УДК 62-50

© 1995 г. М. Тухтасинов

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривается игровая задача, динамика которой описывается уравнениями в частных производных. Уравнения игроков, аддитивно представляющие правую часть, подчинены интегральным или поточечным ограничениям. Цель первого игрока, информированного о мгновенном значении управления своего партнера, – приведение системы в невозмущенное состояние. Для решения задачи используется метод декомпозиции системы, развитый [1] для управляемой системы (с одним игроком). Рассматриваются три варианта сочетания ограничений игроков. Во всех случаях предлагается явный вид управления первого игрока. Основное усложнение по сравнению с задачей, рассмотренной ранее [1], заключается в том, что это управление состоит из двух слагаемых, оцениваемых в разных нормах.

Пусть в пространстве $L_2(\Omega)$ задан дифференциальный оператор A вида [2]

$$Az = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left((a_{ij}(x)\frac{\partial z}{\partial x_j}\right), \quad x \in \Omega \tag{1}$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$$

где Ω – ограниченная область в R^n. Областью определения $D(A)$ оператора A является $\mathring{C}^2(\Omega)$ (пространство дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций). Коэффициенты $a_{ij}(x)$ удовлетворяют следующему условию: существует постоянная $\gamma \neq 0$, такая, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \gamma^2 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \forall(\xi_1,\ldots,\xi_n) \in R^n, \quad x \in \Omega \tag{2}$$

означающее эллиптичность оператора A.

Обозначив

$$(z, y)_A = (Ax, y), \quad z, y \in \mathring{C}^2(\Omega)$$

можно показать, что $(.,.)_A$ удовлетворяет всем требованиям скалярного произведения. Таким образом, $\mathring{C}^2(\Omega)$ превратится в гильбертово пространство. Но оно неполно относительно нормы, порожденной скалярным произведением $(.,.)_A$. Пополнив пространство $\mathring{C}^2(\Omega)$ относительно нормы

$$\|z\|_A = \sqrt{(Az, z)}, \quad z \in \mathring{C}^2(\Omega)$$

получим полное гильбертово пространство, называемое энергетическим пространством оператора A; обозначим его H_A.

Известно [3], что оператор A с условием (2) имеет дискретный спектр, т.е. имеет бесконечную последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ обобщенных чисел с единственным пределом в бесконечности и последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ обобщенных собственных элементов, полную в пространстве $L_2(\Omega)$. Не нарушая общности, положим $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Используя эти данные, построим следующие пространства (они, конечно, связаны с оператором A) [4]. Пусть

$$l_r = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots): \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \alpha_i^2 < \infty \right\}$$

$$H_r(\Omega) = \left\{ f \in L_2(\Omega): f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i, \ \alpha \in l_r \right\}.$$

В пространствах l_r, $H_r(\Omega)$ определим скалярные произведения следующим образом:

$$(\alpha, \beta)_r = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \alpha_i \beta_i, \quad \alpha, \beta \in l_r$$

Отсюда $\|\alpha\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \alpha_i^2 \right)^{1/2}$.

Аналогично

$$(f, g)_r = (\alpha, \beta)_r; \quad f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i, \quad g = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \varphi_i$$

Отсюда $\| f \| = \| \alpha \|$.

Заметим, что $H_0(\Omega) = L_2(\Omega)$ и $H_r(\Omega) \subset H_s(\Omega)$ при $s < r$.

Через $C(0, T; H_r(\Omega))(L_2(0, T; H_r(\Omega)))$ обозначим пространство, состоящее из непрерывных (измеримых) функций на $[0, T]$ со значениями в $H_r(\Omega)$, где T – положительная постоянная.

Уравнения, встречающиеся в дальнейшем, будем принимать в смысле теории распределений (обобщенных функций) [4].

