УДК 539.3

© 1996 г. В.В. Васильев, С.А. Лурье

МЕТОД ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ И БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА

В связи с решением краевых задач теории упругости для ортотропной полосы рассматривается проблема разложения двух различных граничных функций в ряды по собственным элементам обобщенной задачи на собственные значения. Строится система функций, биортогональная к системе собственных элементов. Доказывается двукратная полнота собственных элементов и показывается, что условие биортогональности эквивалентно соотношению обобщенной ортогональности типа Папковича. Устанавливается вид систем биортогональных функций. Для специальных видов разложений биортогональные системы совпадают с системами собственных элементов. Строятся биортогональные системы функций, соответствующие разложениям общего вида. При помощи полученных биортогональных систем найдены явные выражения для коэффициентов в разложениях. Приводится пример существования нетривиального разложения двукратного нуля.

1. Собственные элементы и двукратные разложения. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для прямоугольной ортотропной полосы, отнесенной к безразмерным координатам x и y ($|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1$). Координаты x и y отнесены соответственно к полудлине a и полуширине b полосы. Полагаем, что на продольных кромках полосы $y = \pm 1$ имеются онородные граничные условия.

Решение разрешающего уравнения задачи строится в виде разложения по однородным решениям, соответствующим обобщенной бигармонической задаче [1]. Положим в дальнейшем для простоты, что задача симметрична в отношении центральных координат x и y. В соответствии с методом однородных решений для функции напряжений запишем

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{ch} \lambda_n x F_n(y) = \varphi_n(x,y) \tag{1.1}$$

где $\varphi_n(x, y)$ – частное решение, $F_n(y)$ и λ_n – собственные функции и собственные значения следующей задачи на собственные значения [1]:

$$F_n'''' + 2p\lambda_n^2 F_n'' + q\lambda_n^4 F_n = 0 \tag{1.2}$$

$$y = \pm 1: \quad F_n'' + \beta\lambda_n^2 F_n = 0, \quad F_n''' + \alpha\lambda_n^2 F_n' = 0 \tag{1.3}$$

Величины p, q, α, β – вещественные постоянные.

Собственные функции имеют вид

$$F_n(y) = u_{1n}(y) + u_{2n}(y)$$
$$u_{in}(y) = C_{in} \cos t_i \lambda_n y, \quad C_{1n} = a_2 \cos t_2 \lambda_n, \quad C_{2n} = -a_1 \cos t_1 \lambda_n \tag{1.4}$$

Собственные числа λ_n – корни характеристического уравнения

$$\Psi(\lambda) = a_1 b_2 t_2 \cos t_1\lambda \sin t_2\lambda - a_2 b_1 t_1 \sin t_1\lambda \cos t_2\lambda = 0 \tag{1.5}$$

$$a_i = t_i^2 - \beta, \quad b_i = t_i^2 - \alpha$$

Функции u_{in} будем называть собственными элементами. Собственные функции $F_n(y)$ подчиняются соотношению общей ортогональности, которому можно придать вид

$$a_{kn} = \int_{-1}^{1} [t_1^2 c_1 u_{1n}(y) u_{1k}(y) - t_2^2 c_2 u_{2n}(y) u_{2k}(y)]\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} [D_{1n}(y) C_{1k} \cos t_1\lambda_k y - D_{2n}(y) C_{2k} \cos t_2\lambda_k y]\,dy = 0, \quad \lambda_n \neq \lambda_k \tag{1.6}$$

$$c_i = \beta\alpha + t_i^2(t_i^2 - \beta - \alpha), \quad D_{in}(y) = t_i^2 c_i C_{in} \cos t_i \lambda_n y$$

Соотношение обобщенной ортогональности позволяет точно решить проблему разложений

$$\varphi_i(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n^2 u_{in}(y), \quad i = 1,2 \tag{1.7}$$

коэффициенты которых находятся по формулам

$$A_k = \frac{d_k}{\lambda_k^2 a_{kk}}, \quad d_k = \int_{-1}^{1} [\varphi_1 D_{1k}(y) - \varphi_2 D_{2k}(y)]\,dy \tag{1.8}$$

Подстановка функции напряжений в граничные условия на торцах полосы $x = \pm 1$ приводит к разложениям

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n [\eta_1(\lambda_n) u_{1n}(y) + \xi_1(\lambda_n) u_{2n}(y)] = f_1(y), \quad (1 \leftrightarrow 2) \tag{1.9}$$

где $f_i(y)$ – известные функции, а η_i и ξ_i – некоторые целые четные функции параметра λ_n.

