УДК 531.36

© 1996 г. В.В. Козлов, С.Д. Фурта

ПЕРВЫЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА ДЛЯ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Развивается классический первый метод Ляпунова в применении к сильно нелинейным системам. Указаны методы выделения "укорочений" таких систем, обладающих определенной группой симметрий. Наличие такой группы позволяет при достаточно общих предположениях находить частные решения укороченных систем с заданной асимптотикой, причем процесс их построения сводится к чисто алгебраической задаче. Показано, что эти решения могут быть достроены до решений полной системы при помощи некоторых рядов. Приведены также достаточные условия существования параметрических семейств решений полной системы, удовлетворяющих определенным асимптотическим свойствам. Разработанная теория иллюстрируется широким кругом примеров. Дано новое доказательство одного из случаев обращения теоремы Лагранжа–Дирихле об устойчивости равновесия. Проанализированы некоторые критические случаи устойчивости. Показано, что разработанный метод может также применяться для построения траекторий столкновений в задачах небесной механики в реальном временном масштабе.

1. Введение. Рассмотрим некоторую динамическую систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением с бесконечно дифференцируемой правой частью, для которого начало координат $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ является положением равновесия:

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

При помощи первого метода Ляпунова [1] можно конструктивно построить семейства решений (1.1), "примыкающих" к положению равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Картина поведения соответствующих траекторий позволяет сделать ряд качественных заключений о строении фазового портрета системы в окрестности положения равновесия. В частности, наличие "выходящей" из положения равновесия траектории означает его неустойчивость.

Пусть $\mathbf{A} = d\mathbf{f}(\mathbf{0})$ – матрица Якоби векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, вычисленная в положении равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Если характеристическое уравнение $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ имеет p корней $\lambda_1, ..., \lambda_p$ с отрицательной (положительной) вещественной частью, то (1.1) имеет p – параметрическое семейство частных решений, стремящихся к началу координат при $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$. Эти решения могут быть представлены в виде сходящихся при $t > 0$ $(t < 0)$ рядов

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j_1,\ldots,j_p=0}^{+\infty} \mathbf{x}_{j_1,\ldots,j_p}(t)\exp((j_1\lambda_1 + \ldots + j_p\lambda_p)t) \tag{1.2}$$

где $j_1 + ... + j_p \geqslant 1$, коэффициенты $\mathbf{x}_{j_1,\ldots,j_p}(t)$ зависят от t полиномиально и содержат p произвольных параметров, численные значения которых для обеспечения сходимости (1.2) должны быть достаточно малы. При этом первая частичная сумма

(1.2) является линейной комбинацией частных решений "укороченной" линейной системы

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1.3}$$

а остальные коэффициенты $\mathbf{x}_{j_1,\dots,j_p}(t)$ находятся рекуррентно.

Следует отметить, что (1.2) представляет, вообще говоря, комплексные решения (1.1). Если задаться целью нахождения действительных решений, то соответствующие ряды будут выглядеть гораздо сложнее.

Итак, первый метод Ляпунова в классическом "квазилинейном" варианте состоит фактически из трех основных шагов:

1) выделение укороченной (линейной) системы (1.3);

2) нахождение некоторого семейства частных решений укороченной системы;

3) "достраивание" найденных на предыдущем шаге решений укороченной системы до решений полной системы в виде некоторых рядов.

В теории динамических систем сильно нелинейной называют обычно такую систему, поведение определенного семейства траекторий в окрестности неподвижной точки которой не определяется лишь свойствами линеаризации соответствующего векторного поля в окрестности этой неподвижной точки. Так, например, в соответствии с этой терминологией к сильно нелинейным следует отнести системы, имеющие так называемые асимптотические траектории, т.е. стремящиеся к положению равновесия при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), характер стремления к положению равновесия которых не является экспоненциальным. Дальнейшей задачей будет именно нахождение достаточных условий существования и конструктивное построение такого типа траекторий.

В дальнейшем будем рассматривать лишь "суперкритический" случай, когда матрица $\mathbf{A}$ системы линейного приближения имеет только нулевые корни. На первый взгляд может показаться, что рассматриваемая ситуация является очень частной в огромном многообразии имеющихся критических случаев. Однако можно показать, что рассмотрение любого из критических случаев можно свести к данной сверхвырожденной ситуации.

Действительно, разложим фазовое пространство $\mathbb{R}^n$ рассматриваемой системы в прямую сумму подпространств, инвариантных относительно действия оператора $\mathbf{A}$:

$$\mathbb{R}^n = E^{(s)} \oplus E^{(u)} \oplus E^{(c)}$$

(s – от *stable*, u – от *unstable*, c – от *centre*), так что спектр сужения $\mathbf{A}^{(s)} = \mathbf{A}_{E^{(s)}}$ лежит в открытой левой полуплоскости, спектр $\mathbf{A}^{(u)} = \mathbf{A}_{E^{(u)}}$ – в правой, а спектр $\mathbf{A}^{(c)} = \mathbf{A}_{E^{(c)}}$ – на мнимой оси.

Если подпространство $E^{(c)}$ имеет ненулевую размерность, то система (1.1) имеет нетривиальное инвариантное многообразие, называемое центральным, касающееся подпространства $E^{(c)}$, такое, что линейная часть векторного поля, представляющего редуцированную на центральное многообразие динамическую систему, будет иметь матрицу $\mathbf{A}^{(c)}$ [2]. Поэтому для поиска неэкспоненциальных асимптотических решений достаточно рассмотреть систему на центральном многообразии, и без ограничения общности можно считать, что все корни системы линейного приближения (1.3) чисто мнимые.

