УДК 539.3:534.1

© 1996 г. С.В. Колесников

УТОЧНЕННАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ОСНОВАННАЯ НА РАЗЛОЖЕНИИ НОРМАЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В РЯД

Рассматривается уточненная теория колебаний многослойной ортотропной цилиндрической оболочки, основанная на методе гипотез [1, 2] и разложении нормального перемещения в ряд по толщине оболочки [3]. Направленность результатов на использование в реальных конструкциях определяет совокупность выбранных гипотез.

Для прикладных задач необходима теория, позволяющая описывать с единых позиций волновой процесс как в двух пространственных направлениях вдоль поверхности оболочки, так и в одном направлении вдоль полосы, вырезанной из этой оболочки.

Цель работы – построить теорию колебаний цилиндрической оболочки и полосы конечных размеров, в которой учитывается поперечная деформация и возможность возбуждения волновых процессов, создаваемых этим эффектом.

Непосредственное использование известных работ для решения поставленной задачи не представляется возможным из-за противоречий, заключенных в методах решения. Одно из противоречий заключается в том, что известный метод [3] исходит из представления нормального перемещения в виде ряда по толщине плоской оболочки и полученное решение описывает колебания в одном пространственном направлении. В работе [3] нет ответа на то, как применять ее результаты для описания распространения волновых процессов в двух пространственных направлениях в криволинейных оболочках. С другой стороны, метод решения [1] использует только нулевой член в разложении в ряд нормального перемещения оболочки и описывает распространение волнового процесса в двух пространственных направлениях. При этом полученные общие уравнения движения содержат в себе противоречие, которое хорошо видно при их использовании для плоских оболочек. Уравнения движения плоской оболочки ([2], с. 238) допускают возможность возбуждения колебаний внешней симметричной нагрузкой при отсутствии поперечной деформации и антисимметричных колебаний, чего физически быть не должно.

Устранение указанных противоречий в данной работе позволяет получить расширенную систему уравнений С.А. Амбарцумяна для описания волновых процессов в оболочках конечных размеров.

Рассматривается цилиндрическая жесткая оболочка, составленная из нечетного числа $(2m + 1)$ ортотропных слоев, симметрично расположенных относительно среднего слоя, которому условно присвоен номер нуль ($i = 0$). Слоям выше среднего слоя присваиваем положительные значения номера от $i = 1$ до $i = m$, а слоям ниже среднего слоя – отрицательные значения номера от $i = -1$ до $i = -m$. Слои, симметрично расположенные относительно среднего слоя, имеют одинаковые толщины и упругие параметры.

Направления ортогональной системы координат α, β, γ совмещены с главными направлениями анизотропии упругого материала. Начало координат находится на середине толщины, ширины и длины многослойной оболочки. Под координатой α подразумеваем центральный угол поперечной дуги, отсчитываемый от некоторой начальной прямолинейной образующей, а под координатной β – длину образующей. При выбранных размерностях координат α и β для коэффициентов Ламе имеем

$$H_1 = R_c(1 + k\gamma), \quad H_2 = 1, \quad k = 1/R_c$$

Здесь R_c – радиус кривизны цилиндрической поверхности – срединной поверхности.

Используются следующие гипотезы:

1) касательные напряжения по толщине оболочки меняются по заданным законам ([2], с. 46)

$$\tau_{\alpha\gamma i} = G_H \varphi f(\gamma), \qquad \varphi \equiv \varphi(\alpha,\beta,t)$$

$$\tau_{\beta\gamma i} = G_H \chi f(\gamma), \qquad \chi \equiv \chi(\alpha,\beta,t)$$

$$f(\gamma) = f(-\gamma), \qquad f(\gamma)\big|_{\gamma=\pm h} = 0$$

2) нормальное перемещение можно разложить в ряд по толщине оболочки [3]

$$U_{\gamma i} = \frac{1}{h}(R_c a\alpha + c\beta) + \sum_{j=0}^{2N+1} W_j\left(\frac{\gamma}{h}\right)^j, \qquad W_j = W_j(\alpha,\beta,t)$$