2. Полнота систем вектор-функций. Исследуем полноту системы обобщенных собственных функций. Отметим, что двукратная полнота однородных функций $\{F_k(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{k=\infty}$, $F_k(1) = F_k'(1) = 0$, была доказана [2] с использованием теории квадратичных пучков.

Здесь для доказательства полноты будем пользоваться средствами, которые основаны на возможности построения системы функций биортогональных к исследуемой системе [3], а также на теореме единственности целых функций [4].

Функция $\Psi(\lambda)$, определяемая выражением (1.5), является целой функцией экспоненциального типа. Ее тип равен $\sigma = t_1 + t_2$.

Рассмотрим теперь вектор-функцию $R = (C_1 \cos t_1\lambda y, C_2 \cos t_2\lambda y)$. Пусть $\psi_i(y)$ – функции, интегрируемые с квадратом на интервале $(-1, 1)$.

Рассмотрим выражения

$$X_{i\theta}(\lambda) = \int_{-\theta}^{\theta} C_i(\lambda) \cos t_i \lambda x \psi_i(x)\,dx$$

Утверждение 1. Если $\theta \leqslant 1$, то $X_{1\theta}(\lambda) + X_{2\theta}(\lambda)$ – целая функция экспоненциального типа, а тип этой функции удовлетворяет неравенству $\sigma \leqslant t_1 + t_2$.

Для доказательства положим $\lambda = u_1 + iu_2$. Тогда в силу неравенства Шварца получим

$$X_{1\theta} \leqslant \alpha_2 \exp[(t_2 + \theta t_1)|\lambda|], \quad X_{2\theta} \leqslant \beta \exp[(t_1 + \theta t_2)|\lambda|]$$

где α_1, α_2 и β – положительные постоянные. Совокупность этих неравенств и доказывает утверждение.

Доказательство двукратной полноты проведем по известной схеме [3]. Докажем сначала, что вектор-функция $R_a = \{R_{a1}(\lambda, y), R_{a2}(\lambda, y)\}$, ($R_{a1}(\lambda, y) = a_2C_1\cos t_1\lambda y$, $R_{a2}(\lambda, y) = a_1C_2\cos t_2\lambda y$) образует замкнутое в $L_2(-1, 1)$ ядро. Это означает, что не существует финитной вектор-функции $\kappa(y) \in L_2(-1, 1)$, $\kappa = \{\kappa_1(y), \kappa_2(y)\}$, не эквивалентной нулю, если для нее выполняется равенство

$$G_a(\lambda) = \int_{-1}^{1} [R_{a1}(\lambda,y)\kappa_1(y) + R_{a2}(\lambda,y)\kappa_2(y)]dy = 0 \tag{2.1}$$

Здесь $R_{a1}(\lambda, y)$ и $R_{a2}(\lambda, y)$ ($\lambda \in C$, $\operatorname{supp} R_{ai}(\lambda, y) \in [-1, 1]$, $i = 1, 2$) – функции, порождающие систему функций $F_a(\lambda_k, y) = R_{a1}(\lambda_k, y) + R_{a2}(\lambda_k, y)$ при $\lambda \in \Psi$. Функции $C_i(\lambda)$ определены ранее.

Утверждение 2. Вектор-фунция $R_a(\lambda, y)$ является замкнутым ядром в $L_2(-1, 1)$. Иначе говоря, подпространство нулей функционала $G_a(\lambda)$ замкнуто в $L_2(-1, 1)$.