Следующий шаг состоит в приведении системы к нормальной форме Пуанкаре [3]. Применим к системе (1.1) преобразование $\mathbf{x} \to \mathbf{y}$, представимое в виде формальных степенных рядов, сохраняющее линейную часть. Матрицу линейного приближения $\mathbf{A}$ представим в виде $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{J}$, где $\mathbf{D}$ – диагонализируемая часть, а $\mathbf{J}$ подобна жордановой матрице с нулевой диагональю. После указанного преобразования система (1.1) примет вид

$$\mathbf{y}^{\cdot} = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}) \tag{1.4}$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{J}\mathbf{y} + \dots$, а многоточие означает совокупность нелинейных членов.

Определение 1. Говорят, что система (1.4) имеет нормальную форму по Пуанкаре, если имеет место формальное тождество

$$\exp(\mathbf{D}t)\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{g}(\exp(\mathbf{D}t)\mathbf{y})$$

Теорема Пуанкаре–Дюлака [3] утверждает, что любая система может быть приведена к нормальной форме Пуанкаре. Следовательно, линейная неавтономная замена $\mathbf{z} = \exp(\mathbf{D}t)\mathbf{y}$ приводит (1.4) к системе

$$\mathbf{z}^{\cdot} = \mathbf{g}(\mathbf{z}) \tag{1.5}$$

линейная часть которой нильпотентна.

Строго говоря, связь между неэкспоненциальными асимптотическими решениями системы (1.5) и решениями исходной системы (1.1) нужно дополнительно обосновывать, поскольку нормализующее преобразование может расходиться. Не останавливаясь на этом вопросе, заметим лишь, что такое обоснование может быть получено при помощи абстрактной теоремы о неявной функции подобно тому, как это сделано в [4].

Итак, основная цель – поиск асимптотических решений неэкспоненциального типа для систем дифференциальных уравнений (1.1) с нильпотентной линейной частью. Будем решать даже более общую задачу. Пусть векторное поле $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ таково, что его компоненты $f^1, ..., f^n$ могут быть представлены в виде формальных степенных рядов (конечных или бесконечных)

$$f^j = \sum_{i_1,...,i_n} f^j_{i_1,...,i_n}(x^1)^{i_1}...(x^n)^{i_n} \tag{1.6}$$

где показатели $i_1,..., i_n$ – целые неотрицательные числа. На данном этапе не будем даже предполагать, что $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ – положение равновесия исходной системы. Для такого рода систем мы найдем достаточные условия, гарантирующие существование частных решений, компоненты которых имеют обобщенно степенную асимптотику либо при $t \to \pm 0$, либо при $t \to \pm\infty$ (в первом случае в силу автономности системы вместо нуля может стоять любое конечное число). При этом требования гладкости правых частей (1.1) лишь в некоторой малой окрестности $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ могут оказаться недостаточными. Поэтому будем все время негласно предполагать, что эти правые части являются бесконечно дифференцируемыми функциями в той области пространства, где предположительно находятся искомые решения.

Для выполнения поставленной задачи воспользуемся описанным выше сценарием первого метода Ляпунова, состоящего из трех этапов.

2. Выделение модельной укороченной системы. На этом этапе выделим из системы уравнений (1.1) некоторую более простую подсистему, повторяющую в известном смысле свойства полной системы. "Простота" укороченной, или, как ее еще называют, модельной, системы означает, что она обладает некоторыми свойствами симметрии, позволяющими в явном виде находить ее частные решения.

Если бы матрица линейного приближения была бы нулевой, то самый естественный способ "укорочения" системы – сохранение членов первого нетривиального порядка, т.е. выделение однородной подсистемы. К сожалению, такой метод далеко не всегда приводит к желаемым результатам. В "сильно нелинейной" теории в качестве укорочений используют также так называемые квазиоднородные системы, обладающие группой симметрий квазиоднородных растяжений, выделение которых из полной системы осуществляется при помощи техники многогранников Ньютона показателей разложений (1.6) [5, 6].

Обобщим понятия и определения, приведенные в [5, 6]. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений фуксова типа

$$\mu\frac{d\mathbf{x}}{d\mu} = \mathbf{G}\mathbf{x}, \quad \mu\frac{dt}{d\mu} = -t \tag{2.1}$$

где μ – некоторый действительный параметр, а $\mathbf{G}$ – действительная (необязательно диагональная) матрица, поток которой будем обозначать как

$$\mathbf{x} \mapsto \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}, \quad t \mapsto \mu^{-1}t \tag{2.2}$$

Определение 2. Векторное поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_q(\mathbf{x})$ назовем квазиоднородным, если соответствующая система дифференциальных уравнений инвариантна относительно действия фазового потока (2.2) фуксовой системы (2.1).

Индекс q (*quasihomogenity*) будет в дальнейшем приписываться правым частям квазиоднородных систем. В отдельных случаях под этим индексом будет пониматься также некоторая обобщенная "степень" квазиоднородности.

Если матрица $\mathbf{G}$ диагональна и ее элементы – положительные рациональные числа, то определение 2 совпадает по сути со стандартным определением квазиоднородных систем [5, 6]. Необходимость рассмотрения систем (2.1) с недиагональной матрицей $\mathbf{G}$ продемонстрируем позже на конкретных примерах.

Изучим вопрос, для какого типа систем квазиоднородные системы

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{f}_q(\mathbf{x}) \tag{2.3}$$

могут служить в качестве модельных.

Определение 3. Систему уравнений (1.1) назовем полуквазиоднородной, если под действием потока (2.2) ее правая часть преобразуется к виду

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{f}_q(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^*(\mathbf{x}, \mu) \tag{2.4}$$

где $\mathbf{f}_q(\mathbf{x})$ – некоторое квазиоднородное векторное поле, а $\mathbf{f}^*(\mathbf{x}, \mu)$ представляет собой формальный степенной ряд относительно μ^β, $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ без свободного члена. Если $\beta > 0$, систему (1.1) будем называть положительно полуквазиоднородной, и отрицательно полуквазиоднородной в случае отрицательности β.

