

УДК 62-50

© 1995 г. А.Г. Пашков, А.В. Сеницын

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В ИГРЕ СБЛИЖЕНИЯ – УКЛОНЕНИЯ ТРЕХ ПРЕСЛЕДУЮЩИХ ОБЪЕКТОВ С ОДНИМ УБЕГАЮЩИМ

Рассматривается дифференциальная игра сближения – уклонения трех преследующих объектов с одним убегающим. Предполагается, что все объекты (игроки) обладают простыми движениями, а игра происходит на плоскости. На векторы управляющих воздействий всех объектов наложены геометрические ограничения, причем убегающий обладает превосходством в ресурсе управления. Время игры фиксировано. Функционалом платы является расстояние между убегающим и ближайшим к нему преследователем в момент окончания игры. Решена задача об определении значения функции цены игры для любой возможной позиции.

Изучены все типичные случаи взаимного расположения игроков в произвольный момент времени: игра "один-за-одним", "двое-за-одним", "трое-за-одним в центр" и "трое-за-одним". Для каждого из случаев взаимного расположения игроков построена функция гарантированного результата. В первых трех случаях выражение функции находится аналитически. Для четвертого случая предлагается кусочно-программная конструкция с одним переключением, на основе которой численно определяется значение функции. Доказано совпадение функции гарантированного результата с функцией цены игры. При зафиксированных произвольным образом начальных положениях преследователей в соответствии со случаями взаимного расположения могут быть четыре области игры. Граница между областями "трое-за-одним в центр" и "трое-за-одним" находится численно, остальные границы – внутренние конхоиды Нико-меда, прямые и окружности. Созданы программы, позволяющие строить сингулярные многообразия и линии уровня функции цены игры.

Развивается подход, предложенный в [1-5]. Формализация задачи принимается согласно [6, 7], близкие вопросы рассмотрены ранее в [8-12].

1. Уравнения движения и функционал платы. Постановка задачи. На фиксированном интервале времени $[t_0, \vartheta]$ рассматривается задача сближения трех однотипных преследующих объектов $P_i(y_1^{(i)}, y_2^{(i)})$ ($i = 1, 2, 3$) с одним убегающим $E(z_1, z_2)$ на плоскости.

Динамика преследователей и убегающего задается уравнениями:

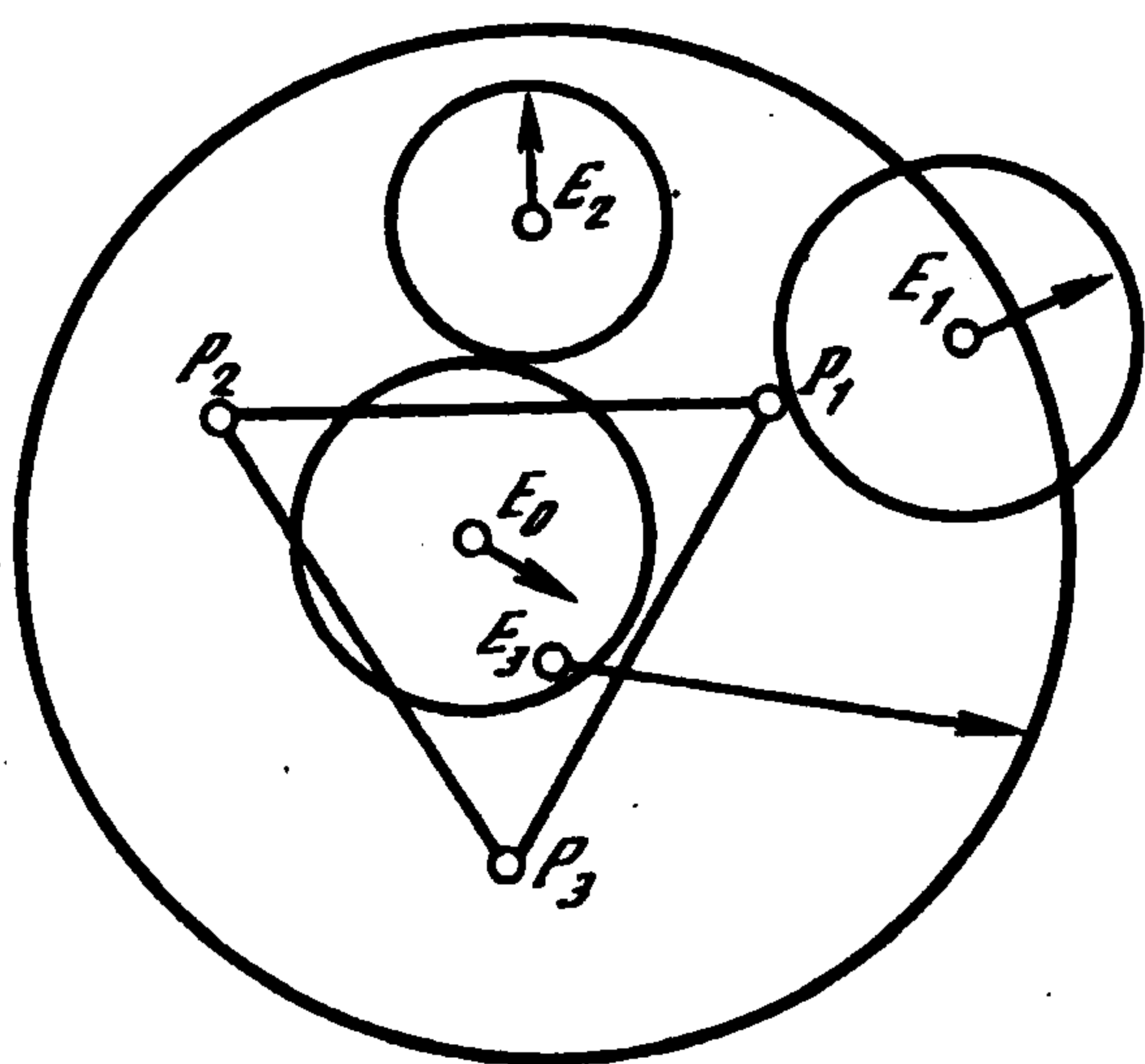
$$\dot{y}_1^{(i)} = u_1^{(i)}, \quad \dot{y}_2^{(i)} = u_2^{(i)} \left((u_1^{(i)})^2 + (u_2^{(i)})^2 \right)^{1/2} \leq \mu, \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.1}$$

$$\dot{z}_1 = v_1, \quad \dot{z}_2 = v_2 \left(v_1^2 + v_2^2 \right)^{1/2} \leq v, \quad v > \mu \tag{1.2}$$

