УДК 539.3

© 1996 г. А.Н. Друзь, Ю.А. Устинов

ТЕНЗОР ГРИНА ДЛЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА И ПРИЛОЖЕНИЯ ЕГО К РАЗВИТИЮ ТЕОРИИ СЕН-ВЕНАНА

На основании результатов, полученных ранее [1, 2], строится тензор Грина для упругого цилиндра, позволяющий включить в рассмотрение случай кратных собственных значений. Особое внимание уделяется статической задаче. В виде разложения по элементарным решениям строится тензор Грина для бесконечного цилиндра. Для цилиндра конечной длины построение тензора Грина сводится к бесконечной системе. Проводится асимптотический анализ классических задач Сен-Венана. Вводятся понятия вектор-функции Грина и тензора Грина теории Сен-Венана, осуществляется их построение в явном виде.

Решение задачи о стационарных колебаниях бесконечного цилиндра под действием сосредоточенной силы, приложенной в произвольной точке, было представлено [3, 4] в виде разложений по однородным элементарным решениям и может рассматриваться как тензор Грина краевой задачи. Однако не был рассмотрен случай, когда спектральная задача на сечении имеет кратные точки спектра. Тем самым исключен из рассмотрения случай критических частот и весьма важный случай статической задачи, поскольку у последней нулевое собственное значение имеет алгебраическую кратность, равную двенадцати. Этому нулевому собственному значению соответствуют, в частности, классические решения задач Сен-Венана [5] о растяжении, кручении и изгибе цилиндра конечной длины усилиями, приложенными к одному из его торцов.

1. Пусть $V = S \times [-\infty, \infty]$ – область, занятая идеальной упругой средой, S – поперечное сечение цилиндра, ∂S – граница S, Γ – боковая поверхность цилиндра. С главными осями сечения S_0 свяжем начало декартовой системы координат $x_1x_2x_3$, ось x_3 параллельна образующей.

Рассмотрим гармонические колебания цилиндра, вызванные сосредоточенной силой, приложенной в точке O' с координатами $(x_1', x_2', 0)$ и пропорциональной $e^{-i\omega t}$.

Будем считать, что боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений.

Ниже используются следующие обозначения: $\mathbf{u} = \{u_k\}_{k=1}^3$ – вектор смещений; $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{3k}\}_{k=1}^3$ – вектор напряжений на площадках, ортогональных оси x_3; $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}\delta(x_1 - x_1')\delta(x_2 - x_2')\delta(x_3')$ – вектор сосредоточенной силы, $\mathbf{F} = \{F_k\}_{k=1}^3$, $\delta(x)$ – дельта-функция; $\mathbf{w} = \{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$ – расширенный шестикомпонентный вектор. Ниже $\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}$ будем называть u-, σ-компонентами.

Вектор $\mathbf{w}$ будем рассматривать как вектор-функцию $\mathbf{w}(x)(x = x_3)$ со значениями в гильбертовом пространстве $H' = H \oplus H$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)})_{H'} = (\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)})_H + (\boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \boldsymbol{\sigma}^{(2)})_H$$

$$(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)})_H = \int_S \mathbf{u}^{(1)} \cdot \overline{\mathbf{u}}^{(2)} ds = \int_S \sum_{k=1}^3 u_k^{(1)} \overline{u}_k^{(2)} ds$$

Уравнения равновесия и стационарных колебаний совместно с граничными условиями на Г можно записать в виде [6]

$$d\mathbf{w}/dx - iT\mathbf{w} = \mathbf{K} \tag{1.1}$$

где T – неограниченный оператор в H', $\mathbf{K} = i\{0; \mathbf{F}_0\}$.

Однородной задаче (1.1) соответствует спектральная задача

$$T\mathbf{v} = \gamma\mathbf{v} \tag{1.2}$$

Известно [2, 7], что спектр оператора T при всяком ограниченном значении частоты ω допускает разбиение $\Lambda = \Lambda^0 \cup \Lambda^+ \cup \Lambda^-$, где Λ^0 – конечное множество вещественных собственных значений (СЗ) γ_r, Λ^+, Λ^- – неограниченные множества комплексных СЗ $\gamma_k^+, \gamma_k^- (\operatorname{Im}\gamma_k^+ > 0,\ \operatorname{Im}\gamma_k^- < 0)$. Случаю $\omega'(\gamma_k) = 0$ соответствует кратное СЗ, при этом групповая скорость равна нулю.