Забегая вперед, заметим, что если система положительно полуквазиоднородна, то следует искать ее частные решения с обобщенно степенной асимптотикой при $t \to \pm\infty$, в противном же случае должна исследоваться асимптотика решений при $t \to \pm 0$. Отрицательно полуквазиоднородные системы имеют, как правило, лишь конечное число членов в разложении (1.6), т.е. являются полиномиальными.

Рассмотрим два простых примера.

Пример 1. Система уравнений

$$x^{\cdot} = y, \quad y^{\cdot} = ax^2$$

квазиоднородна относительно потока (2.2) фуксовой системы (2.1) с матрицей $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(2,3)$. С другой стороны, любая система вида

$$x^{\cdot} = y + X(x, y), \quad y^{\cdot} = ax^2 + Y(x, y)$$

где $X(0,0) = Y(0,0) = 0$, X, Y не содержат линейных членов и, более того, Y не содержит членов квадратичных по x, является полуквазиоднородной.

Пример 2. Система уравнений

$$x^{\cdot} = (x^2 + y^2)(ax - by), \quad y^{\cdot} = (x^2 + y^2)(ay + bx)$$

является, само собой разумеется, однородной степени 3. С другой стороны, она остается инвариантной относительно действия фазовых потоков следующего семейства фуксовых систем уравнений

$$\mu dx/d\mu = {}^1\!/_2 x + \delta y, \quad \mu dy/d\mu = {}^1\!/_2 y - \delta x, \quad \mu dt/d\mu = -t$$

Поэтому эта система квазиоднородна в смысле определения 2.

Далее любая система вида

$$x^{\cdot} = (\rho + f(\rho))(ax - by), \quad y^{\cdot} = (\rho + f(\rho))(ay + bx)$$

где $\rho = x^2 + y^2$ и $f(\rho) = o(\rho)$ при $\rho \to 0$, является полуквазиоднородной.

Таким образом, процесс нахождения всех нетривиальных укорочений исходной системы (1.1) состоит в нахождении семейства матриц $\mathbf{G}$ таких, чтобы под действием потока (2.2) система принимала вид (2.4).

3. Частные решения модельных систем. Благодаря квазиоднородности, в достаточно общей ситуации система (2.3) имеет частное решение в виде "квазиоднородного луча"

$$\mathbf{x}^{\gamma}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}}\mathbf{x}_0^{\gamma} \tag{3.1}$$

где $\gamma = \pm 1$, а $\mathbf{x}_0^{\gamma}$ – постоянный действительный вектор. Ниже уточним это понятие "достаточно общей ситуации".

Если (2.3) имеет частное решение вида (3.1), вектор $\mathbf{x}_0^{\gamma}$ должен удовлетворять следующей алгебраической системе уравнений:

$$-\gamma\mathbf{G}\mathbf{x}_0^{\gamma} = \mathbf{f}_q(\mathbf{x}_0^{\gamma}) \tag{3.2}$$

Вектор $\mathbf{x}_0^{\gamma}$ мы будем называть собственным вектором квазиоднородного векторного поля $\mathbf{f}_q(\mathbf{x})$, порожденного квазиоднородной структурой $\mathbf{G}$. Частное решение (3.1) укороченной системы (2.3) соответствует экспоненциальному частному решению линейной системы, существование которого влечет за собой существование частного решения полной системы с экспоненциальной асимптотикой.

В ляпуновском случае нахождение собственных векторов сводится к известной задаче линейной алгебры. В исследуемом же нелинейном случае поиск таких собственных векторов может оказаться нелегким. Тем не менее их существование в ряде случаев вытекает из достаточно простых геометрических соображений.

Пусть матрица $\mathbf{G}$ невырожденна. Из определения 2 непосредственно вытекает тождество

$$\mathbf{f}_q(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}) = \mu^{\mathbf{G}+\mathbf{E}}\mathbf{f}_q(\mathbf{x}) \tag{3.3}$$

Вектор $\mathbf{x}_0^{\gamma}$ будем искать в виде

$$\mathbf{x}_0^{\gamma} = \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{e}^{\gamma}$$

где μ – положительное число, а $\mathbf{e}^{\gamma} \in \mathbb{R}^n$, $\left\|\mathbf{e}^{\gamma}\right\| = 1$ – некоторый единичный вектор.

Уравнение (3.2) примет тогда вид

$$\mathbf{G}^{-1}\mathbf{f}_q(\mathbf{e}^{\gamma}) = -\gamma\mu^{-1}\mathbf{e}^{\gamma} \tag{3.4}$$

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ – единственная критическая точка квазиоднородного векторного поля $\mathbf{f}_q(\mathbf{x})$. Рассмотрим гауссово отображение

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{f}_q(\mathbf{p})}{\left\|\mathbf{G}^{-1}\mathbf{f}_q(\mathbf{p})\right\|}, \quad \mathbf{p} \in S^{n-1} \tag{3.5}$$

сферы S^{n-1} в себя.

Следующая лемма является квазиоднородным аналогом утверждений, сформулированных в [4, 7].

Лемма 1. Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ – единственная критическая точка квазиоднородного векторного поля $\mathbf{f}_q$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, тогда

1) если степень гауссова отображения Γ четна, то $\mathbf{f}_q$ имеет собственные векторы как с положительными, так и с отрицательными собственными значениями γ,

2) если размерность фазового пространства n нечетна, то $\mathbf{f}_q$ имеет хотя бы один собственный вектор либо с положительным, либо с отрицательным собственным значением.