Доказательство. Так как функции $C_i(\lambda)$ таковы, что $F_a(\lambda, 1) = 0$ и $\kappa_i(y)$ – финитные функции, то решение уравнения (2.1) в пространстве трансформант Фурье имеет вид

$$F_{t_i\lambda}[\kappa_i(y)] = \cos t_i\lambda$$

Соответственно решением в пространстве оригиналов являются финитные функции, обращающиеся в нуль внутри интервала $(-1, 1)$ $\kappa_i(y) = d_i[\delta(y + 1) + \delta(y - 1)]$ d_i – постоянные, $\delta(\ )$ – дельта-функция. Следовательно, R_a – замкнутое в $L_2(-1, 1)$ ядро.

Теорема 1. Система вектор-функций $\{R_a(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $L_2(-1, 1)$.

Доказательство. Составим функцию

$$S_\theta(\lambda) = \int_{-\theta}^{\theta} R_a(\lambda,y)\kappa(y)dy, \quad \lambda \in C, \quad 0 < \theta < 1$$

Считаем, что здесь κ – вектор-функция, компоненты которой $\kappa_i(y)$ – финитные функции из $L_2(-\theta, \theta)$ ($\operatorname{supp} \kappa_i(y) \in [-\theta, \theta]$, $0 < \theta < 1$).

Пусть функции $\kappa_i(y)$ таковы, что

$$S_\theta(\lambda_k) = 0, \quad \lambda_k \in \Psi \tag{2.2}$$

В соответствии с утверждением 1 функция $S_\theta(\lambda_k)$ – целая и ее тип не выше, чем $\max(t_1 + \theta t_2, t_1\theta + t_2)$. С другой стороны, нулями функции $S_\theta(\lambda)$ по предположению являются все корни целой функции $\Psi(\lambda)$, тип которой равен $t_1 + t_2$. По теореме единственности целых функций получаем с необходимостью $S_\theta(\lambda) \equiv 0$ при $\theta < 1$. В соответствии с утверждением 2 $R_a(\lambda, y)$ – замкнутое ядро в $L_2(-1, 1)$. Следовательно, система вектор-функций $\{R_a(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ является полной в $L_2(-1, 1)$.

Замечание. Совершенно аналогично можно доказать полноту другой системы вектор-функций. Эта система вектор-функций, удовлетворяя тождественно граничным условиям $F''' - n\lambda^2F' = 0$ при $y = \pm 1$, имеет вид

$$R_b = \{R_{b1}(\lambda_k,y),\ R_{b2}(\lambda_k,y)\}_{k=1}^{\infty}$$

$$R_{b1} = b_2D_1\cos t_1\lambda_k y, \quad R_{b2} = b_1D_2\cos t_2\lambda_k y$$

$$D_1 = -b_2t_2\sin t_2\lambda_k, \quad D_2 = -b_1t_1\sin t_1\lambda_k$$

$$C_1 = b_i = t_i^2 + n - b_2t_2\sin t_2\lambda, \quad C_2 = b_1t_1\sin t_1\lambda$$

Полнота системы вектор-функций $\{R_a(\lambda_k y)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{R_b(\lambda_k y)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2(-1, 1)$ эквивалентна двукратной полноте системы $\{R(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$.

Рассмотрим теперь выражение

$$G(\lambda) = \int_{-1}^{1} [u_1(\lambda, y)\psi_1(y) + u_2(\lambda, y)\psi_2(y)]dy$$

$$(u_i(\lambda, y) = C_i(\lambda)\cos t_i\lambda y, \quad i = 1,2)$$

В силу определения $C_1(\lambda)$ и $C_2(\lambda)$ и утверждения 1 $G(\lambda)$ – целая функция экспоненциального типа. Ее тип равен $t_1 + t_2$. Положим, что $\psi_{1k}(y)$ и $\psi_{2k}(y)$ таковы, что выполняется соотношение

$$G(\lambda) = \int_{-1}^{1} [u_1(\lambda, y)\psi_{1k}(y) + u_2(\lambda, y)\psi_{2k}(y)]dy = \frac{2\lambda\Psi(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_k^2)\Psi'(\lambda_k)} \tag{2.3}$$

