УДК 62–50

© 1995 г. С.И. Морина, А.Г. Ченцов

ОГРАНИЧЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ ДОСТИЖИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассматриваются вопросы структуры асимптотически достижимых элементов (АДЭ), порождаемых действием "управлений", соблюдающих с высокой степенью точности невыпуклые, вообще говоря, ограничения функционального характера. Не предполагается выполнения условий ресурсного характера, что приводит к "неограниченной" постановке задачи об асимптотике областей достижимости и их абстрактных аналогов. В терминах обобщенной задачи в классе векторных конечно-аддитивных мер установлены необходимые и достаточные условия исчерпывающей реализации АДЭ в классе интегрально ограниченных приближенных решений.

1. Постановка задачи. Будем исследовать область достижимости линейной управляемой системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)f(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \theta_0 \tag{1.1}$$

Пусть фазовое пространство системы (1.1) имеет размерность n. Рассматривается область достижимости по первым k координатам в момент θ_0 ($k \leqslant n$), определяемая, подобно [1–3], как множество всех конечных состояний при переборе векторных управляющих программ $f = (f_1, \ldots, f_r)$, где r – натуральное число, с соблюдением условия

$$\int_{t_0}^{\theta_0} S(t)f(t)dt \in \mathbf{Y} \tag{1.2}$$

Здесь $A(\cdot)$ – непрерывный покомпонентно матрицант ($n \times n$) на $[t_0, \theta_0]$, компоненты ($n \times r$)-матрицанта $B(\cdot)$, определенного на $[t_0, \theta_0[$, получены каждая склейкой конечного числа сужений (на промежутки вида $[\alpha, \beta[$, где $t_0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \theta_0$) функций, непрерывных на $[t_0, \theta_0]$. Структура матрицанта $S(\cdot)$ полагается такой же, как и в случае $B(\cdot)$, а "размерность" $S(\cdot)$ равна $m \times r$; $\mathbf{Y}$ – замкнутое множество в m-мерном пространстве $\mathbf{R}^m$. Относительно управляющих программ $f = (f_1, \ldots, f_r)$ будем полагать, что все их компоненты кусочно-постоянны, непрерывны справа и неотрицательны.

Пусть F – множество всех таких (кусочно-постоянных, непрерывных справа и неотрицательных покомпонентно) управляющих программ $f = (f_1, \ldots, f_r)$. Если $f \in F$, то через $x_f(\cdot) = (x_f(t), t_0 \leqslant t \leqslant \theta_0)$ обозначаем траекторию системы (1.1), порожденную программой f из начальной позиции (t_0, x_0). Пусть π – оператор проектирования $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}^k$, ставящий в соответствие произвольному n-мерному вектору вектор первых k координат. Тогда, наряду с точками $\pi(x_f(\theta_0))$, непосредственно формирующими область достижимости при соблюдении (1.2), имеет смысл рассматривать их пределы, т.е. пределы последовательностей

$$p \mapsto \pi(x_{f_p}(\theta_0)): \quad N \to \mathbf{R}^k \tag{1.3}$$

отвечающих приближенным решениям $(f_p)_1^\infty$ в F, для которых с некоторого момента соблюдается каждое ослабленное (до ε-окрестности в правой части (1.2), $\varepsilon > 0$) условие типа (1.2). Если $z_* \in \mathbf{R}^k$ удовлетворяет упомянутому условию асимптотической достижимости, то возникает вопрос о свойствах приближенных решений $(f_p)_1^\infty$, реализующих z_* в виде предела последовательности (1.3). Ниже обсуждаются условия ("ограниченной") реализации z_*, при которых каждый вариант решения-последовательности $(f_p)_1^\infty$ со свойством сходимости (1.3) к z_* (и со свойством ε-соблюдения (1.2) для почти всех $p \in N$ при $\varepsilon > 0$) обладает ограниченной последовательностью энергозатрат.