Доказательство. Первое утверждение основано на известном топологическом результате [8] о том, что гауссово отображение сферы в себя, степень которого отлична от $(-1)^d$, где d – размерность сферы, всегда имеет неподвижную точку. Применив данный результат к отображению – $\mathbf{\Gamma}$, получим, что $\mathbf{\Gamma}$ имеет также и антиподальную точку. Следовательно, существуют единичные векторы $\mathbf{e}^+$, $\mathbf{e}^-$, для которых выполнено равенство (3.4), где

$$\mu = \left\| \mathbf{G}^{-1}\mathbf{f}_q(\mathbf{e}^\gamma) \right\|^{-1}$$

Для того, чтобы доказать п. 2, достаточно рассмотреть касательное векторное поле

$$\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{f}_q(\mathbf{p}) - \langle \mathbf{G}^{-1}\mathbf{f}_q(\mathbf{p}), \mathbf{p}\rangle \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} \in S^{n-1}$$

на сфере S^{n-1} четной размерности (здесь и далее знак $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$), на котором не существует гладкого векторного поля без нулей [8]. Поэтому можно найти такой вектор $\mathbf{e}^\gamma \in \mathbb{R}^n$, что имеет место равенство (3.4), где

$$\mu = \left| \left\langle \mathbf{G}^{-1}\mathbf{f}_q(\mathbf{e}^\gamma), \mathbf{e}^\gamma \right\rangle \right|^{-1}, \quad \gamma = -\operatorname{sign}\langle \mathbf{G}^{-1}\mathbf{f}_q(\mathbf{e}^\gamma), \mathbf{e}^\gamma \rangle$$

Поскольку вектор $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{f}_q(\mathbf{e}^\gamma)$ параллелен $\mathbf{e}^\gamma$, и $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ – единственная критическая точка векторного поля $\mathbf{f}_q$, то $\mu^{-1} \neq 0$.

Обсудим вопрос, почему необходимо рассматривать полуквазиоднородные системы, для которых квазиоднородная структура задается при помощи недиагональной матрицы $\mathbf{G}$.

Пусть система (1.1) получена при помощи редукции некоторой исходной системы на центральное многообразие, приведения к нормальной форме Пуанкаре и отбрасывания той части линейных членов, которые соответствуют диагонализируемой составляющей $\mathbf{D}$ матрицы $\mathbf{A}$, все собственные числа которой лежат на мнимой оси. Пусть система (1.1) полуквазиоднородна относительно квазиоднородной структуры, порождаемой некоторой матрицей $\mathbf{G}$.

Лемма 2. Пусть матрицы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{G}$ коммутируют, т.е. $\mathbf{DG} = \mathbf{GD}$. Тогда при сделанных выше предположениях система (1.1) полуквазиоднородна относительно семейства квазиоднородных структур, порожденных семейством матриц $\mathbf{G}_\delta = \mathbf{G} + \delta\mathbf{D}$, где δ – параметр семейства, с тем же самым укорочением.

Доказательство. Очевидно, что правые части (1.1) допускают формальные разложения в ряды по "квазиоднородным формам".

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{m=0} \mathbf{f}_{q+\chi m}(\mathbf{x})$$

Имеют место следующие тождества, обобщающие (3.3):

$$\mathbf{f}_{q+\chi m}(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}) = \mu^{\mathbf{G}+(1+\beta m)\mathbf{E}}\mathbf{f}_{q+\chi m}(\mathbf{x}), \quad \chi = \operatorname{sign}\beta \tag{3.6}$$

Воспользовавшись определением нормальной формы Пуанкаре, условием коммутирования матриц $\mathbf{D}$ и $\mathbf{G}$ и обозначив $\mu = e^{t/\delta}$, получим

$$\mathbf{f}(\mu^{\mathbf{G}_\delta}\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\exp(\mathbf{D}t)\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}) = \exp(\mathbf{D}t)\mathbf{f}(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}) = \mu^{\delta\mathbf{D}+\mathbf{G}+\mathbf{E}} \sum_{m=0} \mu^{\beta m}\mathbf{f}_{q+\chi m}(\mathbf{x})$$

что и требовалось доказать.

Пусть для простоты в рассматриваемом случае укороченная модельная система (2.3) является однородной степени $q \geqslant 2$. С другой стороны, эта система квазиоднородна относительно потока (2.2) фуксовой системы (2.1) с матрицей $\mathbf{G}_\delta$. Рассмотрение подобной конструкции диктуется следующими соображениями. Укороченная однородная система может не иметь действительных частных решений в виде прямолинейного луча

$$\mathbf{x}^\gamma(t) = (\gamma t)^{-\beta}\mathbf{x}_0^\gamma$$

Однако при некотором ненулевом δ она может иметь действительные решения в виде "закрученного" луча

$$\mathbf{x}^\gamma(t) = (\gamma t)^{-\beta}(\gamma t)^{-\delta \mathbf{D}}\mathbf{x}_0^\gamma$$

Подобная ситуация имеет место, например, в гамильтоновых системах при резонансах четных порядков [9].

4. Построение частных решений полной системы. Покажем, что сценарий первого метода Ляпунова как и в квазилинейном случае позволяет достроить частные решения (3.1) укороченной системы до решений полной системы в виде некоторых рядов.

Будем искать формальное решение системы уравнений (1.1) в виде ряда

$$\mathbf{x}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k(\ln(\gamma t))(\gamma t)^{-k\beta} \tag{4.1}$$

где коэффициенты $\mathbf{x}_k$ – некоторые полиномиальные вектор-функции.

Для того чтобы доказать, что такое формальное частное решение существует, сделаем в (1.1) замену зависимой и независимой переменных, используя тождество (3.6)

$$\mathbf{x}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}}\mathbf{y}(\gamma t), \qquad s = (\gamma t)^{-\beta}$$

в результате которой исходная система уравнений (1.1) примет вид

$$-\gamma\beta s\mathbf{y}' = \gamma\mathbf{G}\mathbf{y} + \sum_{m=0} s^m \mathbf{f}_{q+\chi m}(\mathbf{y}) \tag{4.2}$$

где штрих означает производную по новой независимой переменной s.