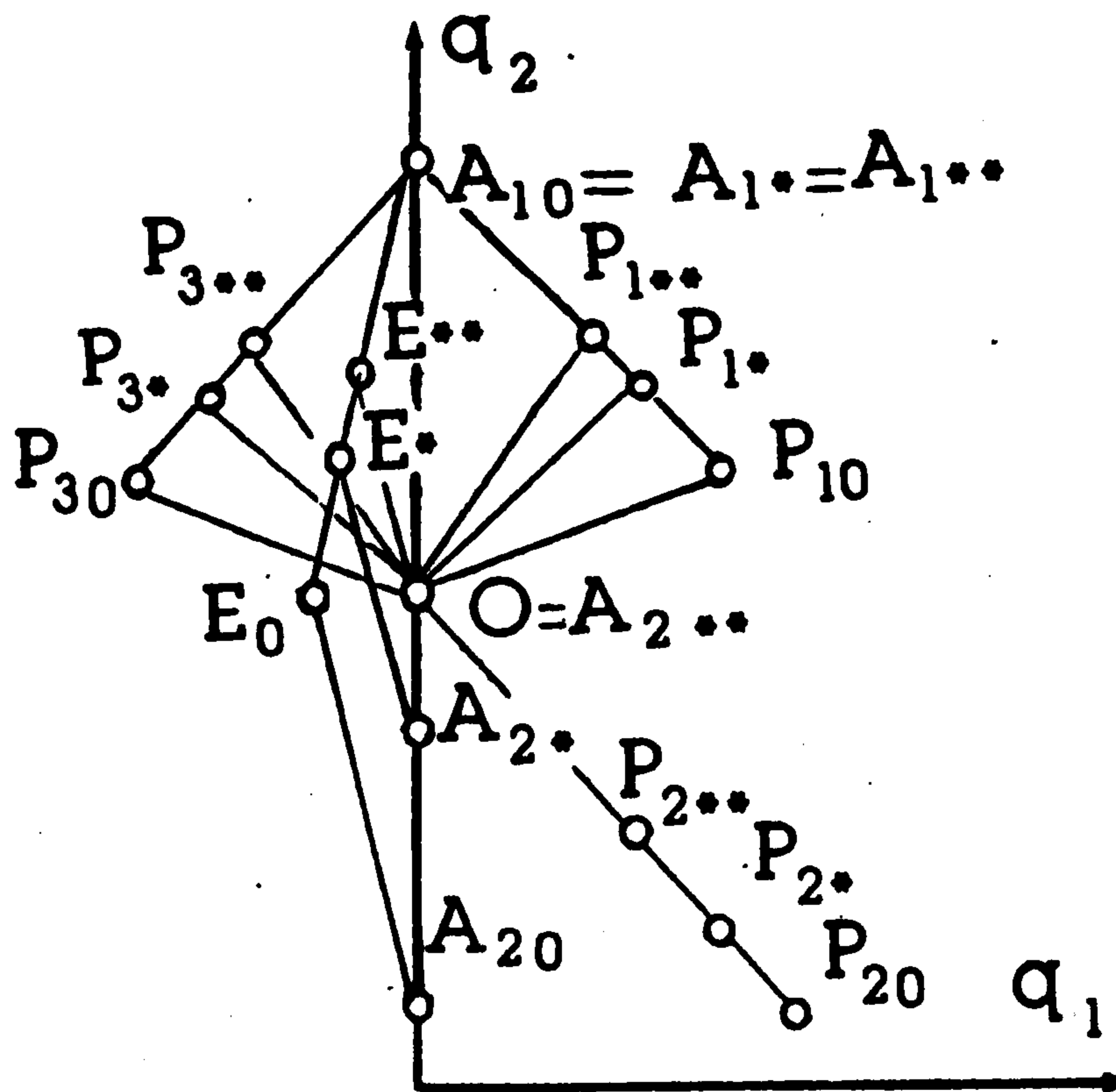
где $u^{(i)}, v$ – двумерные векторы управления.

Функционалом платы (ФП) σ является расстояние между убегающим и ближайшим к нему преследователем в момент ϑ

$$\sigma = \min_{i=1,2,3} \left((z_1(\vartheta) - y_1^{(i)}(\vartheta))^2 + (z_2(\vartheta) - y_2^{(i)}(\vartheta))^2 \right)^{1/2} \tag{1.3}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Формализация данной задачи осуществляется согласно [6], [7].

Преследователи стремятся минимизировать, а убегающий – максимизировать ФП. Требуется построить алгоритм для определения значения функции цены игры (1.1)–(1.3) для любой возможной начальной позиции игры.

2. Типичные случаи взаимного расположения. Можно выделить четыре основных типичных случая взаимного расположения (фиг. 1): игра "один–за–одним", в которой существенно взаимодействие только одного преследователя и убегающего (P_1 и E_1); игра "двое–за–одним", где важно взаимодействие двух преследователей и убегающего (P_1, P_2 и E_2); игра "трое–за–одним в центр" и игра "трое–за–одним", в которых необходимо учитывать взаимодействие всех игроков (P_1, P_2, P_3, E_0 и P_1, P_2, P_3, E_3 соответственно).

3. Особенности задачи. Алгоритм определения значения функции гарантированного результата в наиболее характерном случае. Рассмотрим игру (1.1)–(1.3), начинающуюся в момент $t = t_0$ из типичной начальной позиции, представленной на (фиг. 2). Поместим начало декартовой системы координат в точку $O(t) = (o_1(t), o_2(t))$, равноудаленную от P_1, P_2 и P_3 . Ось q_2 направим вдоль серединного перпендикуляра к отрезку $[P_3, P_1]$, а ось q_1 перпендикулярно ей. Игрок E находится в треугольнике, образованном P_1, P_2 и P_3 .

Областями достижимости $G_i(t) = G_i(\vartheta, t, y^{(i)}(t))$ объектов P_i являются круги радиусом $r(t) = \mu(\vartheta - t)$ с центрами в $(y_1^{(i)}(t), y_2^{(i)}(t))$, область достижимости $G(t) = G(\vartheta, t, z(t))$ объекта E – круг радиуса $R(t) = v(\vartheta - t)$ с центром в $(z_1(t), z_2(t))$.

Пусть область достижимости убегающего E в момент t пересекается средними перпендикулярами к отрезкам P_3P_1, P_1P_2, P_2P_3 в точках $A_i(t) = (a_1^{(i)}(t), a_2^{(i)}(t)) (i = 1, 2, 3)$ соответственно. Точки $A_i(t) (i = 1, 2, 3)$ и $O(t)$ назовем точками прицеливания.

Обозначим P_i, E, A_i, O в момент t_0 как P_{i0}, E_0, A_{i0}, O_0 , в момент t_* как P_{i*}, E_*, A_{i*}, O_* , в момент t_{**} как $P_{i**}, E_{**}, A_{i**}, O_{**}$ и в момент τ как $P_{i\tau}, E_\tau, A_{i\tau}, O_\tau (i = 1, 2, 3)$.