3) касательные перемещения срединной поверхности даются выражениями ([2], с. 33)

$$U_{\alpha 0}(\alpha,\beta,\gamma,t)\big|_{\gamma=0} = b + U, \qquad U \equiv U(\alpha,\beta,t)$$

$$U_{\beta 0}(\alpha,\beta,\gamma,t)\big|_{\gamma=0} = d + V, \qquad V \equiv V(\alpha,\beta,t)$$

4) оболочка нагружена по внешней и внутренней цилиндрическим поверхностям, а торцевые поверхности свободны от напряжений.

Здесь α, β, γ – ортогональные координаты, t – время, $2h$ – толщина многослойной оболочки, a, c – неизвестные углы поворота оболочки как единого целого, b, d – неизвестные перемещения оболочки как единого целого, $\tau_{\alpha\gamma i}$, $\tau_{\beta\gamma i}$ – касательные напряжения в i-м слое по соответствующим осям координат, $U_{\alpha i}$, $U_{\beta i}$, $U_{\gamma i}$ – перемещения, $f(\gamma)$ – заданная функция, характеризующая законы изменения касательных напряжений по толщине оболочки, φ, χ – неизвестные функции, W_j – неизвестная составляющая нормального перемещения в разложении в ряд по толщине оболочки, U, V – касательные перемещения срединной поверхности, создаваемые колебаниями оболочки, $2N + 1$ – число членов разложения, G_H – коэффициент, выбираемый из условий удобства нормировки формул.

Условия равновесия среды i-го слоя при гармонических колебаниях в цилиндрической системе координат представляются дифференциальными уравнениями ([1], с. 18)

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\alpha i,\alpha} + (H_1\tau_{\alpha\beta i})_{,\beta} + (H_1\tau_{\alpha\gamma i})_{,\gamma} + \tau_{\alpha\gamma i} + \rho_i\omega^2 H_1 U_{\alpha i} = 0\\
&\sigma_{\beta i,\beta} + \tau_{\beta\gamma i,\gamma} + \frac{1}{H_1}\tau_{\beta\gamma i} + \frac{1}{H_1}\tau_{\alpha\beta i,\alpha} + \rho_i\omega^2 U_{\beta i} = 0\\
&(H_1\sigma_{\gamma i})_{,\gamma} + \tau_{\alpha\gamma i,\alpha} + (H_1\tau_{\beta\gamma i})_{,\beta} + \rho_i\omega^2 H_1 U_{\gamma i} = 0
\end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь i – номер слоя (i меняется от $-m$ до m), ρ_i – плотность материала слоя, ω – круговая частота, $\sigma_{\alpha i}$, $\sigma_{\beta i}$, $\sigma_{\gamma i}$ – главные напряжения, $\tau_{\alpha\beta i}$ – сдвиговое напряжение. Гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ во всех формулах опущен.

При выводе уравнений движения учитывается, что для прикладных задач важна не точность описания волновых процессов в оболочках, а простота уравнений и точность получения сравнительных результатов между оболочками. Поэтому при использовании первого уравнения равновесия среды (1) пренебрегаем членами порядка $(kh)^2$ по сравнению с единицей ([1], с. 122), а при использовании второго уравнения (1) пренебрегаем во всех выражениях членами (kh) по сравнению с единицей. В качестве третьего условия равновесия среды в (1) использовано приближенное условие, в котором пренебрегаем слабым влиянием напряжения $\sigma_{\alpha i}$ на величину определямого нормального к оболочке напряжения $\sigma_{\gamma i}$.

В формулах (1) распространение волнового процесса вдоль центральной поперечной дуги описывается с большей точностью, чем вдоль образующей. Однако использование единого подхода при описании оболочек, имеющих одинаковую внутреннюю структуру, но разные волновые поверхностные размеры, позволяет получать в прикладных задачах правильные сравнительные результаты.