Формальное решение системы (4.2) превратится тогда в ряд

$$\mathbf{y}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k\left(-\tfrac{1}{\beta}\ln s\right)s^k \tag{4.3}$$

Подставим (4.3) в (4.2) и приравняем коэффициенты при s^k. Предполагая, что нулевой коэффициент $\mathbf{x}_0$ постоянен, при $k = 0$ получим в точности уравнение (3.2). Поэтому тот факт, что модельная система имеет частное решение вида (3.1), гарантирует возможность нахождения нулевого коэффициента в разложении (4.1). Для высших значений индекса k имеют место следующие системы уравнений:

$$\gamma\frac{d\mathbf{x}_k}{d\tau} - \mathbf{K}_k\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}_k(\mathbf{x}_0,\ldots,\mathbf{x}_{k-1}) \tag{4.4}$$

где $\mathbf{\Phi}_k$ – некоторые полиномиальные вектор-функции своих аргументов, $\tau = -\beta^{-1}\ln s =$ $= \ln(\gamma t)$, матрица $\mathbf{K}_k = k\gamma\beta\mathbf{E} + \mathbf{K}$, а

$$\mathbf{K} = \gamma\mathbf{G} + d\mathbf{f}_q(\mathbf{x}_0^\gamma) \tag{4.5}$$

– так называемая матрица Ковалевской [10].

Если предположить, что все коэффициенты вплоть до k-го найдены как некоторые полиномы от τ, то $\mathbf{\Phi}_k$ представляют собой некоторые известные полиномы от τ. Полученную систему (4.4) можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и полиномиальной правой частью, которая, как известно, всегда имеет некоторое полиномиальное частное решение $\mathbf{x}_k(\tau)$, степень которого равна $N_k + S_k$, где N_k – степень $\mathbf{\Phi}_k$ как полинома от τ, а

S_k – кратность нуля в ряду собственных значений матрицы $\mathbf{K}_k$. Таким образом, нахождение всех коэффициентов ряда (4.3) может быть осуществлено по индукции. Формальное построение частного асимптотического решения (1.1) в виде (4.1) тем самым завершено.

Отметим, что для положительно полуквазиоднородного случая ($\beta > 0$) логарифмы в разложениях (4.1) вообще говоря неубиваемы. Пользуясь методикой [10], можно показать, что $-\gamma$ всегда является собственным значением матрицы Ковалевской (4.5). В конкретных приложениях $\beta = 1/(q-1)$, где $q \geqslant 2$ – обобщенная степень квазиоднородности, поэтому матрица $\mathbf{K}_{q-1}$ всегда вырождена, что ведет в общем случае к появлению логарифмов.

Следующий шаг должен заключаться в доказательстве существования у системы (1.1) бесконечно-дифференцируемого частного решения, для которого (4.1) было бы асимптотическим разложением. В различных ситуациях это можно сделать либо опираясь на результаты работы [11], либо доказать непосредственно, используя методику [4].

Итак, имеет место

Теорема 1. Пусть система (1.1) полуквазиоднородна и пусть существует такой вектор $\mathbf{x}_0^\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0^\gamma \neq \mathbf{0}$ и число $\gamma = \pm 1$, что выполнено равенство (3.2). Тогда система (1.1) имеет частное решение с главным членом асимптотики $(\gamma t)^{-\mathbf{G}}\mathbf{x}_0^\gamma$ при $t^\chi \to \gamma \times \infty$, где $\chi = \operatorname{sign}\beta$ – "знак полуквазиоднородности".

Отметим ряд характерных черт, демонстрирующих схожесть изложенного выше метода с классическим вариантом первого метода Ляпунова. Если в (4.1) сделать замену времени $\tau = \ln(\gamma t)$, то фактически получим экспоненциальные ряды с коэффициентами, полиномиально зависящими от τ, т.е. использующиеся в первом методе Ляпунова. Поэтому для сильно нелинейных систем логарифмическое время является естественным.

При помощи первого метода Ляпунова можем установить существование не только одного частного решения, но и целого семейства решений, экспоненциально стремящихся к положению равновесия. Сформулируем аналогичный результат для сильно нелинейных систем.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и пусть p собственных чисел матрицы Ковалевской $\mathbf{K}$ имеют вещественные части, знак которых совпадает со знаком величины $-\gamma\chi$, а вещественные части остальных либо нулевые, либо имеют противоположный знак. Тогда (1.1) имеет p-параметрическое семейство частных решений вида

$$\mathbf{x}(\mathbf{c}, t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}}(\mathbf{x}_0^\gamma + o(1)) \quad \text{при} \quad t^\chi \to \gamma \times \infty$$

где $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^p[\mathbf{c}]$ – вектор параметров.

Доказательство основано на приведении системы (1.1) к квазилинейному виду.

Действительно, после замены

$$\mathbf{x}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}}(\mathbf{x}_0^\gamma + \mathbf{u}(\gamma t)), \quad \tau = \ln(\gamma t)$$

система (3.2) перепишется в виде

$$\gamma\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \mathbf{K}\mathbf{u} + \boldsymbol{\phi}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}, \tau) \tag{4.6}$$

Вектор-функции $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}$ обладают следующими свойствами: $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $d\boldsymbol{\phi}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, а функция $\boldsymbol{\psi}$ представима в виде степенного ряда относительно $e^{-\beta\tau}$ без свободного члена, так что $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}, \chi \times \infty) \equiv \mathbf{0}$.

Следовательно, для доказательства сформулированного утверждения можно воспользоваться методикой [12], заключающейся в сведении (4.6) к системе интегральных уравнений и применении принципа сжимающих отображений.

Конкретный вид семейств решений, о которых идет речь в теореме 2, достаточно сложен, особенно если искать только действительные решения, поэтому здесь его приводить не будем.

5. Пример: обращение теоремы Лагранжа–Дирихле. Покажем, как доказывается один из известных результатов об обращении теоремы Лагранжа–Дирихле об устойчивости [13, 14] при помощи изложенного выше метода.