Преследователи $P_i (i = 1, 2, 3)$ и убегающий E в момент $t = t_0$ находятся в позициях P_{i0} и E_0 .

Полагаем, что в момент $t = t_0$ (фиг. 2) выполняется неравенство

$$d(P_{10}, A_{10}) > d(P_{10}, O_0) \quad (3.1)$$

где $d(A, B)$ – евклидово расстояние между точками A и B .

Для описания особенностей исследуемой задачи (1.1)–(1.3) исследуем следующий частный случай. Пусть игрок E на всем отрезке времени игры $[t_0, \vartheta]$ выбирает экстремальное программное управление

$$v(t) = (v \cos \beta^*, v \sin \beta^*)$$

$$\beta^* = \pi - \arctg[(a_2^1(t_0) - z_2(t_0)) / (a_1^1(t_0) - z_1(t_0))]$$

направленное в A_{10} и сообщает об этом преследователям (углы отсчитываются от положительного направления оси q_1).

В ответ на это игроки P_1 и P_2 поступают следующим образом. Игрок P_1 также выбирает экстремальное программное управление

$$u(t) = (\mu \cos \alpha^*, \mu \sin \alpha^*)$$

$$\alpha^* = \pi - \arctg[(a_2^1(t_0) - y_2^{(1)}(t_0)) / (a_1^1(t_0) - y_1^{(1)}(t_0))]$$

направленное в A_{10} на всем интервале $[t_0, \vartheta]$, игрок P_2 – произвольное управление удовлетворяющее ограничениям (1.1), а P_3 движется симметрично P_1 относительно оси q_2 . (Можно показать, что поведение P_2 при указанных управлениях E и P_1 , P_3 не будет влиять на значение ФП.) В результате в некоторый момент $t = t_*$, где $t_0 < t_* < \vartheta$, игроки оказываются в позициях P_{i*} ($i = 1, 2, 3$) и E_* (Фиг. 2), характеризующихся равенством

$$d(P_{1*}, A_{10}) = d(P_{1*}, O_*) \quad (3.2)$$

Пусть игроки E , P_1 и P_3 и далее при $t > t_*$ продолжают экстремальное движение в A_{10} , а игрок P_2 по-прежнему действует произвольным образом. Тогда при $t > t_*$ будет выполняться неравенство

$$d(P_1(t), A_{10}) < d(P_1(t), O(t)) \quad (3.3)$$

причем разность $\rho(t) = d(P_1(t), O(t)) - d(P_1(t), A_{10})$ будет монотонно возрастать с ростом t . Неравенство (3.3) и монотонный рост $\rho(t)$ будут иметь место вплоть до момента $t = t_{**}$ (Фиг. 2), когда выполняется равенство

$$O_{**} = A_{2**} \quad (3.4)$$

В момент $t = t_{**}$ возникает ситуация когда игрок E может обеспечить себе большее значение ФП, изменив прежнее управление на программное экстремальное управление на полуинтервале $[t_{**}, \vartheta]$, направленное в точку O_{**} . В результате E гарантирует себе значение

$$\sigma_1(\vartheta) = d(P_{1**}, A_{10}) - r(t_{**}) \quad (3.5)$$

удовлетворяющее неравенству

$$\sigma_1(\vartheta) > \sigma(\vartheta) = d(P_{1**}, A_{10}) - r(t_{**}) \quad (3.6)$$

следующему из (3.3), (3.4).

Можно показать, что при любом управлении $u_2(t)(t_0 \leq t \leq t_{**})$, удовлетворяющем ограничению (1.1) будет выполняться неравенство

$$\sigma(\vartheta) = d(P_{2**}, O_{**}) - r(t_{**}) \geq \sigma_1(\vartheta) \quad (3.7)$$

На основе приведенных рассуждений о ситуациях, складывающихся в рассмотренном частном случае игры (1.1)–(1.3), можно сделать следующие выводы.

Если игрок E применяет экстремальное управление, направленное в точку A_1 , то игрокам P_1, P_3 нецелесообразно использовать (в отличие от игры "двое-против-одного" [8]) экстремальное прицеливание в точку A_{10} .

Зафиксируем теперь любую из позиций игры, возникающих в вышеприведенном случае в некоторый момент t , где $t_* < t < t_{**}$. Будем считать эту позицию начальной для некоторой новой игры (1.1)–(1.3). Пусть игрок E в этой новой игре, как и в предыдущей, использует программное экстремальное управление $v(t)$, направленное в точку A_{10} . Можно показать, что при любых допустимых управлениях игроков P_1, P_2, P_3 значение ФП $\sigma(\vartheta)$ на отрезке $t_* \leq t \leq t_{**}$ будет возрастать (заметим, что значения t_* и t_{**} здесь, вообще говоря, будут отличаться от прежних).

Факт невозможности сдерживания роста значений ФП в некоторых позициях игры и составляет основную особенность рассматриваемой задачи. Возникает вопрос: как построить функцию цены для подобных позиций игры? На этот вопрос и отвечает основное содержание данной статьи.

Алгоритм определения значений функции гарантированного результата (ФГР) для рассмотренных выше позиций игры базируется на следующих соображениях. Пусть убегающий E движется экстремально в точку A_1 на интервале $[t_0, \vartheta]$. Учитывая рассуждения, изложенные выше, полагаем, что преследователь P_1 выбирает экстремальное управление $u_1(t)(t_0 \leq t \leq \tau)$, направленное под некоторым углом α к оси q_1 , игрок P_3 выбирает управление $u_2(t)$ направленное под углом $\pi - \alpha$ к q_1 , а преследователь P_2 движется экстремально в некоторую точку $O(\tau) = A_2(\tau)$, определяемую равенствами

$$d(P_{20}, O_\tau) - \mu\tau = d(P_{1\tau}, A_{10}) = d(P_{3\tau}, A_{10}) \quad (3.8)$$

(см. фиг. 3).

Значения τ и α определяются из следующих условий:

1°. Объекты P_1, P_3 и E , двигаясь экстремально, в момент $t = \tau$ должны быть в позициях $P_{1\tau}, P_{3\tau}$ и E_τ , ординаты которых совпадают.