Обозначим через W множество элементарных решений (ЭР) однородного уравнения (1.1). Каждый элемент этого множества может быть представлен в виде

$$\mathbf{w}_s = \mathbf{v}_s e^{i\gamma_s x}$$

где γ_s – простое СЗ спектральной задачи (1.2), или в виде

$$\mathbf{w}_{sn} = e^{i\gamma_s x} \sum_{l=0}^{n} \frac{(ix)^n}{l!} \mathbf{v}_{s,n-l}$$

если γ_s – кратное СЗ, которому могут соответствовать одна или несколько систем собственных и присоединенных векторов (жордановых цепочек) $\mathbf{v}_{t0}, \mathbf{v}_{t1}, \ldots, \mathbf{v}_{tN_t}$.

Было установлено [1, 2], что при любой структуре спектра имеет место разбиение $W = W^+ \cup W^-$ где подмножества W^+ и W^- определяются следующими условиями: в случае вещественных СЗ $(s = r)\mathbf{w}_r \in W^+$, если $(J\mathbf{w}_r, \mathbf{w}_r) > 0$, и $\mathbf{w}_r \in W^-$, если $(J\mathbf{w}_r, \mathbf{w}_r) < 0$, где $J = i\|J_{kl}\|$, $J_{14} = J_{25} = J_{36} = -1$, $J_{41} = J_{52} = J_{63} = 1$, остальные $J_{kl} = 0$; в случае комплексных СЗ $(s = k)\mathbf{w}_k \in W^+$, если $\gamma_k = \gamma_k^+$, и $\mathbf{w}_k \in W^-$, если $\gamma_k = \gamma_k^-$. Ниже $\mathbf{w}_s = \mathbf{w}_s^+(\mathbf{w}_s^-)$, если $\mathbf{w}_s \in W^+(W^-)$.

Поскольку поток энергии через поперечное сечение цилиндра

$$P(\mathbf{w}) = \omega[\mathbf{w}, \mathbf{w}]/4$$

$$[\mathbf{w}, \mathbf{w}] = (J\mathbf{w}, \mathbf{w})_{H'} = i[(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})_H - \overline{(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})_H}]$$

то разбиение множества W в случае колебаний осуществлено по принципу энергетического излучения [8].

Обозначим через $\mathbf{v}_s = \mathbf{w}_s(0) = \{\mathbf{a}_s, \mathbf{b}_s\}$ следы ЭР в сечении $x = 0$. Ниже используются следующие их свойства биортогональности:

$$[\mathbf{v}_r^\pm, \mathbf{v}_l^\pm] = \pm 2p_r\delta_{rl}, \quad [\mathbf{v}_r^\pm, \mathbf{v}_l^\mp] = 0 \tag{1.3}$$

$$[\mathbf{v}_k^\pm, \mathbf{v}_m^\mp] = 2p_k^\pm\delta_{km}, \quad p_k^- = -\overline{p}_k^+ \tag{1.4}$$

а также вытекающие из [2, 9, 10] свойства их полноты и минимальности в H'. В выражениях (1.3), (1.4) индексы r, l относятся к векторам, соответствующим вещественным СЗ, индексы m, k – к векторам, соответствующим комплексным СЗ.

Решение рассматриваемой задачи обозначим через

$$\mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', 0)$$

и назовем вектор-функцией Грина. Отыскивать его будем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(x) &= \mathbf{G}^{+}(x) = \sum_{s} C_s^{+}\mathbf{w}_s^{+}, \quad x > 0 \\ \mathbf{G}(x) &= \mathbf{G}^{-}(x) = \sum_{s} C_s^{-}\mathbf{w}_s^{-}, \quad x < 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Поскольку правая часть уравнения (1.1) пропорциональна $\delta(x)$ (см. (1.2)), то в сечении $x = 0$ решение терпит скачок, и поэтому

$$\begin{aligned} &\mathbf{G}(+0) - \mathbf{G}(-0) = \mathbf{G}^{+}(0) - \mathbf{G}^{-}(0) = \mathbf{K}_0 \\ &\mathbf{K}_0 = i\{0, \mathbf{P}_0\}, \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{F}\delta(x_1 - x_1')\delta(x_2 - x_2') \end{aligned} \tag{1.6}$$

Подставляя разложение (1.5) в (1.6) и используя свойства биортогональности (1.3), (1.4), получаем:

в случае вещественных СЗ

$$C_r^{\pm} = i(2p_r)^{-1}\overline{\mathbf{a}}_r^{\pm} \cdot \mathbf{F} \tag{1.7}$$

в случае комплексных СЗ

$$C_k^{\pm} = \pm i(2p_k^{\pm})^{-1}\overline{\mathbf{a}}_r^{\mp} \cdot \mathbf{F} \tag{1.8}$$

В выражениях (1.7), (1.8) $\mathbf{a}_s^{\pm} = \mathbf{u}_s^{\pm}(x_1', x_2', 0)$ – компоненты вектора смещений соответствующего элементарного решения в точке O'.