Рассмотрим движение механической системы, описываемое при помощи гамильтоновой системы уравнений

$$\mathbf{p}^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{q}^{\cdot} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad (\mathbf{p},\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \tag{5.1}$$

где гамильтониан представим в виде суммы кинетической и потенциальной энергий $H = T + U$:

$$T = \tfrac{1}{2}\langle \mathbf{K}(\mathbf{q})\mathbf{p}, \mathbf{p}\rangle, \quad U = U(\mathbf{q})$$

Пусть потенциальная энергия и компоненты матрицы кинетической энергии – бесконечно-дифференцируемые функции в окрестности начала координат $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, которое является положением равновесия ($dU(\mathbf{0}) = 0$). Без ограничения общности будем также считать, что $U(\mathbf{0}) = 0$ и что $\mathbf{K}(\mathbf{0}) = \mathbf{E}$.

Пусть разложение потенциальной энергии в ряд Маклорена начинается с членов $(q + 1)$-го порядка, $q \geqslant 2$. Тогда система уравнений (5.1) полуквазиоднородна относительно структуры, задаваемой матрицей

$$\mathbf{G} = \mathrm{diag}((q + 1)\beta, ..., (q + 1)\beta, 2\beta, ..., 2\beta), \quad \beta = 1/(q - 1)$$

Соответствующая укороченная система имеет вид

$$\mathbf{p}^{\cdot} = -\frac{\partial U_{q+1}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q}^{\cdot} = \mathbf{p} \tag{5.2}$$

Если первая нетривиальная форма U_{q+1} разложения потенциальной энергии не имеет минимума, то модельная система (5.2) имеет частное решение в виде квазиоднородного луча

$$\mathbf{p}^+(t) = -2\beta\mathbf{c}t^{-(q+1)\beta}, \quad \mathbf{q}^+(t) = \mathbf{c}t^{-2\beta}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$$

где вектор $\mathbf{c}$ параллелен единичному вектору, на котором однородная форма U_{q+1} достигает своего минимума на единичной сфере с центром в нуле.

Следовательно, полная система (5.1) имеет частное решение $(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) \to (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ при $t \to +\infty$, откуда в силу обратимости (5.1) сразу следует неустойчивость положения равновесия.

6. Пример: обобщение критерия Ляпунова. Получим достаточные условия неустойчивости положения равновесия системы дифференциальных уравнений, линейная часть которой представляет собой жорданову клетку размерности большей двух с нулевой диагональю. Для двумерного случая исчерпывающий критерий неустойчивости был найден Ляпуновым [1].

Исследуемую систему уравнений запишем в следующем виде

$$x_i^{\cdot} = x_{i+1} + \ldots, i = 1, \ldots, n-1; \quad x_n^{\cdot} = ax_1^2 + \ldots \tag{6.1}$$

где многоточия означают совокупность нелинейных членов, из которых в последнем уравнении выделен моном ax_1^2. Легко заметить, что выделенная система квазиоднородна относительно структуры, определяемой диагональной матрицей

$$\mathbf{G} = \mathrm{diag}(n, n + 1, ..., 2n - 1)$$

Можно показать, что система (6.1) положительно полуквазиоднородна ($\chi = +1$). Если коэффициент $a \neq 0$, то квазиоднородное укорочение имеет частное асимптотическое решение

$$\mathbf{x}^+(t) = t^{-\mathbf{G}}\mathbf{x}_0^+, \quad \text{или} \quad x_i^+(t) = x_{0_i}^+ / t^{n+i+1}, \quad i = 1,\ldots,n$$

где

$$x_{0_i}^+ = (-1)^{n+i-1}\frac{(2n-1)!(n+i-2)!}{a((n-1)!)^2}, \quad i = 1,\ldots,n$$

откуда следует, что полная система имеет частное асимптотическое решение $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ при $t \to +\infty$.

Аналогично можно доказать существование частного асимптотического решения (6.1) $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ при $t \to -\infty$, что означает неустойчивость.

Пусть в системе (6.1) имеет место дополнительное вырождение ($a = 0$). Остановимся на случае $n \geqslant 3$.

Перепишем систему (6.1) в следующем виде:

$$\dot{x_i} = x_{i+1} + \ldots, i = 1,\ldots,n-2; \quad \dot{x}_{n-1} = x_n + bx_1^2 + \ldots, \quad \dot{x}_n = 2cx_1x_2 + \ldots \tag{6.2}$$

Здесь многоточия также означают совокупность нелинейных членов, из которых в предпоследнем уравнении выделен моном bx_1^2, а в последнем – $2cx_1x_2$. Выделенная система квазиоднородна с диагональной матрицей $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(n-1, n, \ldots, 2n-2)$. Если $b + c \neq 0$, то система (6.2) имеет частное асимптотическое решение вида

$$\mathbf{x}^+(t) = t^{-\mathbf{G}}\mathbf{x}_0^+, \quad \text{или} \quad x_i^+(t) = x_{0_i}^+ / t^{n+i-2}, \quad i = 1,\ldots,n$$

$$x_{0_i}^+ = (-1)^{n+i}\frac{(2n-3)!(n+i-3)!}{(b+c)(n-2)!^2}, \quad i = 1,\ldots,n-1, \quad x_{0_n}^+ = c\left(\frac{(2n-3)!}{(b+c)(n-2)!}\right)^2$$

Можно показать, что полная система положительно полуквазиоднородна, поэтому система (6.2) имеет асимптотическое решение $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ при $t \to +\infty$. Можно показать также существование решения, стремящегося к $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ при $t \to -\infty$, что гарантирует неустойчивость.

Вообще говоря, для доказательства существования асимптотических при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ решений системы (6.1) достаточно было бы воспользоваться леммой 2. В силу определенных свойств симметрии правой части этой системы любое некритическое значение гауссова отображения (3.5) имеет парные прообразы, поэтому степень отображения (3.5) четна.

