УДК 62–50

© 1995 г. А.М. Тарасьев

РЕШЕНИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ИГР В РАМКАХ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ

Рассматривается динамическая модель для эволюционной неантагонистической игры двух коалиций. Особенностями модели являются бесконечный интервал времени и функционалы платы с дисконтированием. Предлагается решение в рамках теории дифференциальных игр. Решение основано на построении функций цены вспомогательных антагонистических дифференциальных игр и использует аппроксимационные сеточные схемы теории обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби. Параллельно со значениями функций цены вычисляются значения оптимальных гарантирующих процедур управления на сетке и строится динамическое равновесие по Нэшу. Исследуется поведение траекторий, порожденных гарантирующими управлениями. Приводятся примеры.

1. Постановка задачи и методы решения. Рассматривается игровая модель взаимодействия двух больших групп (коалиций, популяций) участников (индивидуумов) на продолжительном (бесконечном) промежутке времени. Динамическая система мотивирована моделями дифференциальных игр [1–4] и эволюционных игр [5–12], связанными с задачами экономических изменений [6–9] и динамики популяций [10]. Используются подходы [12] для составления управляемой динамики и постановки неантагонистической дифференциальной игры. Задача формулируется в рамках теории позиционных дифференциальных игр [2–4] и решается методами теории обобщенных (минимаксных, вязкостных) решений уравнений Гамильтона–Якоби [13–16].

Предполагается, что участники каждой коалиции имеют два действия (стратегии) и в каждый момент времени могут придерживаться только одного из них. Считается, что участники из разных коалиций встречаются (образуют игровую пару) случайным образом. При этом выигрыши участников коалиций определяются матрицами выигрышей. Локальные (краткосрочные) выигрыши коалиций задаются как соответствующие математические ожидания (средние выигрыши). Глобальные (долгосрочные) интересы коалиций представляются как интегралы от математических ожиданий на бесконечном промежутке времени с подходящим коэффициентом дисконтирования [6, 17, 18]. Участники могут менять свои действия в соответствии с информационными сигналами. Соответствующая эволюционная динамика коалиций описывается системой дифференциальных уравнений с управляющими параметрами (сигналами). Управления могут выбираться произвольным образом по принципу обратной связи на основе информации о складывающейся позиции динамической системы. Цели коалиций состоят в максимизации собственных глобальных интересов. Задачей соответствующей неантагонистической игры является построение оптимальных гарантирующих позиционных процедур управления для коалиций и динамической ситуации равновесия по Нэшу.

Неантагонистическая игра рассматривается в рамках теории позиционных дифференциальных игр [2–4]. Согласно работе [4] динамическая ситуация равновесия по

Нэшу конструируется на основе решения двух вспомогательных антагонистических дифференциальных игр. Решение антагонистических игр связано с построением функций цены, которые являются обобщенными решениями уравнений в частных производных первого порядка [13–16, 19]. Функции цены вычисляются аппроксимационно в рамках теории обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби. Соответствующие вычислительные процедуры представляют собой аппроксимационные сеточные схемы с подходящими конечно-разностными операторами [17–18, 20–27]. Значения оптимального гарантирующего синтеза вычисляются параллельно со значениями функции цены. Важно отметить, что оптимальные гарантирующие процедуры управления коалиций порождают траектории системы, сходящиеся либо к статическим ситуациям равновесия по Нэшу либо к позициям, в которых значения глобальных выигрышей лучше, чем в точках статического равновесия.

2. Модель игровой динамики. Рассматривается динамическая система, описывающая игровое взаимодействие двух коалиций участников. Используя известные экономические интерпретации [5], можно считать, например, что одна коалиция это продавцы, а вторая – покупатели. В каждый момент времени участники могут выбрать одно из двух действий: продавцы могут продавать по высокой или по низкой цене, покупатели могут покупать или не покупать. Действия продавцов обозначаются индексом i: значение $i = 1$ соответствует высокой цене, значение $i = 2$ – низкой цене. Аналогично действия покупателей обозначаются индексом j: значение $j = 1$ соответствует действию "покупать", значение $j = 2$ – действию "не покупать".

Рассмотрим произвольную пару, составленную участниками из разных коалиций. Эта пара может быть представлена как ситуация (i, j), порожденная действиями i и j. Будем считать, что выигрыши участников первой и второй коалиций определяются коэффициентами a_{ij}^m матриц $A^m = \{a_{ij}^m\}$ $(m = 1, 2)$ соответственно.

Полагаем, что первая коалиция состоит из N участников. Символом $N_i(t)$ обозначим количество участников, выбравших в момент t действие i, $i = 1, 2$. Очевидно, что $N = N_1(t) + N_2(t)$. Аналогично будем считать, что вторая коалиция состоит из M участников и $M_j(t)$ из них придерживаются стратегии j, $j = 1, 2$, так что $M = M_1(t) + M_2(t)$.

Предположим, что многошаговая динамика процесса, в котором участники могут менять свои действия с одного на другое, описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} N_i(t+h) &= N_i(t) + (-1)^i (n_{12}(t)h - n_{21}(t)h), \quad i = 1,2 \\ M_j(t+h) &= M_j(t) + (-1)^j (m_{12}(t)h - m_{21}(t)h), \quad j = 1,2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Особенность динамики (2.1) состоит в том, что число участников, которые могут поменять свои действия в момент t, пропорционально шагу h, $0 < h \leqslant 1$. Более точно, числа $n_{kl}(t)h$ и $m_{kl}(t)h$ означают количество участников коалиций, меняющих действие k на действие l, $k, l = 1, 2$, $k \neq l$.

Тот факт, что только часть членов коалиции, пропорциональная шагу h, может поменять свои действия в текущий момент времени t, имеет следующие интерпретации. Например, такая инерционность может объясняться тем, что только малая часть индивидуумов активна и восприимчива к изменению поведения. Другим объяснением является предположение о наличии "очередей" в тех случаях, когда большие группы участников имеют желание изменить свои действия.

Введем также следующие естественные ограничения на число участников $n_{kl}(t)$, $m_{kl}(t)$, потенциально желающих сменить стратегии:

$$0 \leqslant n_{kl}(t) \leqslant N_k(t), \quad 0 \leqslant m_{kl}(t) \leqslant M_k(t) \tag{2.2}$$

Предположим, что в каждый момент времени t члены разных коалиций образуют

игровые пары случайным образом с равными вероятностями. Вероятность того, что случайным образом выбранная пара образует ситуацию (i, j), равна

$$p_{ij}(t) = \frac{N_i(t)M_j(t)}{NM} \tag{2.3}$$

Легко проверяется выполнение свойств вероятностей

$$p_{ij}(t) \geqslant 0, \quad \sum_{i,j} p_{ij}(t) = 1, \quad i, j = 1, 2 \tag{2.4}$$