Подставляя (1.7), (1.8) в (1.5), получим

$$\begin{aligned} &\mathbf{G}^{\pm}(x) = \mathbf{G}_0^{\pm}(x) + \mathbf{G}_1^{\pm}(x), \quad \mathbf{G}_0^{\pm}(x) = i\sum_{r} (2p_r)^{-1}(\overline{\mathbf{a}}_r^{\pm} \cdot \mathbf{F})\mathbf{w}_r^{\pm}(x) \\ &\mathbf{G}_1^{\pm}(x) = \pm i\sum_{k} (2p_k^{\pm})^{-1}(\overline{\mathbf{a}}_k^{\mp} \cdot \mathbf{F})\mathbf{w}_k^{\pm}(x) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Выделяя u-компоненту, найдем выражения для компонент тензора Грина

$$u_{ml} = i\sum_{r} (2p_r)^{-1}\overline{a}_{rl}^{\pm}u_{rm}^{\pm} \pm i\sum_{k} (2p_k^{\pm})^{-1}\overline{a}_{kl}^{\mp}u_{km}^{\pm}$$

2. Рассмотрим статическую задачу ($\omega = 0$). В этом случае вещественная часть спектра задачи (1.2) состоит из двенадцатикратного СЗ $\gamma = 0$. Соответствующее инвариантное подпространство оператора T определяется следующей системой собственных и присоединенных векторов $\mathbf{v}_r = \{\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r\}$ $(r = \overline{1,12})$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1 = (1,0,0), \quad \mathbf{a}_2 = (0,0,-i\xi_1), \quad \mathbf{a}_3 = (0,1,0) \\ &\mathbf{a}_4 = (0,0,-i\xi_2), \quad \mathbf{a}_5 = (0,0,1), \quad \mathbf{a}_6 = (-\xi_2 + \xi_2^{*}, \xi_1 - \xi_1^{*}, 0) \\ &\mathbf{a}_7 = (0,0,i\theta_1), \quad \mathbf{a}_8 = (\psi_{11}, \psi_{12}, 0), \quad \mathbf{a}_9 = (0,0,i\theta_2) \\ &\mathbf{a}_{10} = (\psi_{21}, \psi_{22}, 0), \quad \mathbf{a}_{11} = (-i\nu\xi_1, -i\nu\xi_2, 0), \quad \mathbf{a}_{12} = (0,0,i\theta) \\ &\mathbf{b}_r = (0,0,0) \quad (r = \overline{1,6}) \\ &\mathbf{b}_7 = i(\tau_{11}, \tau_{12}, 0), \quad \mathbf{b}_8 = (0,0,-E_0\xi_1), \quad \mathbf{b}_9 = i(\tau_{21}, \tau_{22}, 0) \\ &\mathbf{b}_{10} = (0,0,-E_0\xi_2), \quad \mathbf{b}_{11} = (0,0,iE_0), \quad \mathbf{b}_{12} = i(\partial_2\Phi, -\partial_1\Phi, 0) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Кажому вектору $\mathbf{v}_r$ соответствует ЭР

$\mathbf{w}_r(\xi) = \{\mathbf{u}_r(\xi), \boldsymbol{\sigma}_r(\xi)\}$:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{u}_2 = i\xi\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{u}_4 = i\xi\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4$$

$$\mathbf{u}_5=\mathbf{a}_5,\quad \mathbf{u}_6=\mathbf{a}_6,\quad \mathbf{u}_7=\tfrac{1}{6}(i\xi)^3\mathbf{a}_1+\tfrac{1}{2}(i\xi)^2\mathbf{a}_2+i\xi\mathbf{a}_8+\mathbf{a}_7$$

$$\mathbf{u}_8=\tfrac{1}{2}(i\xi)^2\mathbf{a}_1+i\xi\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_8,\quad \mathbf{u}_9=\tfrac{1}{6}(i\xi)^3\mathbf{a}_3+\tfrac{1}{2}(i\xi)^2\mathbf{a}_4+i\xi\mathbf{a}_{10}+\mathbf{a}_9 \tag{2.2}$$