2°. Объект P_2 , двигаясь экстремально в некоторую точку $A_{2\tau}$, в момент $t = \tau$ должен оказаться в позиции $P_2(2\tau)$ для которой справедливы равенства

$$d(P_{20}, A_{2\tau}) - \mu\tau = d(P_{2\tau}, A_{2\tau}) = d(P_{1\tau}, A_{10}) = d(P_{3\tau}, A_{10}) \quad (3.9)$$

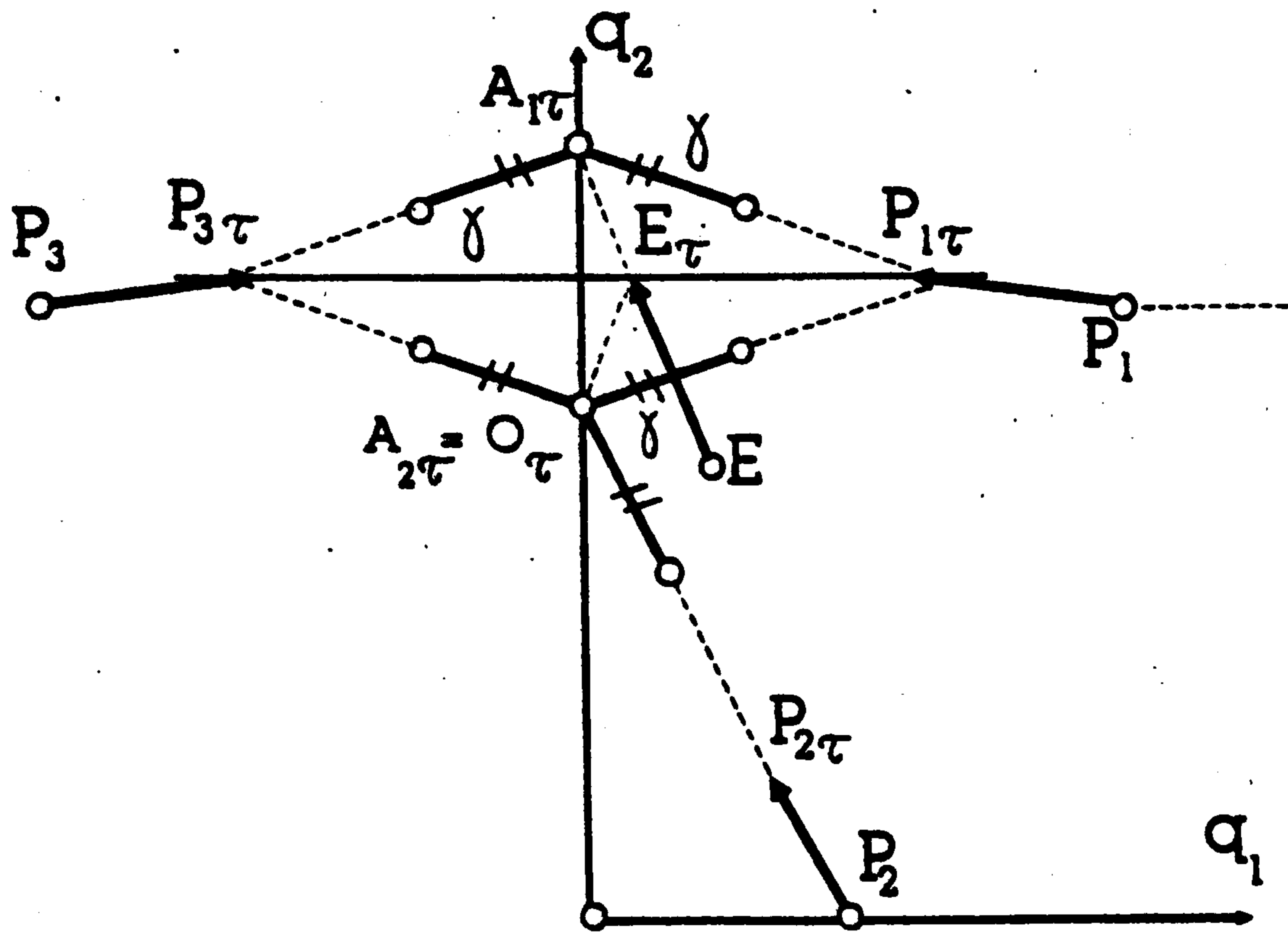
3°. Должно выполняться равенство

$$O_\tau = A_{2\tau} \quad (3.10)$$

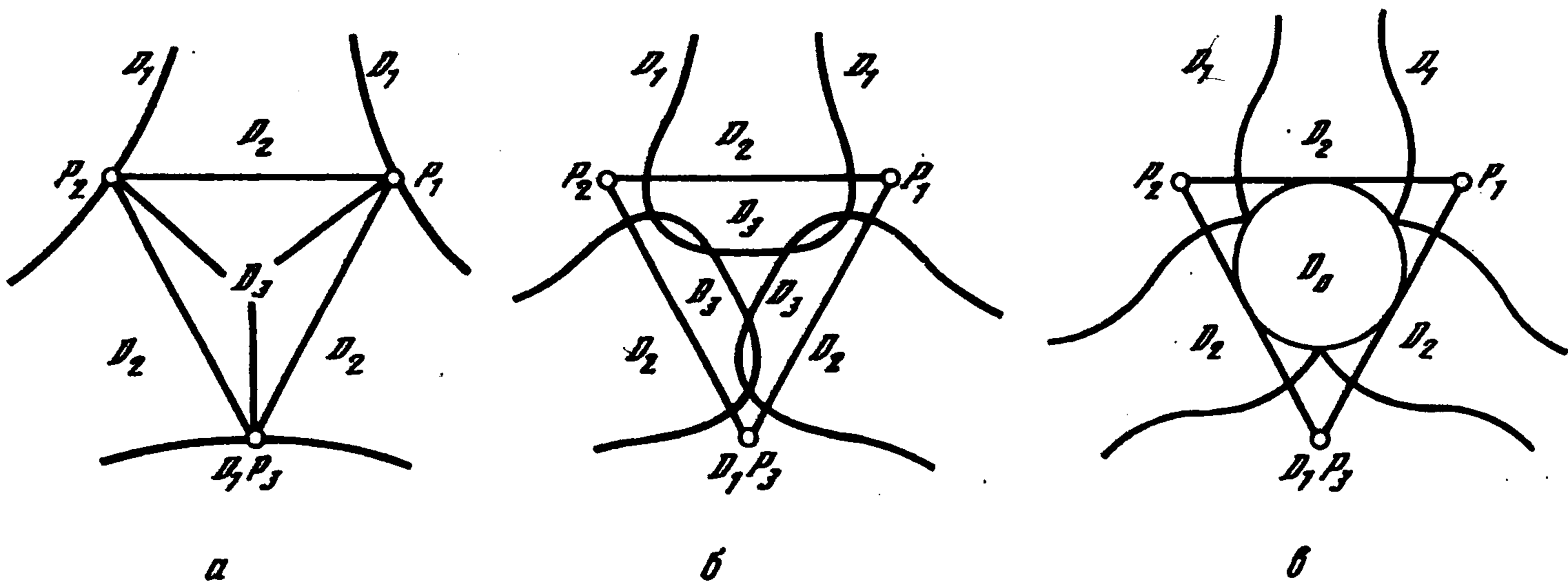
На основе условий (3.8)–(3.10) ниже будут выписаны уравнения для определения конкретных значений α и $\tau(\alpha)$ для любой начальной позиции. Забегая вперед, необходимо, к сожалению, заметить, что вычисление α и $\tau(\alpha)$ приводит к необходимости решения трансцендентных уравнений высоких степеней. В связи с этим возникает необходимость численного решения этих уравнений