От многошаговой системы (2.1), связывающей величины $N_i(t + h)$, $M_j(t + h)$ с величинами $N_i(t)$, $M_j(t)$, можно перейти к системе относительно вероятностей $p_{ij}(t + h)$ и $p_{ij}(t)$:

$$p_{ij}(t+h) = \frac{N_i(t+h)M_j(t+h)}{NM} = p_{ij}(t) - p_{ij}(t)u_i(t)h + \tag{2.5}$$

$$+ p_{kj}(t)u_k(t)h - p_{ij}(t)\upsilon_j(t)h + p_{il}(t)\upsilon_l(t)h + \varphi(t)h^2$$

$$u_i(t) = \frac{n_{ik}(t)}{N_i(t)}, \quad \upsilon_j(t) = \frac{m_{jl}(t)}{M_j(t)}$$

$$\varphi(t) = \frac{(-n_{ik}(t) + n_{ki}(t))(m_{jl}(t) + m_{lj}(t))}{NM}, \quad |\varphi(t)| \leqslant 1$$

$$i \neq k, \quad j \neq l, \quad i, j, k, l = 1, 2$$

От многошаговой системы (2.5) перейдем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1u_1 + x_3u_2 - x_1\upsilon_1 + x_2\upsilon_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2u_1 + x_4u_2 + x_1\upsilon_1 - x_2\upsilon_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1u_1 - x_3u_2 - x_3\upsilon_1 + x_4\upsilon_2 \\ \dot{x}_4 &= x_2u_1 - x_4u_2 + x_3\upsilon_1 - x_4\upsilon_2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$(x_1 = p_{11}, \quad x_2 = p_{12}, \quad x_3 = p_{21}, \quad x_4 = p_{22})$$

$$0 \leqslant u_i \leqslant 1, \quad i = 1, 2; \quad 0 \leqslant \upsilon_j \leqslant 1, \quad j = 1, 2 \tag{2.7}$$

Замечания. 1°. Величины u_i, υ_j в (2.6) безразмерны, а нуль и единица в (2.7) могут быть интерпретированы как управляющие сигналы.

2°. Динамическая система (2.6), (2.7) имеет два первых интеграла

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \quad x_1x_4 - x_2x_3 = 0 \tag{2.8}$$

и удовлетворяет интегральным ограничениям

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{2.9}$$

Поэтому она редуцируется к системе второго порядка

$$\dot{x} = -xu_1 + (1 - x)u_2, \quad \dot{y} = -y\upsilon_1 + (1 - y)\upsilon_2 \tag{2.10}$$

Здесь $x = x_1 + x_2$ $(y = x_1 + x_3)$ – вероятность того, что игрок первой (второй) коалиции выбрал первую стратегию.

3°. Управляющие параметры u, υ

$$u = x(1 - u_1) + (1 - x)u_2, \quad 0 \leqslant u_i \leqslant 1, \quad i = 1, 2$$

$$\upsilon = y(1 - \upsilon_1) + (1 - y)\upsilon_2, \quad 0 \leqslant \upsilon_j \leqslant 1, \quad j = 1, 2$$

удовлетворяют ограничениям

$$u \in I, \quad \upsilon \in I, \quad I = [0, 1] \tag{2.11}$$

а система (2.10) эквивалентна системе

$$\dot{x} = -x + u, \quad \dot{y} = -y + \upsilon \tag{2.12}$$

Для системы (2.12) с условиями (2.11) выполняются интегральные ограничения

$$x \in I, \quad y \in I \tag{2.13}$$

Максимальные скорости системы V_1 и V_2 по каждой координате при ограничениях (2.11), (2.13) равны единице:

$$V_1 = \max_{x,u} |-x + u| = 1, \quad V_2 = \max_{y,\upsilon} |-y + \upsilon| = 1 \tag{2.14}$$

4°. Система (2.12) обладает свойством асимптотической устойчивости

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant |x_1 - x_2| e^{-t}, \quad |y_1(t) - y_2(t)| \leqslant |y_1 - y_2| e^{-t} \tag{2.15}$$

Здесь $(x_i(t), y_i(t))$ – траектории системы (2.12), порожденные парой измеримых управлений $(u(s), \upsilon(s))$, $u(s)$: $[0, +\infty) \to I$, $\upsilon(s)$: $[0, +\infty) \to I$ из начальных позиций $(x_i, y_i) \in I \times I$, $i = 1, 2$

$$x_i(t) = x_i e^{-t} + \int_0^t e^{(s-t)} u(s) ds, \quad y_i(t) = y_i e^{-t} + \int_0^t e^{(s-t)} \upsilon(s) ds$$

3. Локальные и глобальные функционалы выигрышей. Рассмотрим вопрос об оценивании интересов коалиций. Естественно считать, что локальный (краткосрочный) выигрыш определяется как математическое ожидание, связанное с соответствующей матрицей выигрышей и вычисленное в текущий момент времени t. Именно, качество состояния $(x(t), y(t))$ динамической системы (2.12) оценивается для первой ($m = 1$) и второй ($m = 2$) коалиции математическим ожиданием

$$E_m(x(t), y(t)) = a_{11}^m x(t) y(t) + a_{12}^m x(t)(1 - y(t)) + a_{21}^m (1 - x(t)) y(t) + \tag{3.1}$$

$$+ a_{22}^m (1 - x(t))(1 - y(t)) = C_m x(t) y(t) - \alpha_1^m x(t) - \alpha_2^m y(t) + a_{22}^m$$

Здесь

$$C_m = a_{11}^m - a_{12}^m - a_{21}^m + a_{22}^m, \quad \alpha_1^m = a_{22}^m - a_{12}^m, \quad \alpha_2^m = a_{22}^m - a_{21}^m \tag{3.2}$$

Напомним, что величины (3.2) определяют координаты ситуаций равновесия по Нэшу в биматричной игре [5].

Будем рассматривать динамическую систему (2.12) на бесконечном интервале времени $[0, +\infty)$, как это принято в теории эволюционных игр (эволюционных изменений) [6–12]. Пусть $(x(\cdot), y(\cdot)) = \{(x(t), y(t)): t \in [0, +\infty)\}$ – произвольная траектория системы (2.12). Качество траектории оценивается несобственным интегральным функционалом с дисконтированием. Функционалы имеют вид

$$J_m = J_m(x(\cdot), y(\cdot)) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} E_m(x(t), y(t)) dt, \quad m = 1, 2 \tag{3.3}$$

Естественно считать, что функционалы (3.3) задают долгосрочные (глобальные) выигрыши коалиций. Параметр $\lambda > 0$ называется коэффициентом дисконтирования и обеспечивает обесценивание краткосрочного выигрыша с ростом времени. Функционалы такого типа являются традиционными для моделей математической экономики [6, 17]. Отметим, что интегралы (3.3) сходятся, так как функции E_m ограничены.

Интегралы (3.3) можно нормировать, умножив на параметр λ, и интерпретировать как усредненные специальным образом на интервале $[0, +\infty)$ математические ожидания E_m^*:

$$E_m^* = \lambda J_m = \sum_{i,j} a_{ij}^m p_{ij}^*, \quad p_{ij}^* = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p_{ij}(t)dt \tag{3.4}$$

$$0 \leqslant p_{ij}^* \leqslant 1, \quad \sum_{i,j} p_{ij}^* = 1, \quad i,j = 1,2$$

Здесь p_{ij}^* – усредненная вероятность игровой ситуации (i, j) на бесконечном интервале времени $[0, +\infty)$.

4. Динамическое равновесие по Нэшу. Цели коалиций заключаются в максимизации функционалов (3.3). Будем рассматривать постановку соответствующей бескоалиционной игры в рамках теории позиционных дифференциальных игр [2–4]. Согласно одной из конструкций [4] равновесие для бескоалиционной дифференциальной игры (2.12), (3.3) может быть получено в классе процедур управления ($U = u(t, x, y, \varepsilon)$, $V = \upsilon(t, x, y, \varepsilon)$) по принципу обратной связи при решении задач оптимального гарантированного управления для каждой коалиции.