Рассмотрим в этой связи простейший пример задачи управления материальной точкой на прямой. В этом случае система (1.1) имеет вид ($n = 2$, $k = 1$)

$$\dot{x}_1(t) = x_2, \quad \dot{x}_2(t) = f(t) \tag{1.4}$$

с нулевыми начальными условиями $x_{01} = x_{02} = 0$; $t_0 \triangleq 0$, $\theta_0 \triangleq 1$.

В качестве условия (1.2) будем использовать условие $x_{f,1}(1) = 1/2$ (сведение к виду (1.2) очевидно и здесь опущено). Отметим, что существует (скалярное) управление $f \in F$, для которого точно соблюдается вышеупомянутое условие (например, таково управление, тождественно равное единице). Поэтому точка $z_* = 1/2$ тем более допускает асимптотическую реализацию в классе интегрально ограниченных приближенных решений (решение-последовательность $(f_p)_1^\infty$ в данном случае можно выбрать стационарной). С другой стороны, существует и "неограниченный" вариант асимптотической реализации той же точки z_*.

Действительно, если $\delta \in \,]0, 1[$, определим $f^{(\delta)} \in F$ как функцию, отличную от нуля лишь на промежутке $[1 - \delta, 1[$ и принимающую на этом промежутке постоянное значение δ^{-2}. Если теперь сформировать секвенциальное приближенное решение $(f_p)_1^\infty$ как последовательность, у которой

$$f_q = f^{(\delta)}\Big|_{\delta=(2q)^{-1}} \quad (q \in N)$$

то, в частности, получим вариант неограниченной асимптотической реализации точки z_*. Разумеется, в данном конкретном случае по существу речь идет о бесконечно многих вариантах точной реализации z_*, откуда, в частности, вытекают суждения о реализации асимптотической. Тем не менее и данный, весьма схематичный, пример уже показывает, что для выбранной исследователем точки могут существовать одновременно принципиально различные способы ее асимптотической реализации на терминальных состояниях системы (1.1). Во многих случаях асимптотическая реализация z_* непременно "ограниченна", так что свойство асимптотической достижимости данной точки имеет в некотором смысле лучшее качество.

В самом деле, если при том же условии $x_{f,1}(1) = 1/2$, рассмотрим построение множества асимптотической достижимости [4] в полном фазовом пространстве, то при выборе плоского вектора z_* из этого множества любой вариант асимптотической реализации z_* оказывается "ограниченным" (за счет скоростной координаты). Само условие $x_{f,1}(1) = 1/2$ может быть заменено при этом и более общим (см. (1.2)), но утверждение о характере асимптотической реализации остается прежним. В отношении же вышеупомянутого "простого" условия заметим, что асимптотически достижимыми являются здесь всевозможные точки $(1/2\,;\,\upsilon)$, $\upsilon \geqslant 1/2$.

Рассмотрим еще один аналогичный пример для следующей простейшей управляемой системы ($n = 1$, $r = 1$):

$$\dot{x}(t) = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Ограничения на выбор управления имеют вид

$$\int_0^1 tf(t)\,dt \leqslant 0, \quad f \in F \tag{1.5}$$

Пусть задан функционал

$$f \mapsto g\left(\int_0^1 f(t)dt\right): \quad F \to \mathbf{R}$$

$$g: \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 2|x-1/2|, & -\infty \leqslant x \leqslant 1 \\ 1/x, & 1 \leqslant x \leqslant +\infty \end{cases}$$

Рассмотрим точку $z^* = 0$.

С одной стороны, эта точка реализуется как предел последовательности

$$\left(g\left(\int_0^1 f_n(t)dt\right)\right)_1^\infty, \quad f_n(t) = \begin{cases} n/2 & 0 \leqslant t < 1/n \\ 0, & 1/n \leqslant x < 1 \end{cases}, \quad \forall n \in N$$

Очевидно, для управления f_n соблюдается (для почти всех $n \in N$) с точностью до $\varepsilon > 0$ ограничение (1.5) и

$$\forall n \in N: \quad \int_0^1 f_n(t)dt = \frac{1}{2}$$

Таким образом, $(f_n)_1^\infty$ – интегрально ограниченное приближенное решение, реализующее на значениях оператора g в пределе (а на самом деле, точно) точку $z_* = 0$.