Подставив в третье условие равновесия (1) заданные законы изменения касательных напряжений и нормального к срединной поверхности перемещений, проинтегрировав результат по координате γ в пределах от γ_i до γ (координата γ находится внутри i-го слоя) и учитывая равенство нормальных напряжений на границах слоев, найдем выражение, из которого можно определить нормальную составляющую главного напряжения в любой точке многослойной оболочки

$$(1+k\gamma)\,\sigma_{\gamma i}=\sigma-G_H\left[JX_0(\gamma)\frac{1}{R_c}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+JZ_0(\gamma)\frac{\partial\chi}{\partial\beta}\right]-$$

$$-\omega^2 h\left[\frac{R_c a\alpha+c\beta}{h}\left(RZ_{i0}+\rho_i[I_{i0}(\gamma)+khI_{i1}(\gamma)]\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{2N+1}W_j\left(RZ_{ij}+\rho_i[I_{ij}(\gamma)+khI_{i,j+1}(\gamma)]\right)\right] \qquad (2)$$

$$I_{ij}(\gamma)=\frac{1}{h}\int_{\gamma_i}^{\gamma}\left(\frac{\gamma}{h}\right)^j d\gamma,\quad JZ_i(\gamma)=\int_{\gamma_i}^{\gamma}(1+k\gamma)\,f(\gamma)\,d\gamma$$

$$JZ_i(\gamma)=JX_i(\gamma)+khJY_i(\gamma),\quad RZ_{ij}\equiv RZ_{i,j}$$

$$RZ_{\pm s,j}=RZ_{\pm s\mp 1,j}+[I_{\pm s\mp 1,j}(\gamma_{\pm s})+khI_{\pm s\mp 1,j+1}(\gamma_{\pm s})]\,\rho_{\pm s\mp 1}$$

$$RZ_{\pm s,j}=RX_{\pm s,j}+khRY_{\pm s,j},\quad RZ_{0j}=0,\quad \gamma_0=0,\quad s=1,2,\ldots,m$$

Здесь σ – неизвестная постоянная интегрирования, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m+1}$ – координаты верхних границ слоев с номерами $0, 1, \ldots, m$, $\gamma_{-1}, \gamma_{-2}, \ldots, \gamma_{-m+1}$ – координаты нижних границ слоев с номерами $0, -1, \ldots, -m$. Величина RZ_{ij} вычисляется по рекурентной формуле, в которой используются верхние и нижние математические знаки. Верхние математические знаки соответствуют положительным значениям индекса i, а нижние – отрицательным значениям индекса.

Учитывая соотношения (2), четность функции $f(\gamma)$ и симметричность размещения слоев относительно среднего слоя, найдем уравнение равновесия оболочки с точностью (kh) по сравнению с единицей. Продифференцировав уравнение равновесия по координате α, найдем первое уравнение движения оболочки

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\sigma_H-\sigma_b)-\frac{kh}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\sigma_H+\sigma_b)=\frac{2}{3}G_H\left(\frac{1}{R_c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial\alpha\partial\beta}\right)+$$

$$+\omega^2 R_c[aRX_{m+1,0}+(\psi_0 RX_{m+1,0}+\ldots+\psi_{2N}RX_{m+1,2N})+$$

$$+kh(\psi_1 RY_{m+1,1}+\ldots+\psi_{2N+1}RY_{m+1,2N+1})],\quad \psi_j=\frac{h}{R_c}\frac{\partial W_j}{\partial\alpha} \qquad (3)$$

Продифференцировав уравнение равновесия по координате β и пренебрегая в нем членами (kh) по сравнению с единицей, найдем второе уравнение движения оболочки

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\beta}(\sigma_H-\sigma_b)=\frac{2}{3}G_H\left(\frac{1}{R_c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta^2}\right)+$$

$$+\omega^2[cRX_{m+1,0}+(\xi_0RX_{m+1,0}+\ldots+\xi_{2N}RX_{m+1,2N})]$$

$$\xi_j=h\frac{\partial W_j}{\partial\beta} \tag{4}$$

Здесь σ_H, σ_b – нормальные напряжения на нижней и верхней границах многослойной оболочки, ψ_j, ξ_j – неизвестные составляющие углов поворота по соответствующим осям координат в разложении в ряд по толщине оболочки.