Рассмотрим следующую дифференциальную игру:

$$\begin{aligned} & dz(t)/dt + Az(t) = -u(t) + \upsilon(t), \quad 0 < t \leq T \\ & u(\cdot), \upsilon(\cdot) \in L_2(0, T; \ H_r(\Omega)) \\ & z(0) = z^0, \quad z^0 \in H_{r+1}(\Omega) \end{aligned} \tag{3}$$

Оператор A задан в виде (1).

Было доказано [4] существование и единственность решения задачи (3) в пространстве $C(0, T; H_{r+1}(\Omega))$, если $z^0 \in H_{r+1}(\Omega)$ при некотором $r \geq 0$.

Функции $u(t)$, $\upsilon(t)$, $0 \leq t \leq T$ называются управлениями первого (преследующего) и второго (убегающего) игроков соответственно. Они стеснены ограничениями, определяемыми одной из следующих систем неравенств:

$$\|u(\cdot)\| \leq \rho, \quad \|\upsilon(\cdot)\| \leq \sigma \tag{4}$$

$$\|u(\cdot)\| \leq \rho, \quad \|\upsilon(t)\| \leq \sigma, \quad 0 \leq t \leq T \tag{5}$$

$$\|u(t)\| \leq \rho, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \|\upsilon(\cdot)\| \leq \sigma \tag{6}$$

где ρ, σ – неотрицательные постоянные.

Управления $u(t)$, $\upsilon(t)$, $0 \leq t \leq T$ удовлетворяющие одному из условий (4)–(6), называются допустимыми.

Определение. Будем говорить, что в игре (3), (4) или (3), (5) или (3), (6) из начальной точки z^0 возможно завершение преследования, если существует число $T = T(z^0) \geqslant 0$, такое, что для любого допустимого управления $\upsilon(\cdot)$ убегающего игрока, зная в каждый момент $t \in [0, T]$ уравнение из (3) и значение $\upsilon(t)$, можно выбрать значение $u(t)$ таким образом, что $u(\cdot)$ – допустимое управление преследующего игрока и $z(t') = 0$ для игры (3), (4) и (3), (5) и $\sup_k |z_k(t')| \leqslant l$ для игры (3), (6), где $z_k(\cdot)$ – коэффициент Фурье, $l > 0$ – постоянная, $t' \in [0, T]$, $z(\cdot)$ – решение соответствующей задачи при управлениях u, υ.

Задача преследования. В игре (3), (4) или (3), (5) или (3), (6) для каждой начальной точки z^0 найти гарантированное время $T(z^0)$ окончания игры и построить допустимое управление $u(\cdot)$ преследующего игрока, удовлетворяющее условиям приведенного выше определения

Теорема 1°. Если

$$\rho > \sigma \tag{7}$$

то для игры (3), (4) разрешима задача преследования. При этом

$$T(z^0) = \|z^0\|^2 / (\rho - \sigma)^2 \tag{8}$$

2°. Если

$$\rho^2 \geqslant 4\sigma \|z^0\| \tag{9}$$

то для игры (3), (5) разрешима задача преследования. При этом

$$T(z^0) = [(\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\sigma\|z^0\|}) / (2\sigma)]^2 \tag{10}$$

3°. Если $\rho > 0$, то для игры (3), (6) разрешима задача преследования.

Доказательство. 1°. Используя условия (7), управление $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, преследующего игрока можно представить в виде [5]

$$u(t) = \upsilon(t) + w(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{11}$$

где $w(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ – некоторая пока неопределенная функция, удовлетворяющая неравенству

$$\| w(\cdot) \| \leqslant \rho - \sigma \tag{12}$$

Представим решение $z(t)$ и функцию $w(t)$ в виде ряда Фурье

$$\begin{gathered} z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\varphi_k, \quad w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)\varphi_k, \quad z_k(\cdot), w_k(\cdot) \in L_2 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{r+1} \int_0^T |z_k(t)|^2\, dt < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^r \int_0^T |w_k(t)|^2\, dt = \|w(\cdot)\|^2 \end{gathered} \tag{13}$$

Подставив разложения (13) в уравнение (3), учитывая соотношение (11) и приравнивая соответствующие коэффициенты полной системы $\{\varphi_k\}$, получим бесконечную систему дифференциальных уравнений.