С другой стороны, рассмотрим последовательность

$$(h_n)_1^\infty: \quad h_n(t) = \begin{cases} n^3, & 0 \leqslant t < 1/n^2 \\ 0, & 1/n^2 \leqslant t < 1 \end{cases}$$

Очевидно, $(h_n)_1^\infty$ – приближенное решение, реализующее на значениях оператора g ту же самую точку $z_* = 0$, но не являющееся при этом интегрально ограниченным. Здесь учитывается, что

$$\int_0^1 th_n(t)dt = \int_0^{1/n^2} n^3 tdt = \frac{1}{2n} \to 0$$

Из рассмотренных простейших примеров видно, что асимптотически достижимый элемент z_* допускает и ограниченную, и не ограниченную реализацию. Представляет интерес определение условий, исключающих "неограниченный" вариант асимптотической реализации z_*. Исследованию таких условий и посвящена работа. Отметим, что в основе изучаемого явления заключены свойства, имеющие место не только в задачах управления. Другой важный пример такого рода можно получить, рассматривая ограничения типа неравенств, типичные для задач математического программирования. Имеются и другие реализации рассматриваемой далее общей конструкции, в которой специфика задач управления не используется. В этих общих построениях рассматривается "оператор системы" со значениями в топологическом пространстве.

Необходимость в такого рода обобщении возникает уже в задачах управления системой (1.1), (1.2), если речь идет об исследовании асимптотики траекторий, а не только их концевых значений. В этом случае роль точки z_* играет разрывная, вообще говоря, вектор-функция; для описания предельного перехода здесь целесообразно использовать топологию поточечной сходимости. В этой связи в дальнейшем рассматривается специальная топологическая конструкция, позволяющая исследовать с общих позиций вопросы асимптотической реализации, привлекая при необходимости понятие сходимости по Мору–Смиту [5].

2. Общие определения и обозначения. Используем аппарат общей топологии и конечно-аддитивной теории меры, который требуется для исследования данного круга прикладных задач. В дальнейшем используются кванторы, связки. Будем использовать следующее соглашение. Выражение $\underset{X}{\forall S}[X \neq \emptyset]$ $(\underset{X}{\exists S}[X \neq \emptyset]$ используется для сокращенной записи высказывания: для всякого множества (существует множество) X, $X \neq \emptyset$. Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую; $N = \{1, 2, ...\}$. Полагаем $\forall m \in N$: $\overline{1,m} \triangleq \{i \in N | i \leq m\}$. Если A и B – множества, через B^A обозначаем множество всех функций f из A в B; если $f \in B^A$ и C – подмножество A, полагаем $f^1(C) = \{f(x): x \in C\}$. Если (X, τ) – топологическое пространство (ТП) и A – подмножество X, через $\mathrm{cl}(A, \tau)$ обозначаем замыкание множества A в (X, τ). Если (X, τ) – ТП и $x \in X$, через $\mathbf{N}_\tau(x)$ обозначаем семейство всех окрестностей ([5], с. 62) точки x.

Ниже используются обобщенные последовательности или направленности ([5], с. 95–97) в ТП для целей представления операции предельного перехода (последовательность – частный случай направленности). Если T – множество, через $\mathrm{DIR}[T]$ обозначаем множество всех направлений ([5], с. 95) на T. При $\angle \in \mathrm{DIR}[T]$ пару $(T, \angle)$ именуем, как обычно, направленным множеством (НМ). Если, кроме того, H – множество и $h \in H^T$, называем тройку $(T, \angle, h)$ направленностью в H. Если $(T, \angle)$ – НМ, через $(\angle - \mathrm{conf})[T]$ обозначаем семейство всех множеств P, $P \subset T$, таких, что $\forall x \in T$ $\exists y \in P$: $x \angle y$. Если (X, τ) – ТП, а $(T, \angle, h)$ – направленность в X, полагаем

$$(\tau - \mathrm{cl})[T;\angle;h] \triangleq \{x \in X | \forall Q \in \mathbf{N}_\tau(x):\ h^{-1}(Q) \in (\angle - \mathrm{conf})[T]\}$$