Напряженное состояние ортотропной среды i-го слоя определяется полуобратным методом теории упругости из закона Гука ([1], с. 16) и при этом не используется уравнение, которое определяет нормальную деформацию

$$\sigma_{\alpha i}=B_{11}^ie_{\alpha i}+B_{12}^ie_{\beta i}+A_1^i\sigma_{\gamma i}$$

$$\sigma_{\beta i}=B_{21}^ie_{\alpha i}+B_{22}^ie_{\beta i}+A_2^i\sigma_{\gamma i} \tag{5}$$

$$\tau_{\alpha\gamma i}=G_{1i}e_{\alpha\gamma i},\quad \tau_{\beta\gamma i}=G_{2i}e_{\beta\gamma i},\quad \tau_{\alpha\beta i}=G_{3i}e_{\alpha\beta i}$$

$$B_{11}^i=E_1^i/\Delta,\quad B_{22}^i=E_2^i/\Delta,\quad B_{12}^i=\nu_{12}^iE_1^i/\Delta,\quad B_{12}^i=B_{21}^i$$

$$A_1^i=\frac{E_1^i}{E_3^i}\frac{\nu_{13}^i+\nu_{12}^i\nu_{23}^i}{\Delta},\quad A_2^i=\frac{E_2^i}{E_3^i}\frac{\nu_{23}^i+\nu_{13}^i\nu_{21}^i}{\Delta}$$

$$\Delta=1-\nu_{12}^i\nu_{21}^i$$

Здесь $e_{\alpha i}$, $e_{\beta i}$ – объемные деформации в i-м слое по соответствующим осям координат, $e_{\alpha\gamma i}$, $e_{\beta\gamma i}$, $e_{\alpha\beta i}$ – сдвиговые деформации, ν_{12}^i, ν_{13}^i, ν_{21}^i, ν_{23}^i – коэффициенты Пуассона, E_1^i, E_2^i, E_3^i – модули Юнга, G_{1i}, G_{2i}, G_{3i} – модули сдвига.

Из первых двух уравнений (5) видно, что коэффициенты A_1^i и A_2^i малы по сравнению с коэффициентами B_{11}^i, B_{12}^i, B_{22}^i и вклад нормальной составляющей напряжения в величины $\sigma_{\alpha i}$ и $\sigma_{\beta i}$ мал. Поэтому при определении величины $\sigma_{\gamma i}$ и постоянной интегрирования из уравнения (2) можно пренебречь членами более высокого порядка малости:

$$\sigma_{\gamma i}=\sigma-G_HJX_0(\gamma)\left(\frac{1}{R_c}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\chi}{\partial\beta}\right)-$$

$$-\omega^2h\left[\frac{R_ca\alpha+c\beta}{h})(RX_{i0}+I_{i0}(\gamma)\rho_i)+\sum_{j=0}^{2N+1}W_j(RX_{ij}+I_{ij}(\gamma)\rho_i)\right] \tag{6}$$

$$\sigma=\sigma_c+\omega^2h(W_1RX_{m+1,1}+\ldots+W_{2N+1}RX_{m+1,2N+1}),\quad \sigma_c=\frac{1}{2}(\sigma_H+\sigma_b)$$