Интегрируя каждое уравнение этой системы с соответствующим начальным условием, получим

$$z_k(t) = e^{-\lambda_k t}\left(z_k^0 - \int_0^t e^{\lambda_k s} w_k(s)\, ds \right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

где $z_k^0 = (z^0, \varphi_k)$ $(k = 1, 2 \ldots)$ – коэффициенты Фурье функции z^0.

Непосредственно проверяется, что при

$$w_k(t) = W_k \operatorname{sign} z_k^0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T_0 \tag{14}$$

$$W_k = \lambda_k |z_k^0| / (e^{\lambda_k T_0} - 1), \quad T_0 = T(z^0) = \|z^0\|^2 / (\rho - \sigma)^2$$

имеют место равенства

$$z_k(T_0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

и функция $w(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, при $T = T_0$ удовлетворяет неравенству (12). Отсюда вытекает допустимость управления (11):

$$\|u(\cdot)\| \leqslant \|\upsilon(\cdot)\| + \|w(\cdot)\| \leqslant \sigma + \rho - \sigma = \rho.$$

Так как все коэффициенты Фурье $z_k(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, при $t = T_0$ обращаются в нуль в силу (15), то $z(T_0) = 0$.

2°. Управление $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, преследующего игрока выберем в форме (11). Функция $w(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, определена вторым равенством (13) и формулой (14). Если $T(z^0)$ определить в соответствии с равенством (10), то $\|w(\cdot)\|^2 \leqslant T^{-1}\|z^0\|^2$, т.е. $w(\cdot) \in L_2(0, T; H_r(\Omega))$.

Отсюда имеем $\|w(\cdot)\| \leqslant \rho - \sigma\sqrt{T}$. Замечая то, что $\|\upsilon(\cdot)\| \leqslant \sigma\sqrt{T}$, получим, что $\|u(\cdot)\| \leqslant \rho$, т.е. управление ((12)) допустимо.

Непосредственным вычислением можно показать, что $z_k(T) = 0$ ($k = 1, 2, \ldots$), т.е. $z(T) = 0$.

3°. Так как в каждый момент времени t преследователю известно значение $\upsilon(t)$ управления убегающего игрока, то преследователь может представить $\upsilon(t)$ в виде $\upsilon_1(t) + \upsilon_2(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, где функции $\upsilon_1(\cdot)$, $\upsilon_2(\cdot)$ строятся следующим образом:

$$\upsilon_1(t) = \begin{cases} \upsilon(t), & \text{если } \|\upsilon(t)\| \leqslant \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\upsilon(t)/\|\upsilon(t)\|, & \text{если } \|\upsilon(t)\| > \bar{\rho} \end{cases}$$

$$\upsilon_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \|\upsilon(t)\| \leqslant \bar{\rho} \\ (\|\upsilon(t)\| - \bar{\rho})\upsilon(t)/\|\upsilon(t)\|, & \text{если } \|\upsilon(t)\| > \bar{\rho} \end{cases}$$

$\bar{\rho}$ – некоторая фиксированная неотрицательная константа, удовлетворяющая неравенству $\bar{\rho} < \rho$.

Если выбрать управление $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ в виде (11), где $\|w(t)\| \leqslant \rho - \bar{\rho}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, то правая часть уравнения состоит из двух управлений, которыми распоряжаются первый и второй игроки соответственно. Как было показано [1], существует момент времени T, такой, что с помощью управления $w(\cdot)$ можно перевести траекторию в начало координат. Поэтому второй игрок, управляя функцией $\upsilon(\cdot)$, стремится нарушить неравенство $\sup_k |z_k(T)| \leqslant l$.