$$\mathbf{u}_{10}=\tfrac{1}{2}(i\xi)^2\mathbf{a}_3+i\xi\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_{10},\quad \mathbf{u}_{11}=i\xi\mathbf{a}_5+\mathbf{a}_{11},\quad \mathbf{u}_{12}=i\xi\mathbf{a}_6+\mathbf{a}_{12}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_r=(0,0,0)\quad (r=\overline{1,6})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_7=i\xi\mathbf{b}_8+\mathbf{b}_7,\quad \boldsymbol{\sigma}_8=\mathbf{b}_8,\quad \boldsymbol{\sigma}_9=i\xi\mathbf{b}_{10}+\mathbf{b}_9$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{10}=\mathbf{b}_{10},\quad \boldsymbol{\sigma}_{11}=\mathbf{b}_{11},\quad \boldsymbol{\sigma}_{12}=\mathbf{b}_{12}$$

В выражениях (2.1) $x_\alpha^*=h\xi_\alpha^*$ – координаты центра кручения,

$$\psi_{11}=-\psi_{22}=\nu/2(\xi_2^2-\xi_1^2),\quad \psi_{12}=\psi_{21}=-\nu\xi_1\xi_2$$

$$\tau_{\alpha\beta}=\partial_\beta\theta_\alpha+\psi_{\alpha\beta},\quad \alpha,\beta=1,2$$

Функции θ_1, θ_2, θ, Φ являются решениями краевых задач

$$\Delta\theta_\alpha=2\xi_\alpha,\quad n_\beta\partial_\beta\theta_\alpha|_{\partial S}=n_\beta\psi_{\alpha\beta}$$

$$\Delta\Phi=-2,\quad \partial_s\Phi|_{\partial S}=0$$

$$\Delta\theta=0,\quad n_\beta\partial_\beta\theta|_{\partial S}=\tfrac{1}{2}\partial_s(\xi_1^2+\xi_2^2) \tag{2.3}$$

$$E_0=2(1+\nu),\quad E=\mu E_0,$$

$$\Delta=\partial_1^2+\partial_2^2,\quad \partial_\alpha=\partial/\partial\xi_\alpha,\quad \partial_s=\partial/\partial s$$

μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, n_β – проекции единичной нормали к боковой поверхности цилиндра, s – переменная вдоль контура ∂S.

Все приведенные выше выражения записаны в безразмерных координатах $\xi_\alpha=h^{-1}x_\alpha$, где h – некоторый характерный линейный размер S. Векторы смещений и напряжений также безразмерны и получаются делением соответствующих размерных величин на μ и h.

Поскольку рассматривается статическая задача, то при построении вектор-функции Грина нет необходимости требовать, чтобы $\mathbf{G}_0^+$ и $\mathbf{G}_0^-$ удовлетворяли условию излучения, и поэтому нет необходимости от системы ЭР (2.2) переходить к фундаментальной системе ЭР [2]. Построение $\mathbf{G}^+$ и $\mathbf{G}^-$ можно осуществить, опираясь на следующие свойства.

Свойство 1. Системе ЭР (2.2) для $r=\overline{1,6}$ соответствует смещение цилиндра как твердого тела.

Из результатов работ [2, 9, 10] вытекают следующие свойства.

Свойство 2. Система векторов $M=\{\mathbf{v}_r,\mathbf{v}_k^+,\mathbf{v}_k^-\}$ $(r=\overline{1,12})$ является минимальной и полной в пространстве H'.

Свойство 3. Системы векторов $M_a^\pm=\{\mathbf{a}_r,\mathbf{a}_k^\pm\}$ $(r=\overline{1,6})$ и $M_b^\pm=\{\mathbf{b}_r,\mathbf{b}_k^\pm\}$ $(r=\overline{7,12})$ являются минимальными и полными в пространстве H.

Свойство 4. Имеют место следующие соотношения обобщенной ортогональности:

$$\begin{aligned}&[\mathbf{v}_{6+r},\mathbf{v}_t]=-i(\mathbf{b}_{6+r},\mathbf{a}_t)_H=p_r\delta_{rt},\quad r,t=\overline{1,6}\\&[\mathbf{v}_k^\pm,\mathbf{v}_t]=-i(\mathbf{b}_k^\pm,\mathbf{a}_t)_H=0,\quad t=\overline{1,6}\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь $p_1=p_2=D_1$, $p_3=p_4=D_2$, $p_5=D_p$, $p_6=D_{kp}$, $D_1=h^{-4}E_0I_2$, $D_2=h^{-4}E_0I_1$, $D_p=h^{-2}E_0|S|$, $D_{kp}=h^{-4}C$, I_1, I_2 – главные моменты инерции, $|S|$ – площадь сечения, C – геометрическя жесткость на кручение поперечного сечения.