Решая четвертое и пятое уравнение (5), получим выражения для касательных перемещений в любой точке многослойной оболочки, пренебрегая членами $(kh)^2$ по сравнению с единицей:

$$U_{\alpha i}=(1+k\gamma)(b+U)-a[(1+k\gamma)I_{00}(\gamma)-2khI_{01}(\gamma)]-$$

$$-\sum_{j=0}^{2N+1}[(1+k\gamma)I_{0j}(\gamma)-2khI_{0,j+1}(\gamma)]\psi_j+\varphi\left[(1+k\gamma)\left(AX_i+JX_i(\gamma)\frac{1}{g_{1i}}\right)+\right.$$

$$\left.+kh\left(AY_i-JY_i(\gamma)\frac{1}{g_{1i}}\right)\right]$$

$$U_{\beta i}=d+V-cI_{00}(\gamma)-\sum_{j=0}^{2N+1}\xi_j I_{0j}(\gamma)+\chi\left(BZ_i+JX_i(\gamma)\frac{1}{g_{2i}}\right) \tag{7}$$

$$AZ_0=0,\quad AZ_{\pm s}=AX_{\pm s}+khAY_{\pm s},\quad s=1,2,\dots,m$$

$$AZ_{\pm s}=AZ_{\pm s\mp 1}+[JX_{\pm s\mp 1}(\gamma_{\pm s})-khJY_{\pm s\mp 1}(\gamma_{\pm s})]\frac{1}{g_{1i}}$$

$$BZ_0=0,\quad BZ_{\pm s}=BZ_{\pm s\mp 1}+JX_{\pm s\mp 1}(\gamma_{\pm s})\frac{1}{g_{2i}}$$

$$g_{ni}=\frac{G_{ni}}{G_H},\quad n=1,2$$

Относительные деформации i-го слоя оболочки по соответствующим осям координат определяются формулами ([1], с. 18)

$$e_{\alpha i}=\frac{1}{H_1}(U_{\alpha i,\alpha}+U_{\gamma i}),\quad e_{\beta i}=U_{\beta i,\beta} \tag{8}$$

$$e_{\alpha i}=\frac{1}{R_c}\frac{\partial U}{\partial\alpha}-\sum_{j=0}^{2N+1}(I_{0j}(\gamma)-2khI_{0,j+1}(\gamma))\frac{1}{R_c}\frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha}+$$

$$+\frac{1}{R_c}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}-\left[AX_i+JX_i(\gamma)\frac{1}{g_{1i}}+kh\left(AY_i-JY_i(\gamma)\frac{1}{g_{1i}}\right)\right]+$$

$$+\frac{(1-k\gamma)}{R_c}\left(\frac{R_c a\alpha+c\beta}{h}+\sum_{j=0}^{2N+1}W_j\left(\frac{\gamma}{h}\right)^j\right)$$

$$e_{\beta i}=\frac{\partial V}{\partial\beta}-\sum_{j=0}^{2N+1}I_{0j}(\gamma)\frac{\partial\xi_j}{\partial\beta}+\frac{\partial\chi}{\partial\beta}\left(BZ_i+JX_i(\gamma)\frac{1}{g_{2i}}\right)$$

Сдвиговая деформация i-го слоя оболочки ([1], с. 18) равна

$$e_{\alpha\beta i}=U_{\alpha i,\beta}+\frac{1}{H_1}U_{\beta i,\alpha} \tag{9}$$

$$e_{\alpha\beta i}=(1+k\gamma)\frac{\partial U}{\partial\beta}-\sum_{j=0}^{2N+1}[(1+k\gamma)I_{0j}(\gamma)-2khI_{0,j+1}(\gamma)]\frac{\partial\psi_j}{\partial\beta}+$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\left[(1+k\gamma)\left(AX_i+JX_i(\gamma)\frac{1}{g_{1i}}\right)+kh\left(AY_i-JY_i(\gamma)\frac{1}{g_{1i}}\right)\right]+$$

$$+\frac{(1-k\gamma)}{R_c}\left[\frac{\partial V}{\partial\alpha}-\sum_{j=0}^{2N+1}I_{0j}(\gamma)\frac{\partial\xi_j}{\partial\alpha}+\frac{\partial\chi}{\partial\alpha}\left(BZ_i+JX_i(\gamma)\frac{1}{g_{2i}}\right)\right]$$

При подстановке выражений $e_{\alpha i}$ и $e_{\beta i}$ во второе уравнение равновесия среды (1) пренебрегаем членами (kh) по сравнению с единицей.