Приведем формулировку определения ситуации равновесия по Нэшу.

Определение 1. Пара позиционных стратегий (U^0, V^0) называется равновесной (ε-равновесной) в смысле Нэша для заданной начальной позиции $(x_0, y_0) \in I \times I$, если для любых позиционных стратегий U и V и для любых траекторий, порожденных парами стратегий (U^0, V^0), (U, V^0), (U^0, V) из точки (x_0, y_0):

$$(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \in X_0, \quad (x_m(\cdot), y_m(\cdot)) \in X_m$$

$$X_0 = X(x_0, y_0, U^0, V^0), \quad X_1 = X(x_0, y_0, U, V^0), \quad X_2 = X(x_0, y_0, U^0, V)$$

выполняются неравенства

$$J_m(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \geqslant J_m(x_m(\cdot), y_m(\cdot)) - \varepsilon \tag{4.1}$$

(с параметром $\varepsilon = 0$ для равновесия и $\varepsilon > 0$ для ε-равновесия).

Укажем возможную конструкцию, в которой равновесие по Нэшу в смысле определения 1 склеивается из решений вспомогательных задач оптимального гарантированного управления (антагонистических игр). Рассмотрим две дифференциальных игры Γ_m. В игре Γ_m задача коалиции m заключается в максимизации функционала J_m, $m = 1, 2$ (3.3) на траекториях системы (2.12), а цели второй коалиции противоположны.

Предположим, что игры Γ_m решены, т.е. вычислены функции цены $w_m = w_m(x, y)$, $(x, y) \in I \times I$, построены оптимальные гарантирующие позиционные процедуры управления ("гарантирующие стратегии") $U_1^0 = u_1^0(t, x, y, \varepsilon)$, $V_2^0 = \upsilon_2^0 = (t, x, y, \varepsilon)$, максимизирующие функционалы J_m, и сконструированы неблагоприятные действия коалиций в отношении друг друга – позиционные процедуры управления ("стратегии наказания") $U_2^0 = u_2^0(t, x, y, \varepsilon)$, $V_1^0 = \upsilon_1^0(t, x, y, \varepsilon)$; минимизирующие функционалы J_m.

Пусть задана произвольная начальная позиция $(x_0, y_0) \in I \times I$, параметр $\varepsilon > 0$ и определена траектория $(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \in X(x_0, y_0, U_1^0, V_2^0)$, порожденная гарантирующими стратегиями U_1^0, V_2^0. Траекторию $(x^0(\cdot), y^0(\cdot))$ естественно назвать приемлемой для обеих коалиций. Зададим момент времени $T_\varepsilon > 0$ условиями

$$T_\varepsilon > \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{R}{\lambda\varepsilon}\right), \quad R = \max_{(x,y)} \max_m |E_m(x, y)|$$

Определим на отрезке $[0, T_\varepsilon]$ приемлемое пошаговое движение $(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot))$, удовлетворяющее условию

$$\max_{t \in [0, T_\varepsilon]} \|(x^0(t), y^0(t)) - (x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t))\| < \varepsilon$$

Символами $u_1^\varepsilon(t)\colon[0,T_\varepsilon)\to I$ и $\upsilon_2^\varepsilon(t)\colon[0,T_\varepsilon)\to I$ обозначим реализации гарантирующих стратегий U_1^0 и V_2^0 для движения $(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot))$.

Сконструируем позиционные стратегии U^0, V^0 из гарантирующих стратегий U_1^0 и V_2^0 и стратегий наказания U_2^0 и V_1^0

$$U^0 = u^0(t,x,y,\varepsilon) = \begin{cases} u_1^\varepsilon(t), & \text{если } \left\|(x,y)-(x^\varepsilon(t),y^\varepsilon(t))\right\| < \varepsilon \\ u_2^0(t,x,y,\varepsilon), & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{4.2}$$

$$V^0 = \upsilon^0(t,x,y,\varepsilon) = \begin{cases} \upsilon_2^\varepsilon(t), & \text{если } \left\|(x,y)-(x^\varepsilon(t),y^\varepsilon(t))\right\| < \varepsilon \\ \upsilon_1^0(t,x,y,\varepsilon), & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{4.3}$$

Аналогично [4] можно доказать следующее утверждение.

Предложение 1. Пара позиционных стратегий (U^0, V^0), заданная соотношениями (4.2), (4.3), является ε-равновесной по Нэшу в смысле определения 1.

Замечание 5. В равновесной по Нэшу паре позиционных стратегий (4.2), (4.3) использована приемлемая траектория $(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot))$, порожденная гарантирующими стратегиями U_1^0, V_2^0. Согласно [4] в конструкции (4.2), (4.3) можно использовать и другие траектории, многообразие которых исчерпает всевозможные ситуации равновесия по Нэшу.

Замечание 6. В зависимости от постановки задачи параметр ε может быть интерпретирован как уровень риска или степень доверия (доброжелательности) коалиций.

5. Функции цены для игр неограниченной продолжительности. Из соотношений (4.2), (4.3) следует, что основными конструкциями при построении равновесных стратегий U^0, V^0 являются решения однотипных дифференциальных игр Γ_m. Рассмотрим для определенности дифференциальную игру Γ_1 такого типа. В этой игре необходимо гарантированно максимизировать функционал J_1 (3.3) на траекториях $(x(\cdot), y(\cdot))$ системы (2.12). Известно [2, 3], что в дифференциальной игре (2.12), (3.3) существует функция цены $(x_0, y_0) \to w_1(x_0, y_0)$, которая каждой позиции (x_0, y_0) ставит в соответствие значение седловой точки

$$\begin{aligned} w_1(x_0,y_0) &= \sup_U \inf_{(x(\cdot),y(\cdot))\in X(x_0,y_0,U)} J_1(x(\cdot),\ y(\cdot)) = \\ &= \inf_V \sup_{(x(\cdot),y(\cdot)\ V)\in X(x_0,y_0,V)} J_1(x(\cdot),\ y(\cdot)) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Символами $X(x_0, y_0, U)$, $X(x_0, y_0, V)$ обозначены траектории системы (2.12), порожденные позиционными стратегиями $U = u(t, x, y, \varepsilon)$, $V = \upsilon(t, x, y, \varepsilon)$.

Согласно [2, 3] гарантирующая стратегия U_1^0 и стратегия наказания V_1^0 определяются функцией цены w_1.

Укажем некоторые свойства функции цены w_1.

Свойство 1. Функция цены w_1 определена и ограничена на единичном квадрате $I\times I$

$$\max_{(x,y)\in I\times I} |w_1(x,y)| \leqslant \frac{K}{\lambda}, \quad K = \max_{(x,y)\in I\times I} |E_1(x,y)| \tag{5.2}$$

В дифференциальной игре неограниченной продолжительности общего вида можно установить [17, 18] свойство непрерывности по Гельдеру для функции цены. В случае динамической системы (2.12), обладающей свойством асимптотической устойчивости (замечание 4), доказывается, что функция w_1 удовлетворяет условию Липшица. Именно, справедливо следующее утверждение.