Обратимся теперь к построению вектор-функции Грина. Свойства 1, 2 позволяют отыскивать ее в виде (1.9), при этом

$$\mathbf{G}_0 = \sum_{r=7}^{12} C_r^{\pm}\mathbf{w}_r(\xi) \tag{2.5}$$

На основе свойства 4 имеем

$$C_r^{\pm} = \pm(2p_r)^{-1} i(\bar{\mathbf{a}}_r' \cdot \mathbf{P}), \quad r = \overline{7,12} \tag{2.6}$$

$$C_k^{\pm} = \pm(2p_k^{\pm})^{-1} i(\bar{\mathbf{a}}_k' \cdot \mathbf{P}) \tag{2.7}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} / \mu h^2, \quad \mathbf{a}_s' = \mathbf{a}_s(\xi_1', \xi_2')$$

Учитывая, что $\mathbf{G}_0 = \{\mathbf{G}_{0u}, \mathbf{G}_{0\sigma}\}$, где $\mathbf{G}_{0u}$ и $\mathbf{G}_{0\sigma}$ – u- и σ-компоненты, на основании (2.5), (2.6) получаем выражения для тензора смещений и силового тензора

$$\mathbf{G}_{0u}^{\pm} = \mathbf{U}_{0u}^{\pm} \cdot \mathbf{e}, \quad \mathbf{G}_{0\sigma}^{\pm} = \mathbf{U}_{0\sigma}^{\pm} \cdot \mathbf{e} \tag{2.8}$$

$$\mathbf{U}_{0u}^{\pm} = \pm i \sum_{r=7}^{12} (2p_{r-6})^{-1} \mathbf{u}_r \bar{\mathbf{a}}_r', \quad \mathbf{U}_{0\sigma}^{\pm} = \pm i \sum_{r=7}^{12} (2p_{r-6})^{-1} \boldsymbol{\sigma}_r \bar{\mathbf{a}}_r'$$

Естественно, что построенное решение не имеет самостоятельного физического смысла. Поэтому его следует рассматривать как частное решение неоднородной задачи (1.1), которое является составной частью вектор-функции Грина (тензора Грина) различных краевых задач для цилиндра конечной длины.

3. В качестве примера рассмотрим краевую задачу для цилиндра конечной длины ($x \in [0, L]$), один торец которого жестко заделан, второй – свободен от напряжений. Цилиндр деформируется под воздействием сосредоточенной силы, приложенной в точке $O_1(x_1', x_2', x')$. Переходя к безразмерным координатам, решение будем отыскивать в виде

$$\mathbf{w}_G(\xi, \xi') = \mathbf{w}_0(\xi) + \mathbf{w}_1(\xi) + \mathbf{G}_0(\xi - \xi') + \mathbf{G}_1(\xi - \xi')$$

$$\mathbf{w}_0(\xi) = \sum_{r=1}^{12} A_r \mathbf{w}_r(\xi) \tag{3.1}$$

$$\mathbf{w}_1(\xi) = \sum_k [A_k^+ \mathbf{w}_k^+(\xi) + A_k^- \mathbf{w}_k^-(\xi - l)], \quad l = L / h$$

Коэффициенты разложения (3.1) определим, удовлетворяя граничным условиям

$$\mathbf{u}(0) = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}(l) = 0 \tag{3,2}$$

Подставляя (3.1) в (3.2), получаем

$$\sum_{r=1}^{12} A_r \mathbf{a}_r + \sum_k [A_k^+ \mathbf{a}_k^+ + A_k^- e^{-i\bar{\alpha}_k l} \mathbf{a}_k^-] = -\mathbf{G}_u^-(-\xi') \tag{3.3}$$

$$\sum_{r=7}^{12} A_r \boldsymbol{\sigma}_r(l) + \sum_k [A_k^+ e^{i\alpha_k l} \mathbf{b}_k^+ + A_k^- \mathbf{b}_k^-] = -\mathbf{G}_\sigma^+(l - \xi') \tag{3.4}$$

$$\alpha_k = h\gamma_k, \quad \alpha_k = \alpha_k^+$$

Функциональные соотношения (3.3), (3.4) можно свести к алгебраическим, если использовать свойство 3.