Если указанная система функций существует, можно говорить, что существует система вектор-функций $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\psi_{1k}(y), \psi_{2k}(y)\}_{k=1}^{\infty}$, биортогональная к $\{R(\lambda_i)\}_{i=1}^{\infty}$, $\lambda \in \Psi$. Действительно, если $i \neq k$, то $G(\lambda_i) = 0$, так как λ_i входит в число нулей функции $\Psi(\lambda)$. Когда $i \neq k$, то в силу (2.3) $G(\lambda_k) = 1$.

Сравнение условия обобщенной ортогональности (1.6) и формулы (2.3) приводит к мысли об иной трактовке соотношений расширенной ортогональности однородных функций, как соотношений биортогональности. Следует только доказать, что существует биортогональная система вектор-функций с указанными свойствами.

Теорема 2. Существует система финитных вектор-функций $\{\psi_k(y)\}_{k=1}^{\infty} = \{\psi_{1k}(y), \psi_{2k}(y)\}_{k=1}^{\infty}$ с носителями, совпадающими с интервалом $[-1, 1]$ биортогональная система вектор-функций $\{R(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ $\lambda \in \Psi$, которая порождена собственными функциями задачи (1.2), (1.3).

Доказательство. Рассмотрим функцию $G(\lambda)$. Полагая, что функции $\psi_{1k}(y)$, $\psi_{2k}(y)$ финитные, запишем ее в виде

$$G(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} [u_1(\lambda, y)\psi_{1k}(y) + u_2(\lambda, y)\psi_{2k}(y)]dy =$$

$$= C_1(\lambda)F_{t_1\lambda}[\psi_{1k}(y)] + C_2(\lambda)F_{t_2\lambda}[\psi_{2k}(y)] = C_1(\lambda)X_{1k}(\lambda) + C_2(\lambda)X_{2k}(\lambda) \tag{2.4}$$

Здесь $F_{t_i}\lambda[\psi_{ik}(y)]$ – интегральное преобразование функций $\psi_{ik}(y)$ с параметром преобразования, равным $r_i = t_i\lambda$, $F_{r_i}[\psi_{ik}(y)] = X_{ik}(r_i)$ $(i = 1, 2)$. Очевидно, что вопрос о существовании финитных функций на $(-1, 1)$, биортогональных к системе $\{R(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ решается положительно, если существуют функции со следующими свойствами:

1) $X_{ik}(r_i)$ должны быть целыми функциями экспоненциального типа, их тип равен 1, $r_i = t_i\lambda$;

2) функции $X_{ik}(r_i)$ удовлетворяют равенству

$$C_1(\lambda)X_{1k}(t_1\lambda) + C_2(\lambda)X_{2k}(t_2\lambda) = \frac{2\lambda\Psi(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_k^2)\Psi'(\lambda_k)} \tag{2.5}$$

Такие функции существуют и имеют вид

$$X_{ik}(t_i\lambda) = a_{ik}\frac{\cos t_i\lambda_k[R_{al}(\lambda_k, 1)R_{bi}(\lambda, 1) - R_{ai}(\lambda, 1)R_{bl}(\lambda_k, 1)]}{a_l b_i \cos(t_i\lambda_k)[(t_i\lambda)^2 - (t_i\lambda_k)^2]} \tag{2.6}$$

$$i = 1, 2, \qquad l = 1, 2, \qquad t \neq l, \qquad \lambda_k \in \Psi$$

Здесь a_{1k} и a_{2k} – некоторые постоянные, требующие определения.

Очевидно, что $X_{ik}(r_i)$, $r_i = t_i\lambda$ $(i = 1, 2)$ являются целыми функциями экспоненциального типа, их тип равен единице. В соответствии с теоремой Пэли–Винера [5] функции $\psi_{ik}(y)$ являются финитными с носителем $\operatorname{supp} \psi_i(y) \in [-1, 1]$ $(i = 1, 2)$.