Свойство 2. Для функции цены w_1 выполнены оценки Липшица

$$|w_1(x_1,y_1)-w_1(x_2,y_2)|\leqslant \frac{K}{1+\lambda}(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|) \tag{5.3}$$

6. Уравнение Гамильтона–Якоби и дифференциальные неравенства для функции цены. Основными свойствами функции цены w_1 являются свойства стабильности, выражающие принцип оптимальности динамического программирования. Напомним, что свойства стабильности заключаются в существовании направлений неубывания и направлений невозрастания функции цены, согласованных с направлениями скоростей динамической системы. В точках дифференцируемости функции цены принцип оптимальности сводится к дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка типа Гамильтона–Якоби (Беллмана–Айзекса). В дифференциальной игре (2.12), (3.3) уравнение Гамильтона–Якоби имеет вид

$$-\lambda w_1(x,y)-\frac{\partial w_1}{\partial x}x-\frac{\partial w_1}{\partial y}y+\max\left\{0,\frac{\partial w_1}{\partial x}\right\}+\min\left\{0,\frac{\partial w_1}{\partial y}\right\}+E_1(x,y)=0 \tag{6.1}$$

Выражение

$$H_1(x,y,s)=-s_1x-s_2y+\max\{0,s_1\}+\min\{0,s_2\}+E_1(x,y) \tag{6.2}$$

называется гамильтонианом задачи (2.12), (3.3), $s=(s_1, s_2)$.

В точках, где функция цены недифференцируема, должны выполняться неравенства для производных по направлениям (сопряженных производных) [14, 18, 19]

$$D^*w_1(x,y)|(s)=\sup_{h\in R^2}(\langle s,h\rangle-\partial_-w_1(x,y)|(h))\geqslant -\lambda w_1(x,y)+H_1(x,y,s) \tag{6.3}$$

$$D_*w_1(x,y)|(s)=\inf_{h\in R^2}(\langle s,h\rangle-\partial_+w_1(x,y)|(h))\leqslant -\lambda w_1(x,y)+H_1(x,y,s) \tag{6.4}$$

Нижняя и верхняя производные по направлениям функции w_1 определены соотношениями

$$\partial_-w_1(x,y)|(h)=\liminf_{\delta\downarrow 0}\frac{w_1(x+\delta h_1,y+\delta h_2)-w_1(x,y)}{\delta}$$

$$\partial_+w_1(x,y)|(h)=\limsup_{\delta\downarrow 0}\frac{w_1(x+\delta h_1,y+\delta h_2)-w_1(x,y)}{\delta}$$

Замечание 7. Известно [14, 17–19], что неравенства (6.3), (6.4) определяют однозначным образом обобщенное решение уравнения (6.1) (функцию цены) в классе ограниченных функций, удовлетворяющих условию Липшица. Неравенство (6.4) выражает свойство u-стабильности функции w_1, а неравенство (6.3) – свойство υ-стабильности.

Замечание 8. Для кусочно-гладких функций

$$w_1(x,y)=\min_i\max_j\varphi_{ij}(x,y)=\max_j\min_i\varphi_{ij}(x,y)$$

$$w_1(x_*,y_*)=\varphi_{ij}(x_*,y_*),\quad i\in I(x_*,y_*),\quad j\in J(x_*,y_*),\quad (x,y)\in O_\varepsilon(x_*,y_*)$$

$$O_\varepsilon(x_*,y_*)=\{(x,y)\in I\times I:\max\{|x-x_*|,|y-y_*|\}<\varepsilon\}$$

производные по направлениям и сопряженные производные могут быть вычислены по формулам

$$\partial_-w_1(x,y)|(h)=\partial_+w_1(x,y)|(h)=\min_i\max_j\langle b_{ij},h\rangle=\max_j\min_i\langle b_{ij},h\rangle$$

$$b_{ij}=\left(\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x},\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial y}\right),\quad h=(h_1,h_2)$$

$$D^* w_1(x_*, y_*)|(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } s \in C \\ +\infty, & \text{если } s \notin C \end{cases}, \quad D_* w_1(x_*, y_*)|(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } s \in D \\ -\infty, & \text{если } s \notin D \end{cases}$$

$$C = \bigcap_i B_i, \quad B_i = \mathrm{co}_j\{b_{ij}\}, \quad D = \bigcap_j B_j, \quad B_j = \mathrm{co}_i\{b_{ij}\}$$

Укажем случаи, когда функция цены w_1 дифференцируема и может быть найдена методом неопределенных коэффициентов.

Предложение 2. Предположим, что коэффициенты матрицы $A^1 = \{a_{ij}^1\}$ удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\alpha_1^1}{C_1} \geqslant \frac{1+\lambda}{2+\lambda}, \quad \alpha_2^1 \leqslant 0, \quad C_1 > 0 \tag{6.5}$$

Тогда функция цены w_1 определяется соотношениями

$$w_1(x, y) = Gxy - \gamma_1 x - \gamma_2 y + g \tag{6.6}$$

$$G = \frac{C_1}{2+\lambda}, \quad \gamma_1 = \frac{\alpha_1^1}{1+\lambda}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2^1}{1+\lambda}, \quad g = \frac{a_{22}^1}{\lambda}$$

При этом экстремумы в уравнении (6.1) равны нулю

$$\max\left\{0, \frac{\partial w_1}{\partial x}\right\} = 0, \quad \min\left\{0, \frac{\partial w_1}{\partial y}\right\} = 0$$

что означает сохранение знака компонент градиента $\nabla w_1 = (\partial w_1 / \partial x, \partial w_1 / \partial y)$ функции w_1 в квадрате $I \times I$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = Gx - \gamma_1 \leqslant 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} = Gx - \gamma_2 \geqslant 0 \tag{6.7}$$

Замечание 9. Примерами матриц, удовлетворяющих условиям (6.5), могут служить не только матрицы с доминирующей второй строкой, но и матрицы с доминирующим первым столбцом. Например, матрица

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$$

удовлетворяет неравенствам (6.5) при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Условия, аналогичные соотношениям (6.5), могут быть получены при других комбинациях неравенств в (6.7). В случае же, когда, например, выполнены условия

$$0 < \frac{\alpha_1^1}{C_1} < 1, \quad 0 < \frac{\alpha_2^1}{C_1} < 1, \quad C_1 \neq 0$$

функция цены w_1 не является дифференцируемой и не имеет аналитического описания. Ее структура в этом случае довольно сложна. Поэтому ниже предлагается аппроксимационная схема построения функции цены w_1 как обобщенного решения уравнения Гамильтона–Якоби (6.1).

7. Аппроксимационные схемы построения функций цены и оптимальных позиционных стратегий. Рассмотрим дискретную аппроксимацию уравнения (6.1). Зафиксируем шаг $h \in (0, 1/\lambda)$ разбиения временного интервала $[0, +\infty)$.

Определение 2. Уравнение вида

$$-\underline{w}_{1,h}(x,y)+hE_1(x,y)+(1-\lambda h)\max_{u\in I}\min_{\upsilon\in I}\underline{w}_{1,h}(x+h(-x+u),y+h(-y+\upsilon))=0 \qquad (7.1)$$

относительно функции $\underline{w}_{1,h}: I\times I\to R$ называется дискретной аппроксимацией уравнения Гамильтона–Якоби (7.1), а его решение $\underline{w}_{1,h}$ называется нижней аппроксимацией обобщенного решения (функции цены) w_1 уравнения (7.1).