Так, последовательное скалярное умножение равенства (3.4) на элементы подмножества $\{\mathbf{a}_r\}_{r=1}^6$ с учетом (2.4), (2.5) позволяет определить коэффициенты A_r, $r = \overline{7,12}$.

Имеем

$$A_7 = -C_7^+, \quad A_8 = i\xi' C_7^+ - C_8^+, \quad A_9 = -C_9^+,$$
$$A_{10} = i\xi' C_9^+ - C_{10}^+; \quad A_{11} = -C_{11}^+, \quad A_{12} = -C_{12}^+ \tag{3.5}$$

Определение остальных коэффициентов разложения сводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений следующего вида:

$$\sum_k c'_{km} e^{i\alpha_k l} A_k^+ + \sum_k c_{km} A_k^- = d_{m1}$$
$$-\sum_k \bar{c}_{mk} A_k^+ + \sum_k c'_{mk} e^{-i\bar{\alpha}_k l} A_k^- = d_{m2} \tag{3.6}$$

$$ip_t A_t + \sum_k (c_{kt}^+ A_k^+ + c_{kt}^- e^{-i\bar{\alpha}_k l} A_k^-) = d_t$$
$$t = \overline{1,6} \tag{3.7}$$

Здесь

$$d_{m1} = -\sum_k c'_{km} P_k e^{i\alpha_k (l-\xi')}, \quad P_k = i(2p_k^+)^{-1}(\bar{\mathbf{a}}_k^- \cdot \mathbf{P})$$

$$d_{m2} = -\sum_{r=7}^{12} c_{rm}^+ A_r - (\mathbf{b}_m^+, \mathbf{G}_u(-\xi'))_H$$

$$d_t = \sum_{r=7}^{12} \varphi_{rt} C_r^+ + \sum_k c_{kt}^- e^{-i\bar{\alpha}_k \xi'} C_k^-$$

$$c_{km} = (\mathbf{b}_k^-, \mathbf{a}_m^-)_H, \quad c'_{km} = (\mathbf{b}_k^+, \mathbf{a}_m^-)_H, \quad c_{kt}^{\pm} = (\mathbf{b}_{6+t}, \mathbf{a}_k^{\pm})_H$$

$$c_{rm}^+ = (\mathbf{b}_m^+, \mathbf{a}_r)_H, \quad c_{rt} = (\mathbf{b}_{6+t}, \mathbf{a}_r)_H$$

$$\varphi_{rt} = -c_{rt} + (\mathbf{b}_{6+t}, \mathbf{u}_r(-\xi'))_H + i\xi' c_{rt}, \quad r = 7,9$$

$$\varphi_{rt} = -c_{rt} + (\mathbf{b}_{6+t}, \mathbf{u}_r(-\xi'))_H, \quad r = 8,10,11,12$$

В случае, когда $\varepsilon = l^{-1}$ – малый параметр, полученные выше соотношения позволяют провести асимптотический анализ различных краевых задач и получить точные асимптотические оценки для различных компонент напряженно-деформированного состояния.

Покажем это на примере классических задач Сен-Венана. Для этого во втором граничном условии (3.2) положим

$$\boldsymbol{\sigma}(l) = \boldsymbol{\sigma}^*(\xi_1, \xi_2), \quad \xi' = l$$

и введем новую переменную $\xi = l\zeta$. Применяя принцип суперпозиции, на основании (2.1), (2.6), (2.7) получаем

$$C_k^{\pm} = \pm i(2p_k^{\pm})^{-1} \int_S (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \bar{\mathbf{a}}_k^{\mp}) d\xi'_1 d\xi'_2$$

$$C_7^+ = \frac{iF_1^*}{2\mu h^2 D_1}, \quad C_8^+ = -\frac{M_1^*}{2\mu h^3 D_1}$$
$$C_9^+ = \frac{iF_2^*}{2\mu h^2 D_2}, \quad C_{10}^+ = \frac{M_2^*}{2\mu h^3 D_2} \tag{3.8}$$
$$C_{11}^+ = \frac{iF_3^*}{2\mu h^2 D_p}, \quad C_{12}^+ = \frac{iM_3^* + i(F_1^* \xi_2^* - F_2^* \xi_1^*)}{2\mu h^3 D_{kp}}$$

Здесь F_k^*, M_k^* проекции главного вектора и главного момента, приложенных к торцу цилиндра $\xi = l$.