Покажем, что при надлежащем выборе коэффициентов a_{ik} в формулах (2.6) условие (2.5) выполняется. Действительно, во-первых, можно убедиться, что выражения, стоящие в правых частях равенств (2.6) при коэффициентах a_{1k} и a_{2k} равны соответственно интегралам

$$\int_{-1}^{1} \cos t_i \lambda y \cos t_i \lambda_k y \, dy, \qquad i = 1, 2, \qquad \lambda_k \in \Psi$$

С другой стороны, имея в виду формулы (2.4)–(2.7) и (1.6), запишем

$$\int_{-1}^{1} [D_{1k}^{(x)} u_1(\lambda, x) - D_{2k}^{(x)} u_2(\lambda, x)] \, dx = \frac{\Psi(\lambda) 2\lambda}{\lambda^2 - \lambda_k^2} a_1 a_2 \cos t_1 \lambda_k \cos t_2 \lambda_k \tag{2.7}$$

Сравнение левых и правых частей равенств (2.6) и (2.7) позволяет определить значение коэффициентов

$$a_{jk} = \frac{(-1)^l C_{jk} t_j^2 c_j}{[a_1 a_2 \cos t_1 \lambda_k \cos t_2 \lambda_k \Psi'(\lambda_k)]} \tag{2.8}$$

$$j = 1, 2, \qquad l = 1, 2, \qquad l \neq j, \qquad \lambda_k \in \Psi$$

Следовательно, доказано существование системы функций $\{\psi_{1k}(y), \psi_{2k}(y)\}_{k=1}^{\infty}$, финитных на $(-1, 1)$ и биортогональных к системе функций $\{R(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$. Функции $\psi_{ik}(y)\}_{k=1}^{\infty}$ определяются следующими равенствами:

$$F_{r_i}[\psi_{ik}(y)] = X_{ik}(r_i), \qquad \psi_{ik}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{ik}(r_i) \cos r_i y \, dr_i \tag{2.9}$$

Следствие 1. Так как система функций $\{R(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ двукратно полна, то двукратно полна и биортогональная система функций $\{\psi_{1k}(y), \psi_{2k}(y)\}_{k=1}^{\infty}$, определяемая равенствами (2.9).

Следствие 2. Биортогональная система функций $\{\psi_{1k}(y), \psi_{2k}(y)\}_{k=1}^{\infty}$ по построению совпадает с системой вектор-функций

$$\{c_1 t_1^2 C_{1k} \cos t_1 \lambda_k y, \ -c_2 t_2^2 C_{2k} \cos t_2 \lambda_k y\}_{k=1}^{\infty}$$

с точностью до некоторых коэффициентов. Условие биортогональности совпадает с соотношением расширенной ортогональности, являющимся обобщением соотношений ортогональности Папковича.

Биортогональная система функций при этом определяется формулами (2.6), (2.8), (2.9).

Условиями биортогональности (2.3) или (2.7) можно воспользоваться для определения постоянных в разложениях двух различных вещественных функций по однородной системе функций (1.7). Умножим первое равенство (1.7) на $\psi_{1k}(y)$, второе – на $\psi_{2k}(y)$, сложим полученные выражения и проинтегрируем результат по y от -1 до 1. Воспользовавшись условием биортогональности, получим

$$A_k = \int_{-1}^{1} [\varphi_1(y)\psi_{1k}(y) + \varphi_2(y)\psi_{2k}(y)] \, dy \tag{2.10}$$

По следствию 2 функции

$$\psi_{jk}(y) = (-1)^j z_k c_j C_{jk} \cos t_j \lambda_k y$$

а значения множителей z_k, при учете равенства (2.7) устанавливается с помощью формулы

$$z_k = \frac{1}{a_1 a_2 \cos t_1\lambda_k \cos t_2\lambda_k \Psi'(\lambda_k)}$$

В результате формула (2.10) приобретает вид $A_k = d_k z_k$.