Приведем следующее утверждение о сходимости аппроксимационного решения $\underline{w}_{1,h}$ [17, 18]. Отметим также, что аналогичные вопросы аппроксимации функции цены рассматривались в [26, 27].

Предложение 3. Существует единственное решение $\underline{w}_{1,h}$ уравнения (7.1). При $h\downarrow 0$ функции $\underline{w}_{1,h}$ сходятся к функции цены w_1 в метрике пространства непрерывных функций и справедлива оценка

$$\max_{(x,y)\in I\times I}|\underline{w}_{1,h}(x,y)-w_1(x,y)|<Lh^{1/2} \qquad (7.2)$$

Решение $\underline{w}_{1,h}$ может быть найдено методом последовательных приближений

$$\underline{w}^n_{1,h}(x,y)=(\Pi_*\underline{w}^{n-1}_{1,h})(x,y) \qquad (7.3)$$

$$(\Pi_* w)(x,y)=hE_1(x,y)+(1-\lambda h)\max_{u\in I}\min_{\upsilon\in I}w(x+h(-x+u),y+h(-y+\upsilon)) \qquad (7.4)$$

В качестве начального приближения для итерационной процедуры (7.3), (7.4) можно выбрать любую ограниченную и непрерывную по Липшицу функцию. Например, естественно полагать

$$\underline{w}^0_{1,h}(x,y)=0, \quad \text{или} \quad \underline{w}^0_{1,h}(x,y)=E_1(x,y) \qquad (7.5)$$

Π_* – оператор сжатия с коэффициентом сжатия $(1-\lambda h)$, и следовательно, справедлива оценка

$$\max_{(x,y)\in I\times I}|\underline{w}_{1,h}(x,y)-\underline{w}^n_{1,h}(x,y)|\leq\frac{K}{\lambda}(1-\lambda h)^n \qquad (7.6)$$

При достаточно большом номере итерации m оценки (7.2), (7.6) обеспечат выполнение условия

$$\max_{(x,y)\in I\times I}|\underline{w}^m_{1,h}(x,y)-w_1(x,y)|<Lh^{1/2} \qquad (7.7)$$

Отметим, что в процедуре (7.3), (7.4) параллельно с аппроксимационными значениями $\underline{w}^m_{1,h}(x,y)$ для функции цены $w_1(x, y)$ вычисляется управление $u^m_{1,h}$, реализующее внешний максимум в (7.4)

$$u^m_{1,h}=u^m_{1,h}(x,y)=\arg\max_{u\in I}\min_{\upsilon\in I}\underline{w}^{m-1}_{1,h}(x+h(-x+u),y+h(-y+\upsilon)) \qquad (7.8)$$

Можно доказать, что позиционная стратегия $u^m_{1,h}$ (7.8) является аппроксимацией гарантирующей стратегии U^0_1 для первой коалиции. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 4. Для любого $\varepsilon>0$ найдутся такие шаг разбиения $h\in(0, 1/\lambda)$ и номер итерации m, что для всех траекторий $(x(\cdot), y(\cdot))$, порожденных позиционной стратегией $u^m_{1,h}$ и произвольным измеримым управлением $\upsilon(s)$: $[0, +\infty)\to I$ из начальной позиции (x_0, y_0), выполняется оценка

$$\int_0^{mh}e^{-\lambda t}E_1(x(t),y(t))dt\geq w_1(x_0,y_0)-\varepsilon \qquad (7.9)$$

Наряду с уравнением (7.1), в котором фигурирует операция типа максимин, можно рассматривать уравнение с минимаксным оператором для верхней аппроксимации $\overline{w}_{1,h}$. Решение $\overline{w}_{1,h}$ также может быть найдено методом последовательных приближений по формулам для аппроксимаций $\overline{w}^m_{1,h}$, аналогичным (7.3)–(7.5). При этом стратегия наказания $\overset{0}{\upsilon}_1$ второй коалиции аппроксимируется позиционной стратегией $\upsilon^m_{1,h}$, реализующей внешний минимум в минимаксном соотношении, аналогичном (7.4), и имеющей вид

$$\upsilon^m_{1,h} = \upsilon^m_{1,h}(x,y) = \arg\min_{\upsilon\in I}\max_{u\in I}\overline{w}^{m-1}_{1,h}(x+h(-x+u), y+h(-y+\upsilon)) \tag{7.10}$$

Замечание 10. Для верхней аппроксимации $\overline{w}_{1,h}$ и стратегии наказания $\upsilon^m_{1,h}$ можно сформулировать утверждения аналогичные предложениям 3, 4.

Замечание 11. Во второй игре Γ_2 аналогично вычисляются аппроксимации $\underline{w}^m_{2,h}, \overline{w}^m_{2,h}$ для функции цены w_2 и аппроксимации $\upsilon^m_{2,h}$, $u^m_{2,h}$ для гарантирующей стратегии $\overset{0}{V}_2$ и стратегии наказания $\overset{0}{U}_2$.

8. Сеточные реализации алгоритмов построения функций цены и оптимальных позиционных стратегий. Для численной реализации итерационной процедуры (7.3)–(7.5) и аналогичной процедуры для уравнения с минимаксным оператором используется сеточная аппроксимация итерационных функций $\underline{w}^n_{1,h}, \underline{w}^n_{2,h}, \overline{w}^n_{1,h}, \overline{w}^n_{2,h}$ и соответствующих позиционных стратегий $u^m_{1,h}, \upsilon^m_{2,h}, \upsilon^m_{1,h}, u^m_{2,h}$. Сеточные аппроксимации функций обозначаются теми же символами. Отметим, что формально вычисления по максиминным и минимаксным формулам следует проводить во всех точках (x, y) квадрата фазовых состояний $I\times I$. Чтобы сделать процедуру конечной, вводится сетка, вычисления выполняются лишь в ее узлах и линейно интерполируются на весь квадрат согласно заданной его триангуляции Ω.

Приведем описание предлагаемой численной процедуры. Пусть заданы следующие шаги дискретизации: h – шаг разбиения временного интервала, $\Delta x(\Delta y)$ – шаг разбиения квадрата $I\times I$ по переменной x (по переменной y), $\Delta p(\Delta q)$ – шаг разбиения сегмента I управления u (управления υ).