В результате искомая ФГР, обозначаемая γ определяется из выражений

$$\begin{aligned} \gamma &= d(P_{1\tau}, A_{10}) - r(\tau) = d(P_{1\tau}, A_{2\tau}) - r(\tau) = d(P_{3\tau}, A_{10}) - r(\tau) = \\ &= d(P_{3\tau}, A_{2\tau}) - r(\tau) = d(P_{2\tau}, A_{2\tau}) - r(\tau) \end{aligned} \quad (3.11)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Функция γ является ν -стабильной, что непосредственно следует из определения ν -стабильности в силу линейности системы (1.1)–(1.2) [6]. Аналогично определяются ФГР, отвечающие экстремальному движению E в точки A_{20} и A_{30} соответственно.

4. Алгоритм построения ФГР. При фиксированных позициях $P_j (j = 1, 2, 3)$ плоскость R_2 начальных позиций E в момент времени t , согласно типичным случаям разд. 2, является объединением областей D_1, D_2, D_0 и D_3 , где D_1 – область игры "один-за-одним"; D_2 – область игры "двое-за-одним", D_0 – область игры "трое-за-одним в центр", D_3 – область игры "трое-за-одним".

Данные области представлены на фиг. 4 для различных соотношений μ и ν при фиксированном $\vartheta = 1$. На фиг. 4, а $\mu = 12, \nu = 24$, на фиг. 4, б $\mu = 10, \nu = 20$ и на фиг. 4, в $\mu = 6, \nu = 12$. Надо сказать, что на фиг. 4, б сингулярные линии проходят через точки пересечения границ двух соседних областей D_3 , а на фиг. 4, а они соединяют точки $P_i (i = 1, 2, 3)$ с некоторой точкой внутри треугольника $P_1P_2P_3$, которая находится численно. Также численно находятся и границы областей D_3 на Фиг. 4, б.

Отметим очевидное свойство областей D_i : $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, ($i, j = 0, 1, 2, 3, i \neq j$), если $D_i \neq \emptyset$ и $D_j \neq \emptyset$.

Определим ФГР во всех типичных случаях игры (1.1)–(1.3).

Для областей D_0, D_1, D_2 ФГР можно записать в общем виде, где x – позиция игры

$$\gamma(t, x) = \max_{z \in G(t)} \min_i \min_{y \in G_i(t)} d(z, y), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.1)$$

Заметим, что максимум по z достигается во внутренней точке области достижимости игрока E для области D_0 и на границе – для областей D_1, D_2 .

Выражение (4.1) представляет общий вид выражения ФГР в каждой из областей игры (1.1–1.3).

Была найдена [1, 6] функция цены для областей D_1 и D_2 .

В данной работе основное внимание уделено случаю "три-за-одним", рассматриваемому ниже.

Введем для каждого значения индекса $j = 1, 2, 3$ различные системы координат q_1^j, q_2^j .

При $j = 1$ оси q_1^1, q_2^1 совпадают с определенными в разд. 3; при $j = 2, 3$ координатные оси q_1^j, q_2^j получаются из осей q_1^1, q_2^1 поворотом около точки O , причем ось q_2^j совпадает с серединными перпендикулярами к отрезкам $[P_1P_2]$ и $[P_2P_3]$ соответственно.

Определим алгоритм построения ФГР $\gamma_j(t, x)$ ($j = 1, 2, 3$), соответствующей экстремальному движению $E(t)$ в $A_j(t)$ в системе координат q_1^j, q_2^j .

Экстремальное движение $E(t)$ в $A_j(t)$ определяется углом β_j^* ($j = 1, 2, 3$):

$$\beta_j^* = \pi - \arctg[(a_2^j(t_0) - z_2(t)) / (a_1^j(t) - z_1(t))] \quad (4.2)$$

Положение $E(\tau)$ в каждый момент $\tau > t$ определяется выражением

$$E(\tau) = (z_1(\tau), z_2(\tau)) = (z_1(t) + v\tau \cos(\beta_j^*), z_2(t) + v\tau \sin(\beta_j^*)) \quad (4.3)$$

$P_j(t)$ движется экстремально в $A_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$) под углом

$$\alpha_j^* = \pi - \arctg[(a_1^j(t) - y_2^{(j)}(t)) / (a_1^j(t) - y_1^{(j)}(t))] \quad (4.4)$$

к оси абсцисс q_1^j .

Положение P_j движущегося с произвольным углом α к q_1^j в момент времени $\tau > t$ определим как

$$P_j(\tau(\alpha)) = (y_1^{(j)}(\tau(\alpha)), y_2^{(j)}(\tau(\alpha))) = (y_1^{(j)}(t) + \mu\tau \cos \alpha, y_2^{(j)}(t) + \mu\tau \sin \alpha), \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.5)$$

Для того чтобы удовлетворить условиям (3.8)–(3.10) и определить ФГР γ_j ($j = 1, 2, 3$) согласно (3.11), предлагается следующий алгоритм вычисления значения угла α_j и момента совпадения ординат P_j и E τ_j .

Угол α_j при $j = 1, 2, 3$ и соответствующий ему τ_j связаны соотношением

$$\tau_j(\alpha_j) = (y_2^{(j)}(t) - z_2(t)) / (v \sin \beta_j^* - \mu \sin \alpha_j) \quad (4.6)$$

Функцию $f_j(\alpha_j)$ определим следующим образом:

$$f_j(\tau_j(\alpha_j)) = y_2^{(j)}(\tau_j(\alpha_j)) - [a_2^{(j)}(t) + o_2(\tau_j(\alpha_j))] / 2 \quad (4.7)$$

$$o_2^j(\alpha_j) = y_2^{(k)}(t) + [(R_j(\tau_j(\alpha_j)) + \mu\tau(\alpha_j))^2 - (y_1^{(k)}(t))^2]^{1/2} \quad (4.8)$$