7. Пример: асимптотические траектории общих систем дифференциальных уравнений при резонансе частот 1:1 и непростых элементарных делителях. Рассмотрим данную задачу для иллюстрации леммы 2. Устойчивость соответствующей системы изучалась в [6].

Модельная система имеет вид [6]

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, & \dot{y_1} &= y_2 \\ \dot{x_2} &= (ax_1 - by_1)(x_1^2 + y_1^2), & \dot{y_2} &= (bx_1 + ay_1)(x_1^2 + y_1^2) \end{aligned} \tag{7.1}$$

Очевидно, эта система квазиоднородна с матрицей $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(1,1,2,2)$, коммутирующей с диагонализируемой частью матрицы линейного приближения, которую мы обозначим $\mathbf{D}$. Поэтому полная система полуквазиоднородна относительно структур, порождаемых семейством матриц $\mathbf{G}_\delta = \mathbf{G} + \delta\mathbf{D}$. Можно проверить, что система (7.1) не имеет действительных частных решений в виде квазиоднородных лучей.

Будем искать частные решения этой системы в виде "закрученных" лучей. При этом заметим, что в силу обратимости уравнений модельной системы условия существования таких решений будут одинаковыми как для $\gamma = +1$, так и для $\gamma = -1$, поэтому ниже индекс γ будем опускать.

Итак,

$$x_s = t^{-s}\left(x_{0_s}\cos\varphi - y_{0_s}\sin\varphi\right), \quad y_s = t^{-s}\left(x_{0_s}\sin\varphi + y_{0_s}\cos\varphi\right)$$

$$s = 1, 2; \qquad \varphi = \delta \ln t$$

Тогда система алгебраических уравнений (3.2) имеет однопараметрическое семейство решений

$$x_{0_1} = \rho\cos\theta, \quad y_{0_1} = \rho\sin\theta;$$

$$x_{0_2} = \rho(\delta\sin\theta - \cos\theta), \quad y_{0_2} = -\rho(\delta\cos\theta + \sin\theta)$$

где θ – параметр семейства, а величины $\delta, \rho > 0$ удовлетворяют системе уравнений

$$a\rho^2 + \delta^2 - 2 = 0, \qquad 3\delta - b\rho^2 = 0$$

В комплексной форме условия разрешимости этой последней системы уравнений выглядят следующим образом: $c \neq -|c|$ $(c = a + ib)$, т.е. совпадают с условиями неустойчивости, найденными в [6].

Итак, при выполнении этих условий исходная полная система дифференциальных уравнений имеет частные решения, стремящиеся к положению равновесия как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$.

8. Пример: траектории столкновений в задаче Хилла. До сих пор рассматривались только положительно полуквазиоднородные системы. Система уравнений задачи Хилла интересна тем, что может трактоваться как отрицательно полуквазиоднородная.

Рассмотрим гамильтонову систему уравнений с функцией Гамильтона

$$H = \tfrac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + p_x y - p_y x - x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 - (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{8.1}$$

Эти уравнения описывают плоское движение спутника малой массы, например Луны, в поле притяжения двух тел, масса одного из которых мала по сравнению с массой другого, например Земли и Солнца. Подробную постановку задачи можно найти в [15]. Уравнения с гамильтонианом (8.1) описывают также в некотором приближении взаимное движение двух спутников массивного притягивающего тела по близким орбитам [16].

Введя новую вспомогательную переменную $s = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$, получим полиномиальную систему уравнений пятого порядка

$$\begin{aligned} &p_x^{\cdot} = p_y + 2x - xs^3, \quad x^{\cdot} = p_x + y \\ &p_y^{\cdot} = -p_x - y - ys^3, \quad y^{\cdot} = p_y - x \\ &s^{\cdot} = -xp_x s^3 - yp_y s^3 \end{aligned} \tag{8.2}$$

Введя квазиоднородную шкалу для фазовых переменных

$$p_x \mapsto \mu^{g_{p_x}} p_x, \quad x \mapsto \mu^{g_x} x, \quad p_y \mapsto \mu^{g_{p_y}} p_y, \quad y \mapsto \mu^{g_y} y, \quad s \mapsto \mu^{g_s} s, \quad t \mapsto \mu^{-1} t,$$

найдем возможные укорочения.

Если выбрать

$$g_{p_x} = -\tfrac{2}{3}, \quad g_x = -\tfrac{5}{3}, \quad g_{p_y} = \tfrac{1}{3}, \quad g_y = -\tfrac{2}{3}, \quad g_s = \tfrac{2}{3}$$

то система уравнений (8.2) преобразуется к виду, из которого следует, что относительно введенной "шкалы" система (8.2) отрицательно полуквазиоднородна. Положив $\mu = \infty$, получим укороченную квазиоднородную систему, имеющую частное решение

$$p_x = p_{x_0} t^{2/3}, \quad x = x_0 t^{5/3}, \quad p_y = p_{y_0} t^{-1/3}, \quad y = y_0 t^{2/3}, \quad s = s_0 t^{-2/3} \tag{8.3}$$

где

$$p_{x_0} = \pm 2/3 s_0^{-1}, \quad x_0 = \pm s_0^{-1}, \quad p_{y_0} = \pm 2/3 s_0^{-1}, \quad y_0 = \pm s_0^{-1}, \quad s_0 = (2/9)^{1/3} \tag{8.4}$$

В соответствии с теоремой 1 гамильтонова система уравнений с гамильтонианом (8.1) имеет частное решение, допускающее асимптотическое разложение (суммирование от $k = 0$ до $k = \infty$)

$$\begin{aligned} p_x(t) &= t^{2/3} \sum p_{x_k} t^{k/3}, \quad x(t) = t^{5/3} \sum x_k t^{k/3} \\ p_y(t) &= t^{-1/3} \sum p_{y_k} t^{k/3}, \quad y(t) = t^{2/3} \sum y_k t^{k/3} \end{aligned} \tag{8.5}$$

Если же выбрать

$$g_{p_x} = 1/3, \quad g_x = -2/3, \quad g_{p_y} = -2/3, \quad g_y = -5/3, \quad g_s = 2/3$$

то система (8.2) при $\mu = \infty$ переходит в укороченную систему, которая имеет частное решение вида (8.3) при замене x на y и y на x, где p_{x_0}, x_0, s_0 – те же, что и в (8.4), а p_{y_0}, y_0 имеют противоположный знак.