Можно убедиться, что полученное выражение полностью совпадает с формулой (1.8), найденной с помощью соответствующих соотношений расширенной ортогональности (1.6).

3. Нуль-разложения. Покажем, что нетривиальное разложение двукратного нуля существует. Пусть t_k – действительные и положительные числа. Тогда, например, разложения

$$f_i = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos t_i\lambda_k y, \qquad i = 1,2$$

дают двукратное разложение нуля, если положить

$$A_k = \frac{\sin^2 s_1\lambda_k \sin^2 s_2\lambda_k}{\lambda_k^2 \Psi'(\lambda_k)}, \qquad \left(s_1, s_2 \leqslant \min\left(\frac{t_1}{2}, \frac{t_2}{2}\right), \quad s_i \geqslant 0\right)$$

Действительно, рассмотрим первое из записанных выше разложений

$$f_1(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 s_1\lambda_k \sin^2 s_2\lambda_k}{\lambda_k^2 \Psi'(\lambda_k)} \cos t_1\lambda_k y$$

(суммирование проводится по четверкам собственных чисел $\pm\lambda_k$, $\pm\bar{\lambda}_k$). Используя теорему о вычетах, запишем

$$f_1(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 s_1\lambda_k \sin^2 s_2\lambda_k}{\lambda_k^2 \Psi'(\lambda_k)} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \oint_{C_R} \Phi(z,y)dz$$

где

$$\Phi(z,y) = \frac{\sin^2 s_1 z \sin^2 s_2 z \cos z t_1 y}{z^2 (t_1 \sin t_1 z \cos t_2 z - t_2 \sin t_2 z \cos t_1 z)}, \qquad y \in (-1,1)$$

а интеграл берется по окружности C_R достаточно большого радиуса, не проходящей через нули функции $\Psi(z) = t_1 \sin t_1 z \cos t_2 z - t_2 \sin t_2 z \cos t_1 z$. Применяя лемму Жордана, получим

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{C_R} \Phi(z,y)dz = 0$$

Следовательно, $f_1(y) = 0$.

Аналогично показывается, что $f_2(y) = 0$. Таким образом, существует нетривиальное разложение двукратного нуля по системам функций $\{\cos t_1\lambda_k y\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\cos t_2\lambda_k y\}_{k=1}^{\infty}$ с коэффициентами A_k, отличными от нуля.

4. Биортогональные системы функций в несогласованных разложениях. Разложения (1.7) часто называют согласованными, так как коэффициенты A_n в них можно найти, используя формально лишь соотношение обобщенной ортогональности. Можно показать, что разложениям такого вида осответствует краевая задача, решаемая точно в одинарных тригонометрических рядах. Здесь не обсуждается вопрос о сходимости рядов (1.7) с коэффициентами, найденными по формулам (1.8) соответствующим функциям в левых частях. Было показано [1], что для сходимости требуется выполнение дополнительного условия.

Покажем, что система функций $\{\psi_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ является основой для построения специальной биортогональной системы вектор-функций, соответствующей несогласованным разложениям.

Рассмотрим сначала простой случай несогласованных разложений

$$\varphi_1(y)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n\eta_1(\lambda_n)C_{1n}\cos t_1\lambda_n y \qquad (1\leftrightarrow 2) \tag{4.1}$$

где $\eta_i(\lambda)$ – некоторые полиномы с четными степенями, имеющие конечную степень $2m_i$ соответственно:

$$\eta_i(\lambda)=P_i(\lambda), \quad P_i(\lambda)=\sum_{j=0}^{2m_i} p_{ij}\lambda^{2j}, \quad i=1,2 \tag{4.2}$$

Перепишем равенства (4.1) в виде

$$\varphi_1(y)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{1}{\eta_2(\lambda_n)}C_{1n}\cos t_1\lambda_n y, \qquad (1\leftrightarrow 2) \tag{4.3}$$

где $B_n=\eta_1(\lambda_n)\eta_2(\lambda_n)A_n$.