Используя первые два уравнения равновесия среды (1), уравнения (3)–(9) и условия эквивалентности моментов, действующих в поперечных сечениях оболочки, получим уравнения движения оболочки

$$\frac{1}{R_c^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}D\left\|\begin{matrix}Z_1\\Z_2\end{matrix}\right\|+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}Q\left\|\begin{matrix}Z_1\\Z_2\end{matrix}\right\|+\omega^2R\left\|\begin{matrix}Z_1\\Z_2\end{matrix}\right\|=\varphi HX+MX\left\|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\|+$$

$$
+\frac{\partial^2}{R_c\partial\alpha\partial\beta}\left(MY\begin{Vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Vmatrix}+MZ\begin{Vmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Vmatrix}\right)+\begin{Vmatrix} TX\dfrac{1}{R_c}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}(\sigma_H+\sigma_b) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dfrac{1}{2R_c}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}(\sigma_H-\sigma_b)-\dfrac{kh}{2R_c}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}(\sigma_H+\sigma_b) \end{Vmatrix}
$$

$$
\frac{\partial^2}{R_c^2\partial\alpha^2}C\begin{Vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Vmatrix}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}P\begin{Vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Vmatrix}+\omega^2 G\begin{Vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Vmatrix}=\chi HY+NX\begin{Vmatrix} c \\ d \end{Vmatrix}+
$$

$$
+\frac{\partial^2}{R_c\partial\alpha\partial\beta}\left(NY\begin{Vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Vmatrix}+NZ\begin{Vmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Vmatrix}\right)+\begin{Vmatrix} TY\dfrac{\partial}{\partial\beta}(\sigma_H+\sigma_b) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial\beta}(\sigma_H-\sigma_b) \end{Vmatrix} \qquad (10)
$$

$$
D=\begin{Vmatrix} DX & kh\,DY \\ kh\,DZ & DT \end{Vmatrix},\quad Q=\begin{Vmatrix} QX & kh\,QY \\ kh\,QZ & QT \end{Vmatrix},\quad R=\begin{Vmatrix} RX & kh\,RY \\ kh\,RZ & RT \end{Vmatrix}
$$

$$
C=\begin{Vmatrix} CX & 0 \\ 0 & CT \end{Vmatrix},\quad P=\begin{Vmatrix} PX & 0 \\ 0 & PT \end{Vmatrix},\quad G=\begin{Vmatrix} GX & 0 \\ 0 & GT \end{Vmatrix}
$$

$$
D=(D_{js}),\quad Q=(Q_{js}),\quad R=(R_{js}),\quad HX=(HX_s),\quad TX=(TX_n)
$$

$$
MX=(MX_{is}),\quad MY=(MY_{js}),\quad MZ=(MZ_{js})
$$

$$
C=(C_{js}),\quad P=(P_{js}),\quad G=(G_{js}),\quad HY=(HY_s),\quad TY=(TY_n)
$$

$$
NX=(NX_{is}),\quad NY=(NY_{js}),\quad NZ=(NZ_{js})
$$

$$
Z_1'=(U,\psi_1,\ldots,\psi_{2N+1}),\quad Z_2'=(\varphi,\psi_0,\ldots,\psi_{2N})
$$

$$
Y_1'=(V,\xi_1,\ldots,\xi_{2N+1}),\quad Y_2'=(\chi,\xi_0,\ldots,\xi_{2N})
$$

$$
j,s=1,2,\ldots,2N+4,\quad i=1,2,\quad n=N+2
$$

Здесь Z_1, Z_2, Y_1, Y_2 – матрицы-столбцы-функции; штрих означает транспонирование. Для сокращения объема статьи явный вид матричных коэффициентов не приведен.