Таким образом, для решений соответствующих дифференциальных уравнений имеем

$$z_k(T) = -e^{-\lambda_k T} \int_0^T e^{\lambda_k t} \upsilon_{2k}(t)\,dt \tag{16}$$

$$\upsilon_{2k}(t) = (\upsilon_2(t), \varphi_k), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Допустим, что $\|\upsilon(\cdot)\| \leqslant \sigma_1$, где $0 < \sigma_1 \leqslant \sigma$. Тогда при фиксированном $k (\geqslant 1)$ имеем

$$|\upsilon_{2k}(t)| \leqslant (\|\upsilon(t)\| - \bar{\rho})\lambda_k^{-r/2}$$

причем равенство достигается, если $\upsilon(t) = \upsilon_k(t)\varphi_k$, где $\upsilon_k(t) = (\upsilon(t), \varphi_k)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Отсюда и из (16) получим, что

$$|z_k(T)| \leqslant I_k, \quad I_k = e^{-\lambda_k T} \int_0^T e^{\lambda_k t} \big| \|\upsilon(t)\| - \bar{\rho} \big|\, dt\, \lambda_k^{-r/2}$$

Пусть

$$\max_{\|\upsilon(\cdot)\|\leq\sigma_1} I_k \leq \left(\sigma_1\left[\frac{1-e^{2\lambda_k(\bar{T}-T)}}{2\lambda_k}\right]^{1/2} - \bar{\rho}\frac{1-e^{\lambda_k(\bar{T}-T)}}{\lambda_k}\right)\lambda_k^{r/2} = \Psi(\bar{T}).$$

Можно показать, что равенство достигается, если

$$\upsilon(t) = \sigma_1 e^{\lambda_k t}\left[\left(\frac{e^{2\lambda_k T} - e^{2\lambda_k \bar{T}}}{2\lambda_k}\right)^{1/2}\varphi_k\right]^{-1}$$

$$0 \leq \bar{T} \leq t \leq T, \quad \|\upsilon(\cdot)\| \leq \sigma_1, \quad \upsilon(t) \geq \bar{\rho}, \quad \bar{T} \leq t \leq T$$

Используя методы дифференциального исчисления, можно убедиться, что

$$\Psi_k = \max \Psi_k(\bar{T}) = \begin{cases} \Psi_k(0), & T \leq \Phi_k \\ \dfrac{\sigma_1^2}{\sqrt{2}((2\bar{\rho}^2 + \lambda_k\sigma_1^2)^{1/2} + \sqrt{2}\bar{\rho})\lambda_k^{r/2}}, & T > \Phi_k \end{cases}$$

$$\Phi_k = \ln(1 + \sigma_1^2\lambda_k / (2\rho_k^2)) / (2\lambda_k)$$

Таким образом, если $\max_{k\geq 1}\Psi_k \leq l$, то игра заканчивается за время T. В противном случае, т.е. если $|z_k(T)| > l$ для некоторого $k(\geq 1)$, то $l < \Psi_k$, и отсюда имеем $\sigma_1 \geq c = \text{const} > 0$.

Взяв $z(T)$ за новое начальное положение, аналогичными рассуждениями приходим к следующему заключению: или игра заканчивается за время $T + T_1$, или второй игрок еще раз истратит энергию в количестве не менее c. Таким образом, за конечное число шагов энергия второго игрока исчерпывается, что означает окончание игры.

Пример. Пусть тепло распространяется вдоль стержня единичной длины, на концах которого поддерживается нулевая температура. Тогда имеем задачу (3), где $Az = -d^2z/dx^2$, областью определения A является подпространство $\dot{C}^2(0, 1)$ пространства $L_2(0, 1)$. Функция z^0 имеет вид

$$z^0 = \frac{1}{48\sqrt{2}}\begin{cases} -4x^3 + 3x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ -4(1-x)^3 + 3(1-x), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Было показано [2], что энергетическим пространством H оператора A является пространство $\dot{W}_2^1(0, 1)$, состоящее из функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1) они абсолютно непрерывны на $[0, 1]$;
2) их первые производные суммируемы с квадратом на $[0, 1]$;
3) они в точках $x = 0$, $x = 1$ обращаются в нуль.