где $o_2(\tau_j(\alpha_j))$ – ордината точки $O(\tau_j(\alpha_j))$, $k = 2, 1, 3$ для $i = 1, 2, 3$ и $R_j(\tau_j(\alpha_j))$ равно либо расстоянию между P_j и A_j , если $y_1^{(j)} \geq z_1$, либо между E и A_j , если $y_1^{(j)} < z_1$ в момент $\tau_j(\alpha_j)$:

$$R_j(\tau_j(\alpha_j)) = \begin{cases} d(P_j(\tau_j(\alpha_j)), A_j(t)), & \text{если } y_1^{(j)}(\tau_j(\alpha_j)) \geq z_1(\tau_j(\alpha_j)) \\ d(E(\tau_j(\alpha_j)), A_j(t)), & \text{если } y_1^{(j)}(\tau_j(\alpha_j)) < z_1(\tau_j(\alpha_j)) \end{cases} \quad (4.9)$$

Пользуясь (4.6)–(4.9), можно вычислить значение угла α_j в зависимости от знака функции $f_j(\tau_j(\alpha_j^*))$. В случае отрицательного знака полагаем значение угла α_j равным экстремальному углу α_j^* , иначе равным корню уравнения $f_j(\alpha) = 0$, который минимально отличается от экстремального:

$$\alpha_j = \begin{cases} \alpha_j^*, & \text{когда } f_j(\tau_j(\alpha_j^*)) \leq 0 \\ \alpha: f_j(\alpha) = 0, \quad |\alpha_j^* - \alpha| \Rightarrow \min, & \text{когда } f_j(\tau_j(\alpha_j^*)) > 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Таким образом, с помощью (4.2)–(4.10) определим ФГР γ_j ($j = 1, 2, 3$) как

$$\gamma_j = R_j(\tau(\alpha_j)) - r(\tau_j(\alpha_j)) \quad (4.11)$$

и в результате представим ФГР $\gamma(t, x)$ в виде

$$\gamma(t, x) = \max_j \gamma_j(t, x) \quad (4.12)$$

Выражения (4.12) и (4.1) совпадают в случае выполнения неравенства $y_1^{(j)}(\tau_j(\alpha_j)) \geq z(\tau_j(\alpha_j))$. Заметим, что на интервале $[t, \tau]$ имеет место только случай игры "трое–за–одним", а в момент τ случай "трое–за–одним" может совпадать с любым из остальных случаев игры.

Итак, ФГР $\gamma(t, x)$ определяется следующим образом:

$$\gamma(t, x) = \max_j \max_{z \in G(\tau_j)} \min_i \min_{y \in G_i(\gamma_j)} d(z, y), \quad j = 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.13)$$

где $\tau_j = \tau_j(t, x)$. Выражение (4.13) позволяет определить все границы областей D_j ($j = 0, 1, 2, 3$).

Линия, разделяющая области D_1 и D_2 , задается внутренними конхоидами Никомеда радиусов $R(t)$ с центрами в P_j ($j = 1, 2$), окружность радиуса $R(t)$ с центром в O разделяет области D_0, D_1 и D_0, D_2 ; прямые, соединяющие позиции преследователей, отделяют D_2 от D_3 ; линия, разделяющая области D_3 и D_0 , находится численно из условия, что для объекта E , лежащего на границе, выполняется равенство

$$\alpha_j = \alpha_0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.14)$$

причем α_j определяется из (4.10), а α_0 – угол между лучом P_jO и осью абсцисс.

Сингулярные многообразия размерности 1 и 0 находятся численно из условий:

$$\gamma_i(t) = \gamma_j(t), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad \gamma_1(t) = \gamma_2(t) = \gamma_3(t) \quad (4.15)$$

соответственно.

5. Свойство u -стабильности ФГР. Свойство u -стабильности ФГР в областях D_1 и D_2 доказана в работах [1, 6]. Остается проверить u -стабильность в областях D_0 и D_3 .

Утверждение 1 (*u*-стабильность в D_0). Пусть при $t = t_0, x = x_0$ имеет место равенство $\gamma(t_0, x_0) = \gamma_0$. Тогда для любой позиции $E \in D_0$ и любого постоянного управления $v = (v_1, v_2) = \text{const}$ на интервале $[t_0, t]$ найдутся управления $u^{(i)} = (u_1^{(i)}, u_2^{(i)})$, такие, что будет справедливо неравенство $\gamma(t, x(t)) = \gamma_1 \leq \gamma_0$.

Можно показать, что такими управлениями преследователей $P_i, i = 1, 2, 3$ будут управления, направленные в ТП $O(t_0)$, которые имеют вид

$$u_j^{(i)} = \mu(o_j(t_0) - y_j^{(i)}(t_0)) / d(P_i(t_0), O(t_0)), \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2$$

Замечание. Если существует момент $t^* \in [t_0, t]$ такой, что $E(t^*) \in D_i, i = 1, 2$, то выбранные управления можно доопределить на интервале $[t^*, t]$ управлениями, соответствующими случаям $D_i (i = 1, 2)$.

Утверждение 2. (*u*-стабильность в D_3 , регулярный случай).

Пусть при $t = t_0, x = x_0$ значение ФГР (4.12) определяется равенством $\gamma(t_0, x_0) = \gamma_1(t_0, x_0) = \gamma_0$. Тогда для любой позиции $E \in D_3, (E \notin S)$ и любого постоянного управления $v = (v_1, v_2)$ на интервале $[t_0, t]$ найдутся управления $u^{(i)} = (u_1^{(i)}, u_2^{(i)})$, такие, что значение ФГР в момент t удовлетворяет неравенству $\gamma(t, x(t)) = \gamma_1 < \gamma_0$.

Выберем управления:

$$u_j^{(1)} = \mu(\omega_j - y_j^{(1)}(t_0)) / d(P_1(t_0), \Omega), \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2$$

$$\Omega \in (\omega_1, \omega_2) = B_{R_1}(A_1(t)) \cap B_{\mu\tau_1}(P_1(t_0)) \neq \emptyset, \quad d(\Omega, O(\tau_1)) \Rightarrow \min$$

$$u_1^{(2)} = -u_1^{(1)}, \quad u_2^{(2)} = u_2^{(1)}$$

$$u_j^{(3)} = \mu(o_j(\tau_1) - y_j^{(3)}(t_0)) / d(P_3(t_0), O(\tau_1)), \quad j = 1, 2$$

Здесь $B_R(A)$ – круг радиуса R с центром A , а точка $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$ определена как

$$\Omega = B_{R(t)}(A_1(t)) \cap B_{\mu\tau}(P_1(t_0)) \neq \emptyset, \quad d(\Omega, O(t_0)) \Rightarrow \min$$

Можно убедиться в том, что эти управления на интервале $[t_0, t]$ гарантируют выполнение неравенство $\gamma(t, x(t)) < \gamma_0$. Аналогично выбираются управления для случая, когда $\gamma(t_0, x_0) = \gamma_j(t_0, x_0) = \gamma_0, (j = 2, 3)$.