Решение системы уравнений (10) ищется через две пары неизвестных векторов (Z_1, Z_2) и (Y_1, Y_2). Каждая пара векторов описывает колебания оболочки вдоль соответствующей оси координат и в плоскости нормальной к поверхности оболочки. Симметричные колебания оболочки вдоль соответствующих осей координат описываются векторами Z_1, Y_1, а антисимметричные колебания – векторами Z_2, Y_2. Размер каждой линейной системы дифференциальных уравнений определяется членами ряда в разложении нормального перемещения по толщине оболочки. В первой системе уравнений (10) выделены матричные члены, линейно зависящие от (kh), а во второй системе уравнений этими членами пренебрегаем.

Если в разложении нормального перемещения в ряд по толщине ограничиться только нулевым членом, система уравнений (10) не переходит в известные уравнения [1, 2]. Отличие состоит в том, что уравнения движения записаны через неизвестные углы поворота оболочки, а не через неизвестные перемещения. Новая форма записи уравнений оболочки существенна при рассмотрении волновых процессов и позволяет при увеличении числа неизвестных получать правильную величину порядка волновых дифференциальных уравнений и количество граничных условий.

Из системы уравнений (10) легко получить уравнения движения длинной цилиндрической полосы, которая проходит вдоль поперечной дуги цилиндрической поверхности и имеет ширину в несколько раз больше толщины. Как частный случай из системы уравнений (10) можно получить уравнения движения полосы, проходящей вдоль образующей цилиндрической поверхности. Волновой процесс в полосе ярко выражен только вдоль длины полосы. При этом одна из соответствующих систем уравнений (10) обращается в тождественный нуль. При выводе уравнений движения полосы можно задать законы изменения касательных напряжений от толщины и ширины ([2], с. 46), если это необходимо. Считать, что заданная зависимость нормального перемещения в виде ряда по толщине [3] не зависит от ширины полосы, т.е. отсутствует волновой процесс по ширине полосы. Поскольку зависимость от ширины полосы войдет в уравнения через заданный закон изменения касательного напряжения, полученные уравнения необходимо осреднить проинтегрировав их по ширине полосы. В этом случае, уравнения (10) будут описываться осредненными величинами.

Общее решение задачи (10) для оболочки можно искать в виде ряда по собственным матрицам-столбцам-функциям ([4], с. 78), которые удовлетворяют однородным матричным уравнениям свободных колебаний оболочки и однородным граничным условиям

$$(L+\omega_n^2 R)\begin{Vmatrix} Z_{1n} \\ Z_{2n} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad L=\frac{1}{R_c^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}D+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}Q$$

$$(M_s+\varepsilon_{sl}^2 GX)\,Y_{1l} = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad (M_a+\varepsilon_{am}^2 GT)\,Y_{2m} = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix} \tag{11}$$

$$M_s=\frac{1}{R_c^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}CX+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}PX, \quad M_a=\frac{1}{R_c^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}CT+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}PT$$

Здесь n, l, m – номера мод собственных колебаний, ω_n, ε_{sl}, ε_{am} – собственные круговые частоты, Z_{1n}, Z_{2n}, Y_{1l}, Y_{2m} – собственные матрицы-столбцы-функции, L – матричный дифференциальный оператор, M_s, M_a – матричные дифференциальные операторы симметричных и антисимметричных колебаний.

Построенная теория колебаний цилиндрической оболочки, основанная на разложении нормального перемещения в ряд по толщине, может быть использована в прикладных задачах, где необходимо учитывать поперечное сжатие оболочки. Результаты позволяют проводить сравнения между оболочками, которые имеют одинаковую внутреннюю структуру и разные поверхностные волновые размеры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
2. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
3. *Колесников С.В.* Уточненная теория колебаний многослойной ортотропной пластины // ПММ. 1993. V. 57. Вып. 5. С. 160–165.
4. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах. Колебания линейных систем. Т. 1 // Под ред. *В.В. Болотина*. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 11.I.1994