(множество всех предельных точек направленности $(T, \angle, h)$). Если же (X, τ) – ТП, а $(T, \angle, h)$ – направленность в X, для обозначения сходимости $(T, \angle, h)$ к x в (X, τ) используем выражение $(T;\angle;h) \xrightarrow{\tau} x$. Если $m \in N$, а H – непустое множество, полагаем $H^m \triangleq H^{\overline{1,m}}$. Если (T, τ), $T \neq \emptyset$, – ТП и $m \in N$, через $\otimes^m[\tau]$ обозначаем естественную топологию $T^m = T \times ... \times T$ (m раз), соответствующую произведению m экземпляров (T, τ). Линейные операции, умножение и упорядоченность в пространствах функционалов определяем поточечно.

Фиксируем непустое множество E и полуалгебру ([4], с. 58, [6], с. 46) $\mathbf{L}$ подмножеств E. Через $(\mathrm{add})_+[\mathbf{L}]$ обозначаем, конус всех неотрицательных вещественнозначных конечно-аддитивных мер на $\mathbf{L}$, а через $\mathbf{A}[\mathbf{L}]$ – линейное подпространство $\mathbf{R}^{\mathbf{L}}$, порожденное этим конусом. Фиксируем далее $\eta \in (\mathrm{add})_+[\mathbf{L}]$. Следуем определениям и обозначениям [7–9] в отношении элементов конечно аддитивной теории меры и интеграла. Через $B_0(E, \mathbf{L})$ обозначаем далее множество всех ступенчатых, в смысле $(E, \mathbf{L})$, функционалов на E (в качестве ступенчатых рассматриваем лишь функции с конечным множеством значений). Простой пример этого пространства, связанный с естественной полуалгеброй-стрелкой промежутка $[t_0, \theta_0[$, доставляет множество всех кусочно-постоянных и непрерывных справа функций на $[t_0, \theta_0[$.

Возвращаясь к общему случаю, введем положительный конус $B_0^+(E, \mathbf{L})$ пространства $B_0(E, \mathbf{L})$; элементы этого конуса играют роль, подобную компонентам функций $f \in F$ из разд. 1. Через $B(E, \mathbf{L})$ обозначим замыкание $B_0(E, \mathbf{L})$ в пространстве $\mathbf{B}(E)$ всех ограниченных функционалов на E, оснащенном sup-нормой $\|\cdot\|$ (элементы $B(E, \mathbf{L})$ – равномерные пределы сходящихся последовательностей в $B_0(E, \mathbf{L})$ и только они). Если $\mathbf{L}$ – σ – алгебра подмножеств E, то $B(E, \mathbf{L})$ – в точности множество всех $\mathbf{L}$ – измеримых функционалов из $\mathbf{B}(E)$. Тогда $B(E, \mathbf{L})$, как замкнутое подпространство $(\mathbf{B}(E), \|\cdot\|)$, является банаховым пространством с положительным конусом $B^+(E, \mathbf{L})$. Через $B^*(E, \mathbf{L})$ обозначим топологически сопряженное к $B(E, \mathbf{L})$ пространство. Оно исчерпывающим образом характеризуется мерами из $\mathbf{A}(\mathbf{L})$ в том смысле, что уже простейшая конструкция интегрирования по конечно-аддитивной мере ([8], с. 75–76) определяет изометрический изоморфизм $\mathbf{A}(\mathbf{L})$ на $B^*(E, \mathbf{L})$. При этом каждой мере $\mu \in \mathbf{A}(\mathbf{L})$

ставится в соответствие функционал на $B(E, \mathbf{L})$, значения которого – μ-интегралы функционалов из $B(E, \mathbf{L})$.