Предполагается, что имеется следующая зависимость между шагами h, Δx, Δy, Δp, Δq:

$$\Delta x = \psi_1(h),\quad \Delta y = \psi_2(h),\quad \Delta p = \psi_3(h),\quad \Delta q = \psi_4(h) \tag{8.1}$$

Здесь $\psi_i(h)$ – бесконечно малые функции: $\psi_i(h)\downarrow 0$ при $h\downarrow 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Рассматривается фиксированная сетка GR

$$GR = \{(x_i, y_j):\ x_i = i\Delta x,\ y_j = j\Delta y\},\quad (x_i, y_j)\in I\times I$$

Все вычисления проводятся в ее узлах (x_i, y_j). Например, нижняя аппроксимация в уравнении (7.1) вычисляется по формуле

$$\begin{gathered}\underline{w}^n_{1,h}(x_i, y_j) = hE_1(x_i, y_j) + (1-\lambda h)\max_k\min_l \underline{w}^{n-1}_{1,h}(x_{ik}, y_{jl}) \\ x_{ik} = x_i + h(-x_i + k\Delta p),\quad y_{jl} = y_j + h(-y_j + l\Delta q)\end{gathered} \tag{8.2}$$

Здесь значения функций в точках (x_{ik}, y_{jl}) являются линейными интерполяциями значений, заданных в узлах (x_i, y_j) сетки GR, согласно заданной триангуляции Ω квадрата $I\times I$ на симплексы типа S_+ и S_-:

$$S_+ = S_+(x_i, y_j) = \mathrm{co}\{(x_i, y_j),\ (x_i+\Delta x, y_j),\ (x_i, y_j+\Delta y)\}$$

$$S_- = S_-(x_i, y_j) = \mathrm{co}\{(x_i + \Delta x, y_j),\ (x_i, y_j + \Delta y),\ (x_i + \Delta x, y_j + \Delta y)\}$$

Сеточные функции $\underline{w}^n_{2,h}(x_i, y_j)$, $\overline{w}^n_{2,h}(x_i, y_j)$, $\overline{w}^n_{1,h}(x_i, y_j)$ вычисляются аналогично по соответствующим максиминным и минимаксным формулам.

Пользуясь результатами работ [20–23], можно доказать следующее утверждение о сходимости аппроксимационных сеточных схем вида (8.2).

Предложение 5. Пусть функции в (8.1) заданы соотношениями

$$\psi_i(h) = K_i h^{1+a}, \quad a \geqslant 0, \quad i = 1,2, \quad \psi_j(h) = K_j h, \quad j = 3,4 \tag{8.3}$$

т.е. функции $\psi_1(h)$, $\psi_2(h)$ либо линейны по переменной h (при $a = 0$), либо имеют более высокий порядок малости (при $a > 0$), а функции $\psi_3(h)$, $\psi_4(h)$ линейны. Тогда аппроксимационные сеточные схемы (8.2) сходятся при $n \to \infty$, $h \downarrow 0$ и оценка сходимости составляет величину порядка $h^{1/2}$.

Рассмотрим вопрос о возможности использования параметров k, l, реализующих внешние экстремумы в максиминных и минимаксных соотношениях вида (8.2), в качестве аппроксимаций для гарантирующих стратегий U_1^0, V_2^0 и стратегий наказания U_2^0, V_1^0. Приведем соотношение для сеточной функции $u^m_{1,h}$, аппроксимирующей стратегию U_1^0

$$u^m_{1,h}(x_i, y_j) = k^*(x_i, y_j)\Delta p \tag{8.4}$$

Здесь $k^*(x_i, y_j)$ – аргумент внешнего экстремума в (8.2).

Аппроксимирующие стратегии $\upsilon^m_{2,h}$, $u^m_{2,h}$, $\upsilon^m_{1,h}$ определяются аналогично (8.4) из соответствующих максиминных и минимаксных формул.

Отметим, что стратегии $u^m_{1,h}$, $\upsilon^m_{2,h}$, $u^m_{2,h}$, $\upsilon^m_{1,h}$ определены только в узлах (x_i, y_j) сетки GR.

Рассмотрим два способа интерполяции этих значений: кусочно-постоянный и линейный. Можно доказать следующие утверждения относительно, например, стратегии $u^m_{1,h}$.

Предложение 6. Пусть в (8.3) $a > 0$, т.е. $\psi_1(h)$, $\psi_2(h)$ – функции более высокого порядка малости, чем h. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие шаг разбиения $h \in (0, 1/\lambda)$ и номер итерации m, что для всех траекторий $(x(\cdot), y(\cdot))$, порожденных кусочно-постоянной интерполяцией u_1^{pc} значений стратегии $u^m_{1,h}(x_i, y_j)$ (8.4) и произвольным измеримым управлением $\upsilon(s)$, $\upsilon \in I$ из начальной позиции (x_0, y_0), выполняется оценка (7.9).

Для того чтобы сформулировать аналогичное утверждение при $a = 0$, необходимо ввести следующее дополнительное условие.

Гипотеза 1 (*о структуре решений*). Пусть $a = 0$, т.е. $\psi_1(h) = K_1 h$, $\psi_2(h) = K_2 h$, $r > \max\{K_1, K_2, V_1, V_2\}$, $V_1 = V_2 = 1$. Рассмотрим множество

$$Z = \{(x_i^*, y_j^*) \in GR\colon\ u^m_{1,h}(\xi_1, \eta_1) \neq u^m_{1,h}(\xi_2, \eta_2),\ (\xi_k, \eta_k) \in O(x_i^*, y_j^*, rh),\quad k = 1,2\}$$

$$O(x_i^*, y_j^*, rh) = \{(\xi, \eta) \in I \times I\colon\ \max\{|\xi - x_i^*|, |\eta - y_j^*|\} \leqslant rh\}$$

тех узлов (x_i^*, y_j^*) сетки GR, в rh-окрестности $O(x_i^*, y_j^*, rh)$ которых значения управления $u^m_{1,h}(x_i, y_j)$ принимают разные значения. Предположим, что линейная интерполяция $\underline{w}^{m-1}_{1,h}(\xi, \eta)$ значений $\underline{w}^{m-1}_{1,h}(x_i, y_j)$ – вогнутая функция с точностью до бес-

конечно малой величины rh^{1+b} ($b > 0$) в rh-окрестности $O(x_i^*, y_j^*, rh)$ любой точки $(x_i^*, y_j^*) \in Z$:

$$\gamma \underline{w}_{1,h}^{m-1}(\xi_1, \eta_1) + (1-\gamma)\underline{w}_{1,h}^{m-1}(\xi_2, \eta_2) \geqslant \underline{w}_{1,h}^{m-1}(\gamma\xi_1 + (1-\gamma)\xi_2, \gamma\eta_1 + (1-\gamma)\eta_2) - rh^{1+b}$$

$$0 \leqslant \gamma \leqslant 1, \quad (\xi_k, \eta_k) \in O(x_i^*, y_j^*, rh), \quad k = 1,2$$

При выполнении гипотезы 1 справедливо следующее утверждение.

Предложение 7. Пусть в (8.3) $a = 0$ и выполнена гипотеза 1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие шаг разбиения $h \in (0, 1/\lambda)$ и номер итерации m, что для всех траекторий $(x(\cdot), y(\cdot))$, порожденных линейной интерполяцией u_1^L значений стратегии $u_{1,h}^m(x_i, y_j)$ (8.4) и произвольным измеримым управлением $\upsilon(s)$, $\upsilon \in I$ из начальной позиции (x_0, y_0), выполняется оценка (7.9).

9. Результаты вычислительных экспериментов. Алгоритмы построения функций цены w_1, w_2, гарантирующих стратегий U_1^0, V_2^0, стратегий наказания U_2^0, V_1^0, приемлемой траектории $(x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot))$ и равновесных по Нэшу стратегий U^0, V^0, были реализованы на ЭВМ.

Для вычислительных экспериментов были использованы две основные комбинации матриц выигрышей A^1 и A^2, порождающие три или одну ситуации равновесия по Нэшу в соответствующей биматричной игре [5]. Напомним, что три равновесия возникают при "почти однотипных" интересах коалиций: зигзаги приемлемых ситуаций имеют разную ориентацию (левый и правый) и пересекаются в трех точках (ситуациях равновесия). Одна ситуация равновесия по Нэшу имеет место при "почти антагонистических" интересах коалиций: зигзаги приемлемых ситуаций одинаково ориентированы (оба правые или оба левые) и пересекаются в единственной точке (ситуации равновесия).