Из соотношений (3.5), (3.8) видно, что коэффициенты A_r $(r = \overline{7,12})$ определяются точно.

Обращаясь к бесконечным системам (3.6) и пренебрегая в них суммами, содержащими экспоненциальные множители, можем сделать вывод, что коэффициенты A_k^- имеют порядок единицы относительно ε, а

$$A_k^+ = \varepsilon^{-1} B_k^{(0)} + B_k^{(1)} + O(e^{-\beta_* l}), \quad \beta_* = \inf_k (\operatorname{Im} \alpha_k)$$
$$B_k^{(0)} = \varphi_{7k} C_7^+ + \varphi_{9k} C_9^+, \quad B_k^{(1)} = \sum_{\substack{r=8 \\ r \neq 9}}^{12} \varphi_{rk} C_r^+ \tag{3.9}$$

Подставляя (3.12) в (3.8), получаем

$$A_t = \sum_{r=7}^{12} (\varphi_{rt} + \varphi'_{rt}) C_t^+ \tag{3.10}$$
$$\varphi'_{\alpha t} = \varepsilon^{-1} \sum_k c_{kt}^+ \varphi_{\alpha k}, \quad \alpha = 7,9; \quad \varphi'_{st} = \sum_k c_{kt}^+ \varphi_{sk}, \quad s = 8,10,11,12$$

На основании формул (3.10) теперь можно проанализировать, как влияют в данной задаче экспоненциальные решения (пограничный слой) на внутреннее деформированное состояние через постоянные $A_t (t = \overline{1,6})$ (на внутреннее напряженное состояние они не влияют, поскольку напряжения, соответствующие ЭР, содержащим эти коэффициенты, равны нулю). Так, у коэффициентов A_1 и A_3 главные члены имеют порядок ε^{-3}, а поправочный член, связанный со слагаемыми $\varphi'_{\alpha t} (\alpha = 7,9)$, имеет порядок ε^{-1}; у коэффициентов A_2 и A_4 главные члены имеют порядок ε^{-2}, поправочные – $O(1)$; у коэффициентов A_5, A_6 главные члены имеют порядок ε^{-1}, поправочные – $O(1)$.

Проведенный анализ позволяет получить точные асимптотические оценки для разностей $\upsilon_i(\zeta) = u_i(\zeta) - u_i^0(\zeta)$, $\upsilon'_i = u_i - u_i^{0'}$, $\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0$, где u_i, σ_{ij} – компоненты вектора смещений и тензора напряжений точного решения, u_i^0 – компоненты вектора смещений теории Сен-Венана в случае, когда

$$A_t = \sum_{r=7}^{12} C_r^+ \varphi_{rt} \tag{3.11}$$

где A_t определены без учета пограничного слоя; $u_i^{0'}$ – компоненты вектора смещений в случае, когда коэффициенты A_t определяются по формуле (3.10) (с учетом пограничных слоев).

В случае, когда $F_\alpha^* \neq 0$ $(\alpha = 1,2)$ среди компонент смещений главный порядок ε^{-3} имеет компонента u_α, у напряжений главный порядок ε^{-1} имеет σ_{33}, все остальные напряжения имеют порядок единицы, при этом

$$\varepsilon \upsilon_i = O(1), \quad \varepsilon \upsilon'_i = O(\chi), \quad \varepsilon \tau_{ij} = O(\chi) \tag{3.12}$$

В случае, когда $F_\alpha^* = 0$, $M_1^* \neq 0$, $M_2^* = 0$, главный порядок ε^{-2} имеет u_2, все напряжения имеют порядок единицы, при этом

$$\upsilon_i = O(1), \quad \upsilon'_i = O(\chi), \quad \tau_{ij} = O(\chi) \tag{3.13}$$

В случае, когда $F_\alpha^* = 0$, $F_3^* \neq 0$, $M_i^* \neq 0$, главный порядок ε^{-2} имеет смещение u_3, все напряжения имеют порядок единицы и выполняются оценки (3.13).

В случае, когда $F_i^* = 0$, $M_\alpha^* = 0$, $M_3^* \neq 0$, главный порядок ε^{-2} имеют смещения u_α, все напряжения имеют порядок единицы и выполняются оценки (3.13).