Двойственность $(B(E, \mathbf{L}), \mathbf{A}(\mathbf{L}))$ определяет $*$-слабую топологию $\tau_*(\mathbf{L})$, пространства $\mathbf{A}(\mathbf{L})$, как слабейшую топологию $\mathbf{A}(\mathbf{L})$, в которой интеграл каждой функции из $B(E, \mathbf{L})$ непрерывен относительно конечно-аддитивной меры (ограниченной вариации), по которой выполняется интегрирование. Известно, что $(\mathbf{A}(\mathbf{L}), \tau_*(\mathbf{L}))$ – локально-выпуклое пространство, условия компактности в котором определяются теоремой Алаоглу ([10], с. 459).

Если $f \in B(E, \mathbf{L})$, через $f * \eta$ обозначаем неопределенный η-интеграл f ([8], с. 76). Полагаем $(\mathrm{add})^+[\mathbf{L};\eta] \triangleq \{\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathbf{L}] \mid \forall L \in \mathbf{L}: (\eta(L) = 0) \Rightarrow (\mu(L) = 0)\}$. Через $\tau^*_\eta(\mathbf{L})$ обозначаем (относительную) топологию $(\mathrm{add})^+[\mathbf{L}; \tau]$, индуцированную из $((\mathbf{A}(\mathbf{L}), \tau_*(\mathbf{L}))$; $(\mathrm{add})^+_r[\mathbf{L};\eta] \triangleq (\mathrm{add})^+[\mathbf{L};\eta]^r$;

$$(\mathrm{add})^+_r[\mathbf{L}; \eta], \otimes^r[\tau^*_\eta(\mathbf{L})]) \tag{2.1}$$

– локально компактное пространство обобщенных управлений, допускающее всюду плотное погружение $B^+_{0,r}[E;\mathbf{L}] \triangleq B^+_0(E;\mathbf{L})^r$ в силу оператора $\mathbf{I}$, определяемого как

$$(f_i)_{i\in\overline{1,r}} \mapsto (f_i * \eta)_{i\in\overline{1,r}}: \quad B^+_{0,r}[E;\mathbf{L}] \to (\mathrm{add})^+_r[\mathbf{L};\eta]$$

Именно [7], $(\mathrm{add})^+_r[\mathbf{L}; \eta] = \mathrm{cl}(\mathbf{I}^1(B^+_{0,r}[E; \mathbf{L}]), \otimes^r[\tau^*_\eta(\mathbf{L})])$. Пусть $\forall S[Q \neq \emptyset] \quad \forall \angle \in (\mathrm{DIR})[Q]$:
Q

$$\mathbf{B}_r(Q, \angle, E, \mathbf{L}, \eta) \triangleq \{g \in B^+_{0,r}[E;\mathbf{L}]^Q \mid \exists d \in Q \;\; \exists c \in]0, \infty[$$

$$\forall q \in Q: \;\; (d \angle q) \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{r} \int_E g(q)(i) d\eta \leqslant c\right)\Bigg\} \tag{2.2}$$

3. Условия ограниченной реализации асимптотически достижимых элементов. Пусть $\mathbf{F}$ – непустое семейство подмножеств $B^+_{0,r}[E; \mathbf{L}]$, такое, что $\forall A \in \mathbf{F} \;\; \forall B \in \mathbf{F} \;\; \exists C \in \mathbf{F}$: $C \subset A \cap B$. Семейство $\mathbf{F}$ будет исполнять роль ограничений асимптотического характера. Пусть; кроме того, (θ, ϑ), $\theta \neq \emptyset$, – заданное ТП. Фиксируем непрерывный в смысле ТП (2.1) и (θ, ϑ) оператор

$$w: \;\; (\mathrm{add})^+_r[\mathbf{L}; \eta] \to \theta \tag{3.1}$$

Кроме того, полагаем $W \triangleq w \circ \mathbf{I}$, так что W есть оператор

$$(f_i)_{i\in\overline{1,r}} \mapsto w((f_i * \eta)_{i\in\overline{1,r}}): \quad B^+_{0,r}[E;\mathbf{L}] \to \theta \tag{3.2}$$