В первом случае (трех равновесий) рассматривались следующие однотипные матрицы выигрышей A^1 и A^2

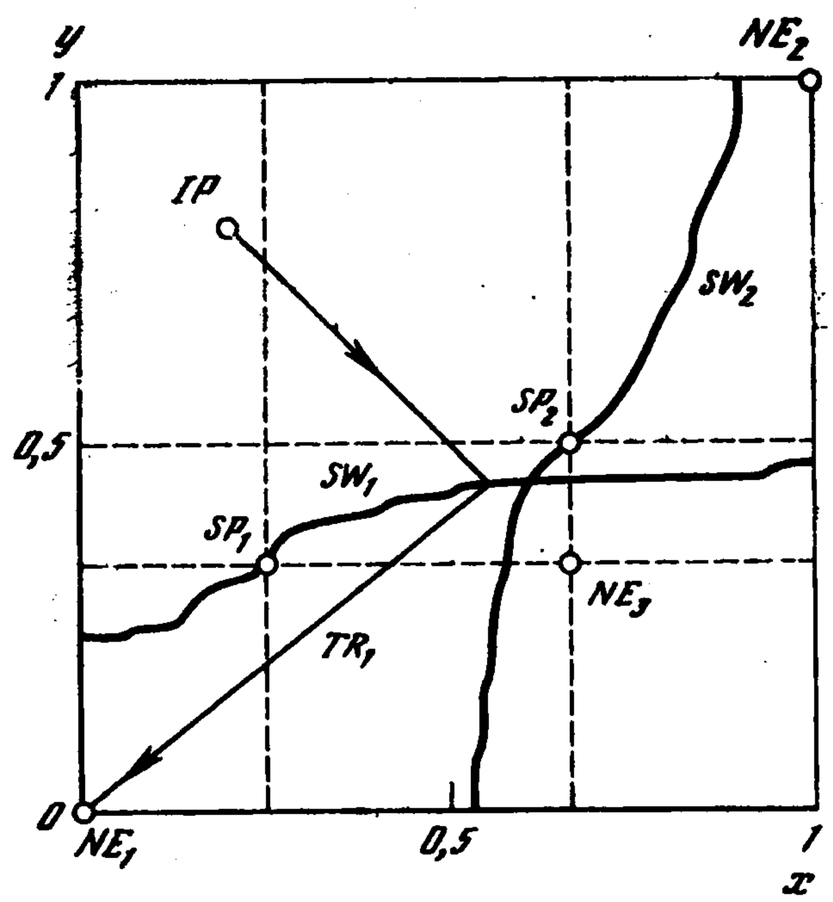
$$A^1 = B_1 = \begin{Vmatrix} 11 & 2 \\ 3 & 6 \end{Vmatrix}, \quad C_1 = a_{11}^1 - a_{12}^1 - a_{21}^1 + a_{22}^1 = 12, \quad \alpha_1^1 = a_{22}^1 - a_{12}^1 = 4, \quad \alpha_2^1 = a_{22}^1 - a_{21}^1 = 3$$

$$A^2 = B_2 = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}, \quad C_2 = a_{11}^2 - a_{12}^2 - a_{21}^2 + a_{22}^2 = 6, \quad \alpha_1^2 = a_{22}^2 - a_{12}^2 = 3, \quad \alpha_2^2 = a_{22}^2 - a_{21}^2 = 4$$

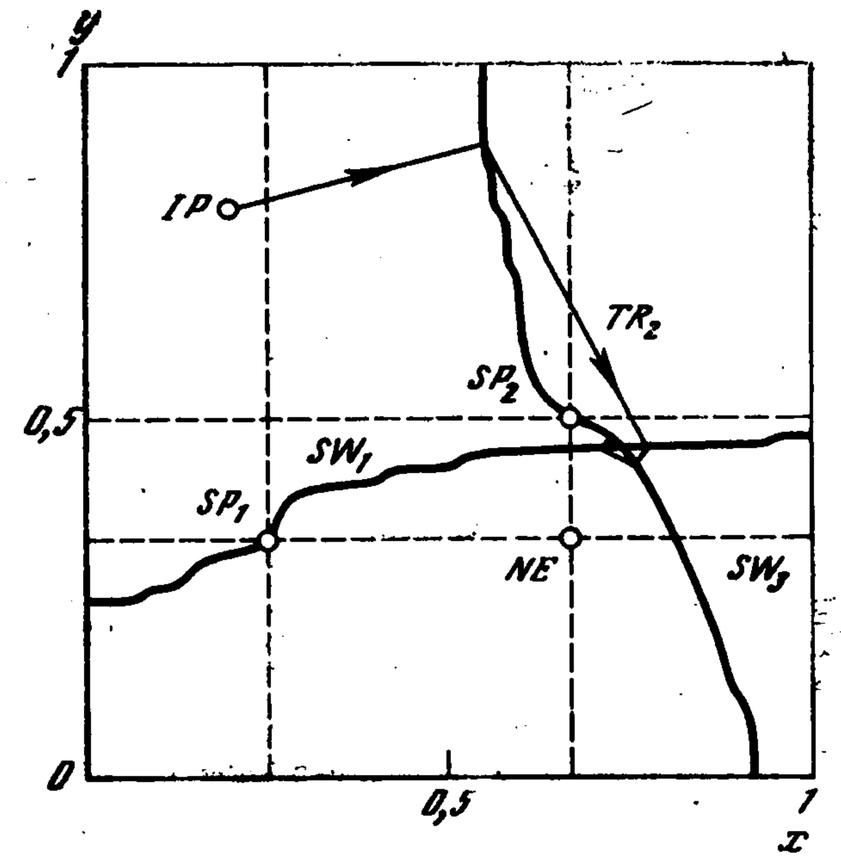
В соответствующих антагонистических матричных играх седловыми ситуациями являются точки: $SP_1 = (1/4, 1/3)$ для матрицы A^1 и $SP_2 = (2/3, 1/2)$ для матрицы A^2. В неантагонистической биматричной игре имеется три ситуации равновесия по Нэшу: $NE_1 = (0, 0)$, $NE_2 = (1, 1)$, $NE_3 = (2/3, 1/3)$. В результате вычислений на ЭВМ с шагами $h = 0{,}1$, $\Delta x = \Delta y = 0{,}01$, $\Delta p = \Delta q = 0{,}1$ были построены аппроксимационные функции цены $\underline{w}_{1,h}^n, \overline{w}_{1,h}^n, \underline{w}_{2,h}^n, \overline{w}_{2,h}^n$, гарантирующие стратегии $u_{1,h}^m, \upsilon_{2,h}^m$ и стратегии наказания $u_{2,h}^m, \upsilon_{1,h}^m$.

Стратегии $u_{1,h}^m, \upsilon_{2,h}^m, u_{2,h}^m, \upsilon_{1,h}^m$ устроены следующим образом. В квадрате фазовых состояний $I \times I$ системы (2.12) имеется кривая переключения, которая делит квадрат на две части. В одной половине значения управлений равны нулю, в другой – единице. На фиг. 1 показаны кривые переключения SW_1, SW_2 для гарантирующих стратегий $u_{1,h}^m, \upsilon_{2,h}^m$. Характерной особенностью этих кривых является то, что кривая SW_1 проходит через седловую точку SP_1, а кривая SW_2 – через седловую точку SP_2. Сверху от кривой SW_1 значения управления $u_{1,h}^m$ равны единице, снизу – нулю. Справа от кривой SW_2 значения управления $\upsilon_{2,h}^m$ равны единице, слева – нулю.