Оценки приведены для $0 < \zeta < 1$; $\chi = \exp(-\beta_* l\zeta)$ при $0 < \zeta < 1/2$, $\chi = \varepsilon \exp(-\beta_* l(1-\zeta))$ при $1/2 < \zeta < 1$.

Таким образом, учет пограничных слоев при определении смещений в задачах Сен-Венана позволяет получить для смещений более сильные оценки. На оценки для напряжений их учет не влияет.

Здесь уместно отметить, что, во-первых, полученные оценки для τ_{ij} строго обосновывают принцип Сен-Венана (впервые строгое его обоснование было дано Тупиным [11] (глубокие обобщения подхода Тупина получены в [12]), и во-вторых, оценки для υ_i' не могут быть усилены.

Опираясь на принцип суперпозиции и полученные выше соотношения, подобный асимптотический анализ можно провести и в случае произвольных распределенных объемных и поверхностных внешних усилий.

Определим теперь вектор-функцию Грина теории Сен-Венана рассмотренной краевой задачи как

$$\mathbf{w}_G = \mathbf{G}_0 + \mathbf{w}_0 = \sum_{r=7}^{12} C_r^+ \mathbf{g}_r(\xi, \xi') \tag{3.14}$$

где C_r^+ определены соотношениями (2.6), а

$$\mathbf{g}_r = \mathbf{g}_r^+, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant \xi'; \qquad \mathbf{g}_r = \mathbf{g}_r^-, \quad \xi < \xi \leqslant l$$

$$\mathbf{g}_r^\pm = \delta_{s,r+1} i\xi' \mathbf{w}_r(\xi) + \sum_{t=1}^{6} \varphi_{rt} \mathbf{w}_t(\xi) + \mathbf{w}_r(\xi - \xi')$$

На основании (3.14) очевидным образом получаются выражения для тензора смещений и силового тензора. Имеем

$$\mathbf{U}_u^0 = \sum_{r=7}^{12} g_{ru} \overline{\mathbf{a}}_r, \quad \mathbf{U}_\sigma^0 = \sum_{r=7}^{12} g_{r\sigma} \overline{\mathbf{a}}_r \tag{3.15}$$

где g_{ru} и $g_{r\sigma}$, u- и σ – компоненты вектора $\mathbf{g}_r$.

Если вместо сосредоченной силы $\mathbf{F}$, приложенной в точке $O_1(x_1', x_2', x')$, ввести эквивалентную систему, состоящую из силы $\mathbf{F}$ и момента $\mathbf{M}$, приложенных в точке $O_2(0,0,x')$, то выражение (3.14) можно рассматривать как решение краевой задачи в рамках прикладной теории, учитывающей сдвиг. Постоянные C_r^+ при этом следует вычислять по формулам (3.8), где $F_i^* = F_i$, $M_i^* = M_i$. Построению различных вариантов подобных теорий посвящено много работ, подробный обзор которых имеется в [13, 14][1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94–01–00159–а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* О потоке энергии при резонансах полуограниченных тел // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 2. С. 309–312.
2. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* Математическая теория твердых нерегулярных волноводов. Ростов н/Д: Изд. Рост. ун-та, 1993. 144 с.
3. *Приходько В.Ю.* О динамическом тензоре Грина для твердых волноводов // Прикл. механика. 1980. Т. 16. № 6. С. 124–128.

[1] *Елисеев В.В.* Одномерные и трехмерные модели в механике упругих стержней: Дис. ...д-ра физ.-мат. наук: 01.02.04. Л. 1991. 300 с.

4. *Бобровницкий Ю.И.* Соотношения ортогональности для волн Лэмба // Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 4. С. 513–515.
5. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
6. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* О распространении волн в упругом продольно-неоднородном цилиндре // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 103–108.
7. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
8. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 439 с.
9. *Костюченко А.Г., Оразов М.Б.* Задача о колебаниях упругого полуцилиндра и связанные с ней самосопряженные квадратичные пучки // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 1981. Вып. 6. С. 97–146.
10. *Шкаликов А.А.* Эллиптические уравнения в Гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 1989. Вып. 14. С. 140–224.
11. *Toupin R.A.* Sain-Venant's principle // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1965. V. 18. № 2. P. 83–96.
12. *Олейник О.А., Иосифьян Г.А.* Об условиях затухания и предельном поведении на бесконечности решений системы уравнений теории упругости // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258. № 3. С. 550–553.
13. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.
14. *Бердичевский В.Л., Квашнина С.С.* Об уравнениях, описывающих поперечные колебания упругих стержней // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 120–135.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
16.VI.1993