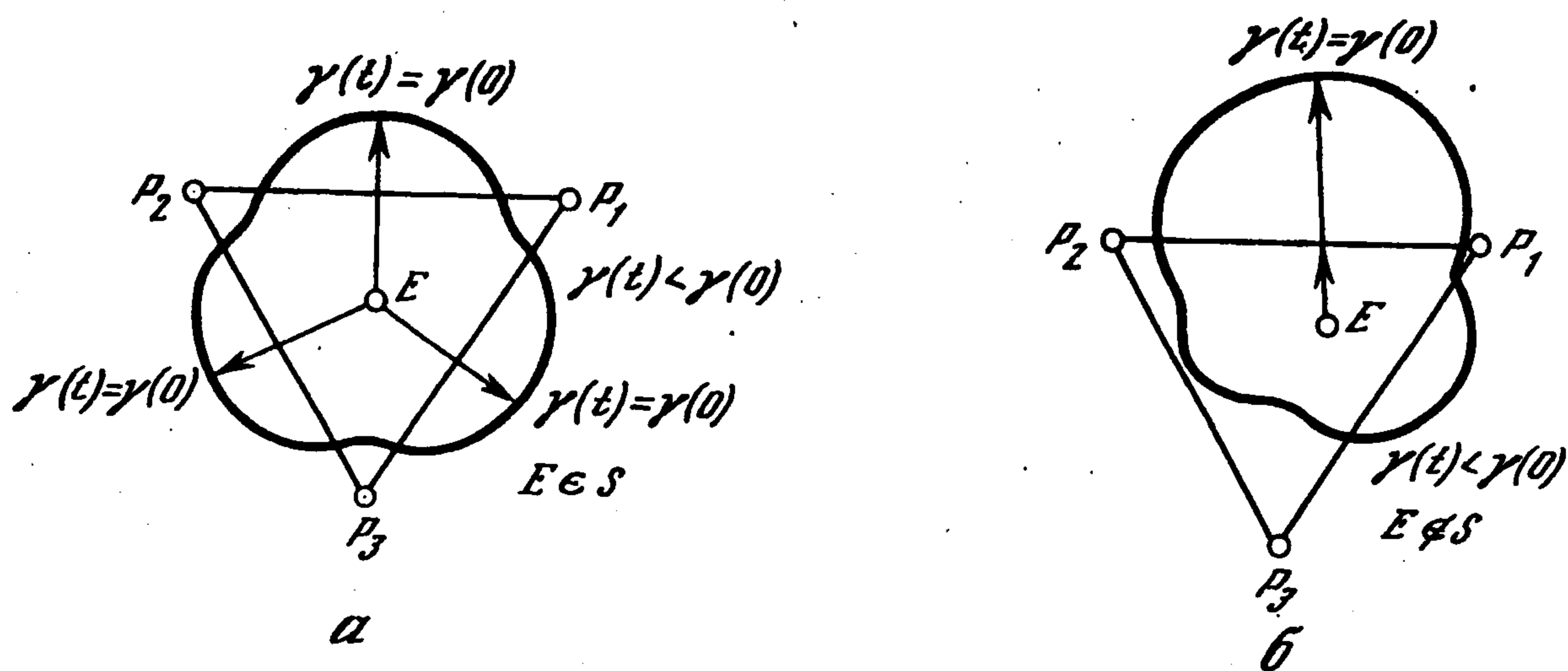
Утверждение 3 (*u*-стабильность в D_3 , сингулярный случай). Пусть при $t = t_0, x = x_0$ выполняется равенство $\gamma(t_0, x_0) = \gamma_1(t_0, x_0) = \gamma_3(t_0, x_0) > \gamma_2(t_0, x_0)$ и также $\alpha_1 = \alpha_1^*, \alpha_3 = \alpha_3^*$ (см. 4.10). Значение ФГР определено равенством $\gamma_j(t_0, x_0) = \gamma_0$. Тогда для любой позиции $E(x) \in D_3(x \in S)$ и произвольного управления $(v_1, v_2) = \text{const}$ можно найти такие управления $u^{(i)} = (u_1^{(i)}, u_2^{(i)})$, что в момент t выполняется неравенство $\gamma(t, x(t)) < \gamma_0$.

Пусть $G(t)$ пересекается с прямой $A_1(t_0)A_3(t_0)$ в точках $A_1(t)$ и $A_3(t)$. Обозначим срединный перпендикуляр к отрезку $A_1(t)A_3(t)$ как L и пересечение L с кругом $B_{\mu(t-t_0)}(P_1(t_0))$ как I .

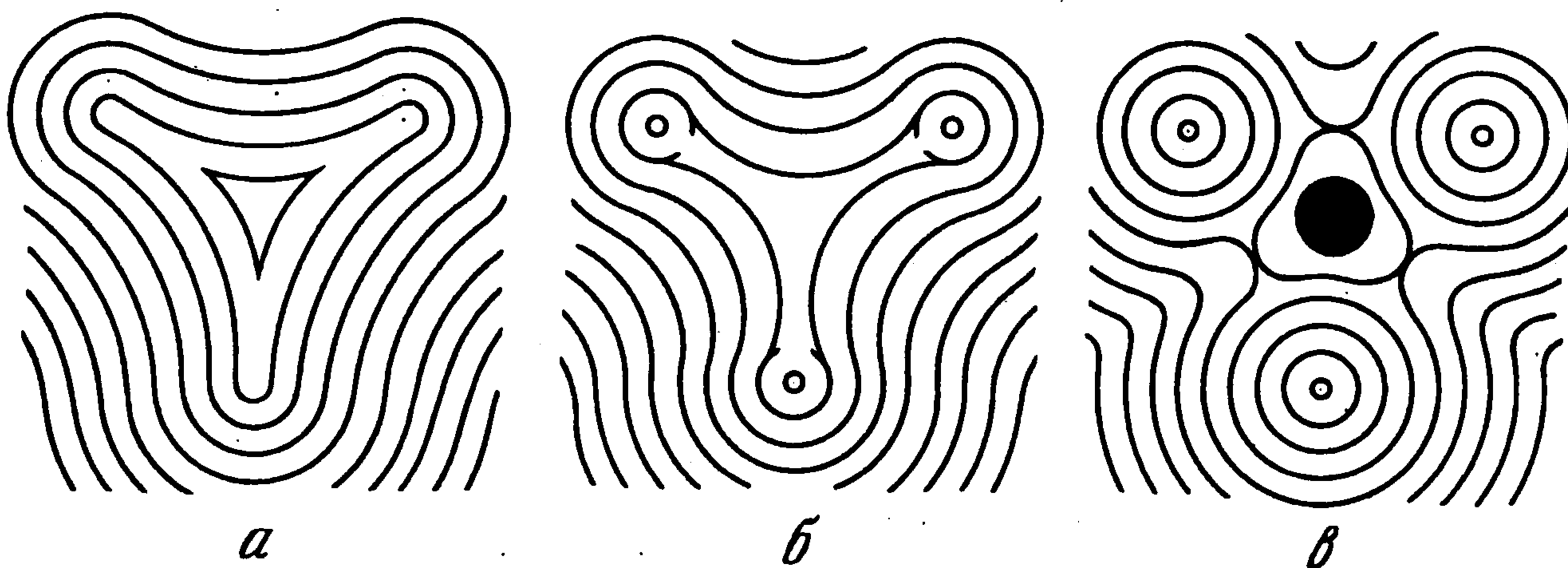
Утверждение доказывает следующий выбор управлений: игрок $P_i (i = 1, 2, 3)$ выбирает управление $u_j^{(i)}$, направленное в точку $\Omega_i = (\omega_1^{(i)}, \omega_2^{(i)})$:

$$u_j^{(i)} = \mu(\omega_j^{(i)} - y_j^{(i)}(t_0)) / d(P_i(t_0), \Omega_i), \quad j = 1, 2$$

$$\Omega_i = \begin{cases} \Omega: \Omega \in I, I \neq \emptyset \\ A_i(t): d(A_i(t)P_1(t_0)) > d(A_j(t)P_1(t_0)), i, j = 1, 2, I = \emptyset \end{cases}$$



Фиг. 5



Фиг. 6

По точке Ω_1 находим $P_1(t)$ и значение $V = d(P_1(t), A_1(t))$, а точки Ω_2 и Ω_3 , каждая из которых принадлежит пересечению двух окружностей, располагаются максимально близко друг к другу

$$\Omega_2 \in \{B_{\mu(t-t_0)}(P_2(t_0)) \cap B_V(A_1(t))\}$$

$$\Omega_3 \in \{B_{\mu(t-t_0)}(P_3(t_0)) \cap B_V(A_3(t))\}$$

$$d(\Omega_2, \Omega_3) \Rightarrow \min$$

Аналогично можно доказать утверждение в предположении, что максимум ФГР (4.12) достигается на γ_2 и γ_3 или на γ_1 и γ_2 . Замечание к утверждению 1 верно для утверждений 2 и 3.

По данным численного исследования, сингулярными линиями являются прямые.

В заключение, рассмотрим случай, когда сингулярные многообразия определяются вторым соотношением (4.10), где $\alpha_i \neq \alpha_i^*$ ($i = 1, 2, 3$).

В связи с тем что трансцендентное уравнение $f_j(\alpha) = 0$, $j = 1, 2, 3$ имеет более чем четвертую степень относительно $\sin(\alpha)$, вычисление значения ФГР без применения компьютера вызывает непреодолимые сложности.

Поступим следующим образом. Пусть s_{ij} узлы ортогональной сетки, определенной в области D_3 . Обозначим четырехугольник, образованный узлами $s_{i-1,j-1}$, $s_{i-1,j}$, $s_{i,j-1}$, $s_{i,j}$, как S_{ij} . Очевидно, для любого $E \in S$ найдется S_{ij} такой, что $E \in S_{ij}$.

Как и выше, на интервале $[t_0, t]$ убегающий выбирает управление $v = \text{const}$.

Предположение. Если для узлов, определяющих S_{ij} , не нарушается свойство u -стабильности ФГР, то и для любой позиции, определенной включением $E \in S_{ij}$, выполняется свойство u -стабильности.

Доказательство u -стабильности в узлах s_{ij} , проводилось численно, с помощью программы, реализующей алгоритм построения ФГР (4.2)–(4.13), минимизирующей ФГР и генерирующей позицию $x(t)$ и значение ФГР по вычисленным $u^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) для произвольного управления убегающего; при этом шаг разбиения выбирался в зависимости от желаемой точности.

Было проверено численно, что для любой требуемой точности свойство u -стабильности в узлах S_{ij} выполняется.

На фиг. 5 изображена диаграмма зависимости ФГР $\gamma(t, x)$ от различных управлений u для позиций, определенной вторым из условий (4.10). Видно, что $\gamma(t, x) \leq \gamma(t_0, x_0)$, причем равенство имеет место только для экстремальных управлений u , определяемых из (4.3).

На фиг. 6 изображены линии уровня функции цены игры во всех D_i ($i = 0, 1, 2, 3$) для фиксированных позиций преследователей $P_1(100/3^{1/2}, 0)$, $P_2(-100/3^{1/2}, 0)$, $P_3(0, -100)$ при $\vartheta = 1$. На фиг. 6, а $\mu = 12, \nu = 24$, на фиг. 6, б $\mu = 10, \nu = 20$, на фиг. 6, в $\mu = 6, \nu = 12$. Линии уровня на фиг. 6 соответствуют областям начальных позиций убегающего объекта на фиг. 4.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-01-01089).

ЛИТЕРАТУРА

1. Pashkov A.G., Terekhov S.D. A Differential game of approach with two pursuers and one evader // J. Optimiz. Theory and Appl. 1987. V. 55. N 2. P. 303–311.
2. Levchenkov A.Y., Pashkov A.G. Differential game of optimal approach of two inertial pursuers to a noninertial evader // J. Optimiz. Theory and Appl. 1990. V. 65. N 3. P. 501–518.
3. Levchenkov A.Y., Pashkov A.G., Terekhov S.D. A construction of the value function in some differential games of approach with two pursuers and one evader // Proc. 4 Intern. Sympos. on Differential Games and Applications, Helsinki, Finland, 1990. Springer Lecture Notice in Control and Information Sciences. 1991. V. 156. P. 38–47.
4. Пашков А.Г., Синицын А.В. Построение функции цены в игре сближения двух преследующих объектов с одним убегающим при наличии фазового ограничения // Изв. РАН. Техн. кибернетика, 1994. № 3. С. 152–162.
5. Pashkov A.G., Sinitsyn A.V. The value function of a pursuit-evasion differential games with three pursuers and one evader // Prepr. 6th Intern. Sympos. on Dynamic Games and Applications / Eds. by M. Breton and G. Zaccour, St. Jovite, Quebec, Canada, 1994. P. 501–510. Montreal: Intern. Soc. Dynam. Games, 1994.
6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
8. Breakwell J.V., Hagedorn P. Point of capture of two evaders in succession // J. Optimiz Theory and Appl. 1979. V. 27. N 1. P. 89–97.
9. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 222 с.
10. Григоренко Н.Л. Преследование несколькими разнотипными объектами одного убегающего // Докл. АН СССР. 1982. Т. 268. № 3. С. 529–533.
11. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
12. Пшеничный Б.Н., Раппопорт И.С., Чикрий А.А. Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими преследователями // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 3. С. 530–535.