Следовательно, исходная система уравнений имеет частное решение с асимптотическим разложением, аналогичным (8.5), первые члены которого описаны выше.

Применение в общем виде алгоритма построения формальных асимптотик вида (4.1), изложенного в разд. 4, предусматривает полиномиальную зависимость коэффициентов разложения (8.5) от $\ln t$. Однако простые, хотя и утомительные вычисления показывают, что коэффициенты p_{x_k}, x_k, p_{y_k}, y_k постоянны.

Траектории задачи Хилла, отвечающие частным решениям с асимптотическими разложениями (8.5), являются так называемыми траекториями столкновений. На этих траекториях происходит столкновение меньшего притягивающего тела и спутника (Земли и Луны) за конечное время (относительно выбранного начала отсчета при $t \to 0$). Алгоритм, изложенный в разд. 4, позволяет рекуррентно находить коэффициенты этих разложений и, следовательно, конструктивно строить траектории столкновений в масштабе "реального времени". До сих пор при рассмотрении проблемы столкновений в задаче Хилла уравнения движения подвергали регуляризующим заменам переменных, введенным Биркгофом [17], которые приводят к гамильтоновым системам, зависящим от постоянной энергии как от параметра. При этом истинные движения могут лежать лишь на нулевом уровне энергии новой системы, что, разумеется, не очень удобно для исследования.

9. Библиографические замечания. Как ни странно, первые работы, посвященные частным решениям систем дифференциальных уравнений с неэкспоненциальной асимптотикой, появились существенно раньше Ляпуновской "*Общей задачи об устойчивости движения*", где строится теория решений с экспоненциальной асимптотикой. Здесь имеется в виду прежде всего работа Брио и Буке [18]. Используя методику [18], Г.В. Каменков доказал теорему о неустойчивости [19], идейно очень близкую к теореме 1. Отличия результата Каменкова от теоремы 1 заключаются в следующем: во-первых, в качестве укорочений Каменков рассматривал только однородные системы; во-вторых, он строил не решения системы типа (1.1) в виде рядов (4.1) по времени, а некоторые примыкающие к положению равновесия инвариантные кривые также в виде рядов относительно некоторой вспомогательной переменной x_1, напоминающих (4.1); в-третьих, поскольку Каменков интересовался лишь задачами устойчивости, его методика непригодна для построения решений, имеющих обобщенно степенную асимптотику при $t \to 0$. К сожалению, теорема Каменкова была малоизвестна исследователям, поэтому с минимальными изменениями она была передоказана в [20] без ссылки на работу Каменкова [19]. В [20] содержится также аналог теоремы 2 для случая однородных укорочений. Одной из первых работ, где отмечалось, что однородные укорочения не всегда определяют картину поведения траекторий в окрестности особой точки была работа [21]. В ней предлагалось в качестве укороченных систем использовать квазиоднородные системы, выделение которых осуществлялось при помощи техники многогранников Ньютона. В этой же работе указывались пути конструктивного нахождения решений укороченных систем в виде квазиоднородных лучей. Однако проблема достраивания этих решений до решений полной системы в [21] и в последующих работах, выполненных в этом направлении, не рассматривалась. Подход, основанный на выделении укорочений при помощи потоков фуксовых систем, является, по-видимому, новым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Харьков: Издание Харьк. мат. об-ва, 1892. 250 с.
2. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
3. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
4. *Фурта С.Д.* Об асимптотических решениях систем дифференциальных уравнений в случае чисто мнимых собственных значений // Дифференц. уравнения, 1990. Т. 26. № 8. С. 1348–1351.
5. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.
6. *Хазин Л.Г., Шноль Э.Э.* Устойчивость критических положений равновесия. Пущино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985. 215 с.
7. *Козлов В.В.* Об асимптотических движениях систем с диссипацией // ПММ, 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 31–36.
8. *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972. 277 с.
9. *Маркеев А.П.* Резонансы и асимптотические траектории в системах Гамильтона // ПММ, 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 207–212.
10. *Yoshida H.* Necessary condition for the existence of algebraic first integrals I, II // Celest. Mech. 1983. V. 31. № 4. P. 363–379; 381–399.
11. *Кузнецов А.Н.* О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением // Функц. анализ и его приложения, 1989. Т. 23. Вып. 4. С. 63–74.
12. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
13. *Козлов В.В.* Асимптотические решения уравнений классической механики // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 573–577.
14. *Козлов В.В., Паламодов В.П.* Об асимптотических решениях уравнений классической механики // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 2. С. 285–289.
15. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964. 560 с.
16. *Spirig F., Waldvogel J.* Chaos in coorbital motion // Predictability, Stability and Chaos in N-Body Dynamical Systems, ed. by Archie E. Roy, New York: Plenum Press, 1991. P. 395–410.
17. *Birkhoff G.* The restricted problem of three bodies // Rend circ. mat., Palermo, 1915. V. 39. P. 265–334.
18. *Briot C., Bouquet T.* Recherches sur les proprietes des equations differentielles // J. Ecole polytechn., Paris, 1856. V. 21. № 36. P. 133–199.
19. *Каменков Г.В.* Избранные труды. М.: Наука, 1971. Т. 1. 258 с.; 1972. Т. 2. 214 с.
20. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. М.: Высш. шк., 1973. 271 с.
21. *Брюно А.Д.* Степенные асимптотики решений нелинейных систем // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965. Т. 29. № 2. С. 329–364.

Москва

Поступила в редакцию
14.III.1995