Существует много конкретных классов задач, допускающих представление (3.1), (3.2). В частности, это относится к рассматриваемой в разд. 1 задаче об исследовании асимптотики областей достижимости [4, гл. VI; 7,9]. Построение оператора (3.1) для этого случая связано с расширением формулы Коши [11, 12].

В свою очередь, это и некоторые другие приложения связаны с представлением, в содержательном отношении характеризуемым следующим классом операторов W:

$$W(f) = g\left(\int_E H(x) f(x) \eta(dx)\right), \quad f \in B^+_{0,r}[E;\mathbf{L}] \tag{3.3}$$

где g – непрерывная вектор-функция на соответствующем конечномерном пространстве. Оператор w для случая (3.3) восстанавливается на основе понятия неопределенного интеграла.

Пусть $\underset{T}{\forall S}[T \neq \emptyset] \quad \forall \preccurlyeq \in (\mathrm{DIR})[T] \quad \forall \omega \in \theta$:

$$AS[T, \preccurlyeq, \omega] \triangleq \{h \in B^{+}_{0,r}[E;\mathbf{L}]^{T} \mid (\forall U \in \mathbf{F} \ \ \exists m \in T$$

$$\forall t \in T\colon \ (m \preccurlyeq t) \Rightarrow (h(t) \in U))\&((T, \preccurlyeq, W \circ h) \xrightarrow{\vartheta} \omega)\}$$

$$\mathbf{AC} \triangleq \{\omega \in \theta \mid \underset{T}{\exists S}[T \neq \emptyset] \ \ \exists \preccurlyeq \in \mathrm{DIR}[T]\colon \ \ \mathrm{AS}[T, \preccurlyeq, \omega] \neq \emptyset\} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{BAC} \triangleq \{\omega \in \mathbf{AC} \mid \underset{T}{\forall S}[T \neq \emptyset] \ \ \forall \preccurlyeq \in \mathrm{DIR}[T]\colon$$

$$\mathrm{AS}[T, \preccurlyeq, \omega] \subset \mathbf{B}_r(T, \preccurlyeq, E, \mathbf{L}, \eta)\} \tag{3.5}$$

Теорема 1. Пусть $\omega \in \mathbf{AC}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:
1) $\omega \in \mathbf{BAC}$;
2) $(\underset{T}{\forall S}[T \neq \emptyset] \ \ \forall \preccurlyeq \in \mathrm{DIR}[T] \ \ \forall h \in \mathrm{AS}[T, \preccurlyeq, \omega]$:

$$(\otimes^{r}[\tau^{*}_{\eta}(\mathbf{L})] - \mathrm{cl})[T; \preccurlyeq; \mathbf{I} \circ h] \neq \emptyset).$$

Доказательство. Импликация $1 \Rightarrow 2$ – простое следствие компактности множеств

$$\Xi^{+}_{r}[c] \triangleq \left\{(\mu_i)_{i \in \overline{1,r}} \in (\mathrm{add})^{+}_{r}[\mathbf{L};\eta] \mid \sum_{i=1}^{r} \mu_i(E) \leqslant c\right\} \quad (c \geqslant 0)$$

в топологическом пространстве (2.1) ([4], гл. IV, VI).

Пусть ω удовлетворяет условию 2. Выберем приближенное решение, реализующее в пределе точку ω.