Обобщенные собственные функции и обобщенные собственные значения оператора A имеют вид [2]

$$\varphi_k = \sqrt{2}\sin \pi k x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \lambda_k = (\pi k)^2, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Используя эти данные, строим пространства $H_r(0, 1)$, $r \geq 0$.

Случай 1. Пусть на управляющие функции $u(t)$, $\upsilon(t)$, $0 \leq t \leq T$ наложены ограничения $\|u(\cdot)\| \leq 2$, $\|\upsilon(\cdot)\| \leq 1$.

Можно проверить, что $z^0 \in H_r(0, 1)$ при $r = 3$. Поэтому если $u(\cdot), \upsilon(\cdot) \in H_2(0, 1)$, то задача (3) имеет единственное решение $z(\cdot)$, принадлежащее пространству $C(0, T; H_3(0, 1))$. Применив разд. 1° теоремы, получим, что можно завершить преследование за время

$$T = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{8}$$

Управление $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, преследующего игрока имеет вид (11), где

$$w(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}(-1)^{(k+3)/2}(1+(-1)^{k+3})}{2(\pi k)^2(e^{\lambda_k}-1)}\sin\pi kx$$

Случай 2. Пусть на управляющие функции $u(\cdot)$, $\upsilon(\cdot)$ наложены ограничения $\| u(\cdot) \| \leqslant 2$, $\| \upsilon(t) \| \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Так как $\| z^0 \| = 1/(2\sqrt{2})$, то выполнено неравенство (9). Поэтому применим разд. 2° теоремы. Время окончания игры $T=2-(\sqrt{2}/4+\sqrt{4-\sqrt{2}})$.

Случай 3. Рассмотрим предыдущий пример с ограничениями

$\|u(t)\|\leqslant\rho,\ \ 0\leqslant t\leqslant T,\ \ \|\upsilon(\cdot)\|\leqslant\sigma.$

Управление $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ преследующего игрока выберем в виде (11), где $\|w(t)\|\leqslant\rho-\bar{\rho}$, $0\leqslant t\leqslant T$ или

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^3 w_k(t)\leqslant(\rho-\bar{\rho})^2$$

Аналогично [1], имеем для времени окончания игры

$$T=\|z^0\|/(\rho-\bar{\rho})=1/[2\sqrt{2}(\rho-\bar{\rho})] \tag{17}$$

Если положить $\rho = 2$, $\bar{\rho} = 1$, $\sigma = 1$, то можно показать, что

$$\Psi_k=\sigma_1^2/(\sqrt{2}(\sqrt{2+\lambda_k\sigma_1^2}+\sqrt{2})\lambda_k^{3/2})$$

где $0<\sigma_1\leqslant 1$.

Отсюда следует, что

$$\max_k\Psi_k=\zeta\sigma_1^2,\quad \zeta=((2+\sqrt{4+\sqrt{2}\pi^2\sigma_1^2})\pi^3)^{-1}$$

Значит, если

$$1/((2+\sqrt{4+\sqrt{2}\pi^2})\pi^3)\leqslant l$$

то за время T (17) возможно завершение преследования. В противном случае придется переходить к следующему шагу. При этом заметим, что убегающий игрок должен истратить часть своей энергии. Таким образом, игра закончится за конечное число шагов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф.Л.* Ограниченные управления в системах с распределенными параметрами // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 810–826.
2. *Сатимов Н.Ю.* О задачах преследования и убегания в дифференциальных играх // Мат. заметки, 1981. Т. 29. Вып. 3. С. 455–476.
3. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. шк., 1977. 431 с.
4. *Авдонин С.А., Иванов С.В.* Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент. Киев: УМКВО, 1989. 244 с.
5. *Никольский М.С.* О задаче преследования при различных ограничениях на управления догоняющего и убегающего. Теория оптимальных решений. Киев: Изд-е Ин-та кибернетики, 1975. С. 59–66.

Ташкент

Поступила в редакцию
26.I.1995