Построим систему вектор-функций $\{\omega_{1k}(y), \omega_{2k}(y)\}_{k=1}^{\infty}$, биортогональную системе вектор-функций $\{\eta_2^{-1}(\lambda_n)C_{1n}\cos t_1\lambda_n y, \eta_1^{-1}(\lambda_n)C_{2n}\cos t_2\lambda_n y\}_{n=1}^{\infty}$. Положим, что такая система вектор-функций существует. Тогда она должна удовлетворять соотношению биортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{u_1(y)\omega_{1k}(y)}{\eta_2(\lambda)}+\frac{u_2(y)\omega_{2k}(y)}{\eta_1(\lambda)}\right]dy=\frac{2\lambda\Psi(\lambda)}{\Psi'(\lambda_k)(\lambda^2-\lambda_k^2)} \tag{4.4}$$

Равенство (4.4) перепишем в трансформантах Фурье

$$\left\{\frac{F_{r_1}[\omega_{1k}(y)]}{\eta_2(\lambda)}C_1(\lambda)+\frac{F_{r_2}[\omega_{2k}(y)]}{\eta_1(\lambda)}C_{2n}(\lambda)\right\}=\frac{2\lambda\Psi(\lambda)}{\Psi'(\lambda_k)(\lambda^2-\lambda_k^2)} \tag{4.5}$$

Сравнивая уравнения (2.5) и (4.5), видим, что решение уравнения (4.4) и соответственно (4.5) имеет вид

$$F_{r_1}[\omega_{1k}(y)]=\eta_2(\lambda)X_{1k}(t_1\lambda), \qquad (1\leftrightarrow 2)$$

где $X_{ik}(\lambda)$ – решения уравнения (2.5):

Функции $X_{ik}(r_1)$, являясь преобразованиями Фурье функций $\psi_{ik}(y)$ с параметрами r_i соответственно, будут целыми функциями, их тип равен единице. Это следует из формул (2.6). Так как по условию $\eta_i(\lambda)$ – полиномы от λ конечной степени, то из формул (2.6) и (4.5) следует, что преобразования Фурье функций $\omega_{ik}(y)$ при $|\lambda|\to\infty$ растут не быстрее $|\lambda|^q$ при некотором конечном q и являются целыми функциями, тип которых равен единице.

Следовательно, мы находимся в условиях теоремы Пэли–Винера–Шварца [6], в соответствии с которой обратные преобразования функций $F_{r_i}[w_{ik}]$ (см. (4.5)) сосредоточены на интервале $[-1, 1]$, т.е. обращаются в нуль вне интервала $[-1, 1]$. Сами функции w_{ik} могут быть представлены как результат применения соответствующего дифференциального оператора к порождающим финитным функциям ψ_{ik}

$$\omega_{1k}(y)=P_2\left(\frac{d}{t_1}\right)\psi_{1k}(y), \quad (1\leftrightarrow 2), \qquad d=i\frac{d}{dy}, \quad i=\sqrt{-1} \tag{4.6}$$

По построению функции $w_{1k}(y)$ и $w_{2k}(y)$ образуют биортогональную систему финитных функций, которые равны нулю вне $[-1, 1]$.

Следовательно, имеет место

Теорема 3.1°. Существует система функций $\{w_{1k}(y), w_{2k}(y)\}_{k=1}^{\infty}$, биортогональная к вектор-функциям

$$\{C_1(\lambda_k)\eta_2^{-1}(\lambda_k)\cos t_1\lambda_k y,\ C_2(\lambda_n)\eta_1^{-1}(\lambda_k)\cos t_2\lambda_n y\}_{n=1}^{\infty}$$

на интервале (–1, 1).

2°. Решение проблемы разложений (4.1) дается формулой

$$A_n\eta_1\eta_2 = \int_{-1}^{1}[\varphi_1(y)\omega_{1k}(y)+\varphi_2(y)\omega_{2k}(y)]dy \tag{4.7}$$

Второе утверждение теоремы очевидно.