Итак, пусть $(\Lambda, \preccurlyeq, \varphi)$ – направленность в $B^{+}_{0,r}[E; \mathbf{L}]$, такая, что $\varphi \in \mathrm{AS}[\Lambda, \preccurlyeq, \varphi]$. Тогда $\varphi \in \mathbf{B}_r(\Lambda, \preccurlyeq, E, \mathbf{L}, \eta)$. Доказательство этого утверждения осуществляется рассуждением от противного с использованием известной конструкции направленного произведения ([5], с. 99). Второе существенное обстоятельство связано с характерным свойством предельной точки направленности в топологическом пространстве: прообраз окрестности в силу оператора, определяющего направленность, является конфинальным множеством ([5], с. 96). Напомним, что $(\Lambda, \preccurlyeq, \varphi)$, $\varphi \in \mathrm{AS}[\Lambda, \preccurlyeq, \varphi]$, выбиралось произвольно, так что, согласно (3.5) $\omega \in \mathbf{BAC}$, т.е. импликация $2 \Rightarrow 1$ установлена.

4. Частный случай. Всюду далее рассматриваем случай метризуемого [5] пространства (θ, ϑ), пусть ρ – метрика θ, порождающая топологию ϑ.

Условие 1. $\exists \omega^0 \in \theta \ \ \forall a \in \,]0, \infty[\ \ \exists b \in [0, \infty[$

$$\forall \mu \in (\mathrm{add})^{+}_{r}[\mathbf{L};\eta]\colon \ \left(b < \sum_{i=1}^{r} \mu(i)(E)) \Rightarrow (a \leqslant \rho(\omega^0, w(\mu))\right)$$

Теорема 2. Пусть выполнено условие 1. Тогда $\mathbf{AC} = \mathbf{BAC}$.

Доказательство. Пусть $\omega \in \mathbf{AC}$. Тогда можно указать направленность $(T, \angle, h)$ в $B^{+}_{0,r}[E; \mathbf{L}]$, для которой $h \in \mathrm{AS}[T, \angle, \omega]$. Выберем любую направленность $(T, \angle, h)$ в $B^{+}_{0,r}[E; \mathbf{L}]$, обладающую вышеупомянутыми свойствами. Тогда, в частности, $\rho(W(h(t)), \omega) < 1$ с некоторого момента. Если ω^0 соответствует условию 1, то с некоторого момента $\rho(W(h(t)), \omega^0) < \rho(\omega^0, \omega) + 1$. В силу условия 1 можно указать $b \in [0, \infty[$ так, что $\forall \mu \in (\mathrm{add})^{+}_{r}[\mathbf{L}; \eta]$:

$$\left(b < \sum_{i=1}^{r} \mu(i)(E)) \Rightarrow (\rho(\omega^0, \omega) + 1 \leqslant \rho(\omega^0, w(\mu))\right) \tag{4.1}$$

Вместе с тем $\forall t \in T$: $(W \circ h)(t) = w((\mathbf{I} \circ h)(t))$. Тогда с некоторого момента $\rho(\omega^0, w((\mathbf{I} \circ h)(t))) < \rho(\omega^0, \omega) + 1$, так что (см. (4.1)) с некоторого момента

$$\sum_{i=1}^{r} \int h(t)(i) d\eta = \sum_{i=1}^{r} (\mathbf{I} \circ h)(t)(i)(E) \leqslant b$$

Иными словами, $h \in \mathbf{B}_r(T, \angle, E, \mathbf{L}, \eta)$. Поскольку (реализующее ω) приближенное решение $(T, \angle, h)$ выбиралось произвольно, имеем, что $\omega \in$ **BAC**. Вложение **AC** $\subset$ **BAC** доказано, чем и завершается в силу (3.5) доказательством в целом.

