4. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980. 608 с.
5. Luke Y.L. The Special Functions and their Approximations. New York; London: Acad. Press, 1969. V. 1. 349 p. V. 2. 485 p.
6. Абрамов А.А. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1. № 3. С. 542–545.
7. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171–173.

Москва

Поступила в редакцию
22.XII.1994