Рассмотрим теперь общее разложение (1.9). Здесь по аналогии с предыдущим также может быть установлен факт существования специальной системы функций $\{\upsilon_{1k}(y), \upsilon_{2k}(y)\}_{k=1}^{\infty}$, биортогональной к системе вектор-функций

$$\{(\eta_1(\lambda_k)u_{1k}(y)+\xi_1(\lambda_k)u_{2k}(y)),\ (\eta_2(\lambda_k)u_{2k}(y)+\xi_2(\lambda_k)u_{1k}(y))\}_{k=1}^{\infty}$$

Схема построения биортогональной системы функций в общем случае остается прежней, только сначала разложения (1.9) преобразуются к виду (4.1). В результате для функций υ_{ik} получаем

$$\upsilon_{1k} = \eta_2\left(\frac{d}{t_2}\right)w_{1k} + \xi_2\left(\frac{d}{t_1}\right)w_{2k},\quad (1\leftrightarrow 2) \tag{4.8}$$

$$w_{ik} = \Delta_l\left(\frac{d}{t_i}\right)\psi_{ik},\quad \Delta_i(d) = \eta_i(d)\eta_l\left(\frac{t_i d}{t_l}\right)-\xi_i\left(\frac{t_i d}{t_l}\right)\xi_l(d)$$

$$i = 1, 2,\qquad l = 1, 2,\qquad i \neq l$$

Следует отметить, что если $\eta_i(\lambda)$ и $\xi_i(\lambda)$ – аналитические функции, то для системы функций $\{\upsilon_{1k}, \upsilon_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ имеет место утверждение, аналогичное теореме 3. Общая проблема разложений (1.9) решается точно с помощью формул

$$A_k\Delta_1(\lambda_k)\Delta_2(\lambda_k) = \int_{-1}^{1}[f_1(y)\upsilon_{1k}(y)+f_2(y)\upsilon_{2k}(y)]dy \tag{4.9}$$

Используя теорему Пэли–Винера–Шварца и имея в виду формулы (4.8), можно показать полное совпадение формул для коэффициентов A_k, найденных с помощью формул (4.9), с соответствующими формулами, полученными в [1, 7] иными средствами.

5. Пример. К разложениям (1.9) сводится решение плоских задач теории упругости для прямоугольной ортотропной полосы и задач изгиба ортотропных прямоугольных пластин. В качестве примера рассмотрим полубесконечную полосу, нагруженную по торцу самоуравновешанными нормальными и сдвигающими усилиями

$$\sigma_0 = \sigma\cos\pi y,\qquad \tau_0 = \sigma t_1\sin\pi y$$

Формально эта задача может быть рассмотрена как предельный случай для конечной полосы [1]. Применяя предложенный в работе метод, после некоторых преобразований получим следующее простое выражение для коэффициентов A_n:

$$A_n = \frac{2\sigma b^2}{\lambda_n(\pi^2 - t_1^2\lambda_n^2)\Psi'(\lambda_n)}.$$

При этом решение записывается в виде

$$\varphi(\lambda, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n x} F_n(y)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16815).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев В.В., Лурье С.А.* Плоская задача теории упругости для ортотропной консольной полосы // Изв. АН СССР. 1984. № 5. С. 125–135.
2. *Устинов Ю.А., Юдович В.И.* О полноте системы элементарных решений бигармонического уравнения в полуполосе // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 706–714.
3. *Леонтьев А.Ф.* Обобщения рядов экспонент. М.: Наука, 1981. 320 с.
4. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 407 с.
5. *Коваленко М.Д.* Биортогональные разложения в первой основной задаче теории упругости // ПММ. 1991. № 991. Т. 55. Вып. 6. С. 956–963.
6. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 439 с.
7. *Васильев В.В., Лурье С.А.* О точных решениях плоской задачи теории упругости для ортотропной полосы // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 120–130.

Москва

Поступила в редакцию
28.VII.1994