Пример. Пусть выполнены условия: 1) $p \in N$ и $(\theta, \vartheta) - \mathbf{R}^p$ с обычной топологией покоординатной сходимости; 2) $\omega^0 \in \mathbf{R}^p$; 3) матрицант $(i, j) \mapsto M_{i,j}$: $\overline{1,p} \times \overline{1,r} \to B^+(E;\mathbf{L})$ обладает тем свойством, что $\exists \alpha \in]0, \infty[$ $\forall j \in \overline{1,r}$ $\exists i \in \overline{1,p}$ $\forall x \in E$: $\alpha \leqslant M_{i,j}(x)$; 4) оператор W обладает представлением

$$w(f) \triangleq \omega^0 + \left(\sum_{j=1}^{r} \int_E M_{i,j} f(j) d\eta\right)_{i \in \overline{1,p}}, \quad f \in B^+_{0,r}[E;\mathbf{L}] \tag{4.2}$$

Для W (4.2) реализуется (3.2) в терминах непрерывного оператора w:

$$W(\mu) \triangleq \omega^0 + \left(\sum_{j=1}^{r} \int_E M_{i,j} d\mu_j\right)_{i \in \overline{1,p}}, \quad \mu \in (\mathrm{add})^+_r[\mathbf{L};\eta]$$

Если теперь определить ρ как sup-метрику (т.е. метрику $\mathbf{R}^p$, порожденную sup-нормой последнего), то условие 1 выполнено. К этому виду сводится, например, задача об исследовании асимптотик областей достижимости в полном фазовом пространстве для векторной материальной точки, управляемой силой с неотрицательными компонентами (на выбор управляющей силы, как программы, накладываются, кроме того, ограничения вида (1.2); можно, разумеется, использовать в качестве "асимптотических" ограничений и семейство **F** (разд. 3) общего вида).

Другим примером, удовлетворяющим условиям 1–4, служит следующая система:

$$\dot{x}(t) = A(t)x + f(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \theta, \quad x(t_0) = x_0, \quad x \in \mathbf{R}^r$$

где A – диагональная $(r \times r)$-матрица с элементами $\lambda_1 \in \mathbf{R}, \ldots, \lambda_r \in \mathbf{R}$; f – управляющая r-мерная вектор-функция.

В этом случае роль матрицанта M играет фундаментальная матрица решений соответствующей однородной системы. Пусть $\alpha_i \triangleq e^{-|\lambda_i|(\theta - t_0)}$, $i \in \overline{1,r}$; $\alpha \triangleq \inf_{i \in \overline{1,r}} \{\alpha_i\}$. Тогда, очевидно, $\forall i \in \overline{1,r}$ $\forall t \in [t_0, \theta]$: $\exp[\lambda_i(\theta - t)] \geqslant \alpha$.

Возвращаясь к общему случаю метризуемого ТП (θ, ϑ), отметим, что если **F** обладает фундаментальной ([10], с. 21) последовательностью множеств, в определениях (3.4), (3.5) можно без потери общности ограничиться классом секвенциальных приближенных решений (решений-последовательностей).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-00350).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

3. *Панасюк А.И., Панасюк В.И.* Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986. 296 с.
4. *Ченцов А.Г.* Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач. Екатеринбург: Наука, 1993. 232 с.
5. *Келли Дж.Л.* Общая топология. М.: Наука, 1981. 431 с.
6. *Неве Ж.* Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
7. *Ченцов А.Г.* Асимптотическая достижимость и ее обобщенное представление // Докл. РАН. 1994. Т. 334. № 4. С. 437–440.
8. *Ченцов А.Г.* К вопросу об универсальной интегрируемости ограниченных функций // Мат. сб. 1986. Т. 131. № 1. С. 73–93.
9. *Ченцов А.Г.* Релаксации допустимых множеств и конструкции расширений // Кибернетика и системный анализ, 1992. № 4. С. 78–87.
10. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
11. *Chentsov A.G.* On the construction of solution to nonregular problems of optimal control // Probl. Control and Inform. Theory, 1991. V. 20. № 2. P. 129–143.
12. *Серов В.П., Ченцов А.Г.* Об одной конструкции расширения задачи управления с интегральными ограничениями // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 4. С. 607–617.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
30.IX.1993