На фиг. 1 изображена также приемлемая траектория $TR_1 = (x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot))$, порожденная гарантирующими стратегиями $u_{1,h}^m, \upsilon_{2,h}^m$. Тректория TR_1 выходит из начальной позиции $IP = (1/5, 4/5)$ и стремится к ситуации равновесия по Нэшу NE_1. Она состоит из двух характеристик уравнения Гамильтона–Якоби (6.1), которые являются отрезками прямых, ориентированных на вершины квадрата. Переключение с одной характеристики на другую происходит на кривой переключения (в рассматриваемом случае – на SW_1).



Фиг. 1



Фиг. 2

Во втором случае (одного равновесия) рассматривались следующие почти антагонистические матрицы выигрышей A^1 и A^2

$$A^1 = B_1, \quad A^2 = B_3 = \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C_2 = a_{11}^2 - a_{12}^2 - a_{21}^2 + a_{22}^2 = -6$$

$$\alpha_1^2 = a_{22}^2 - a_{12}^2 = -3, \quad \alpha_2^2 = a_{22}^2 - a_{21}^2 = -4$$

В соответствующих антагонистических матричных играх седловыми ситуациями являются точки: $SP_1 = (^1/_4, {}^1/_3)$ для матрицы A^1 и $SP_2 = (^2/_3, {}^1/_2)$ для матрицы A^2. В неантагонистической биматричной игре имеется лишь одна ситуация равновесия по Нэшу $NE = (^2/_3, {}^1/_3)$.

Были получены следующие численные результаты для эволюционной игры двух коалиций с матрицами выигрышей $A^1 = B_1$, $A^2 = B_3$. Гарантирующая стратегия $u_{1,h}^m$ как и в первом случае задается кривой переключения SW_1. Структура гарантирующей стратегии $\upsilon_{2,h}^m$ определяется кривой переключения SW_3, которая изображена на фиг. 2. Эта кривая, так же как и кривая SW_2 проходит через седловую точку SP_2, но имеет другую ориентацию. Слева от кривой SW_3 значения управления $u_{2,h}^m$ равны единице, справа – нулю.

На фиг. 2 изображена также приемлемая траектория $TR_2 = (x^\varepsilon(\cdot), y^\varepsilon(\cdot))$, порожденная гарантирующими стратегиями $u_{1,h}^m, \upsilon_{2,h}^m$. Траектория TR_2 выходит из начальной позиции $IP = (^1/_5, {}^4/_5)$ и стремится к точке пересечения кривых переключения SW_1 и SW_3. Она состоит из отрезков характеристик уравнения (6.1), направленных на вершины квадрата. Переключение с одной характеристики на другую происходит на кривых переключения SW_1, SW_3. Другими словами, траектория TR_2 обладает "эволюционно-революционными" свойствами: "эволюция" имеет место на отрезках характеристик, "революция" – на кривых переключения. Особенностью траектории TR_2 является то, что она сходится не к ситуации равновесия по Нэшу NE, как это характерно для траекторий классических эволюционных моделей с репликаторной динамикой [7–10], а стремится к новой устойчивой ситуации – точке пересечения кривых переключения SW_1, SW_3. Отметим, что значения глобальных функционалов выигрышей J_m обеих коалиций на приемлемой траектории TR_2 лучше, чем их значения на траекториях, выходящих из той же начальной позиции IP, но сходящихся к ситуации равновесия по Нэшу NE.

Автор благодарит А.В. Кряжимского за постановку задачи и постоянное внимание к работе и А.И. Субботина за обсуждения результатов. Автор благодарит также Н.В. Мельникову за большую работу по реализации алгоритмов на ЭВМ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-16032) и Международного научного фонда (NME000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
3. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. *Клейменов А.Ф.* Неантагонистические позиционные дифференциальные игры // Екатеринбург: Наука, Уральское Отделение. 1993. 185 с.
5. *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985. 271 с.
6. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975. 606 с.
7. *Nelson R., Winter S.* An evolutionary of economic change. Cambridge; Massachusetts; London: The Belknap Press of Harvard Univ. Press, 1982. 437 p.
8. *Friedman D.* Evolutionary games in economics // Econometrica. 1991. V. 59. № 3. P. 637–666.
9. *Young P.* The evolution of conventions // Econometrica. 1993. V. 61. № 1. P. 57–84.
10. *Hofbauer J., Sigmund K.* The theory of evolution and dynamic systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988. 321 p.
11. *Basar T., Olsder G.J.* Dynamic noncooperative game theory. L.; N.Y.: Acad. Press, 1982. 430 p.
12. *Kryazhimskii A.V.* Behavioral equilibria for a 2×2 – "seller-buyer" game-evolutionary model // Working paper WP-94-131. Intern. Inst. for Appl. Systems Analysis. 1994. 25 p.
13. *Субботин А.И.* Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. № 2. С. 293–297.
14. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991. 215 с.
15. *Crandall M.G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. № 1. P. 1–42.
16. *Crandall M.G., Lions P.-L.* Two approximations of solutions of Hamilton–Jacobi equations // Math. Comput. 1984. V. 43. № 167. P. 1–19.
17. *Dolcetta I.C.* On a discrete approximation of the Hamilton–Jacobi equation of dynamic programming // Appl. Math. Optimiz. 1983. V. 10. № 4. P. 367–377.
18. *Адиатулина Р.А., Тарасьев А.М.* Дифференциальная игра неограниченной продолжительности // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 531–537.
19. *Субботин А.И., Тарасьев А.М.* Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 3. С. 559–564.
20. *Souganidis P.E.* Approximation schemes for viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // J. Different. Equat. 1985. V. 59. № 1. P. 1–43.
21. *Bardi M., Osher S.* The nonconvex multi-dimensional Riemann problem for Hamilton–Jacobi equations // SIAM J. Math. Anal. 1991. V. 22. № 2. P. 344–351.
22. *Субботин А.И., Тарасьев А.М., Ушаков В.Н.* Обобщенные характеристики уравнений Гамильтона–Якоби // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 1. С. 190–197.
23. *Тарасьев А.М.* Аппроксимационные схемы построения минимаксных решений уравнений Гамильтона–Якоби // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 22–36.
24. *Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н.* Аппроксимационные схемы и конечно-разностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.
25. *Taras'yev A.M.* A differential model for a 2×2 – evolutionary game dynamics // Working Paper WP-94-63. Intern. Inst. for Appl. Systems Analysis. Laxenburg. 1994. 32 p.
26. *Bardi M., Falcone M.* An approximation scheme for the minimum time function // SIAM J. Control Optimiz. 1990. V. 28. № 4. P. 950–965.
27. *Pourtallier O., Tidball M.* Approximation of the value function for a class of differential games with target // Preprint 6th Intern. Symp. on Dynamic Games and Applications / Eds. M. Breton and G. Zaccour. St.-Jovite, Quebec, Canada. 1994. Montreal: Intern. Dynamic Games, 1994. P. 263–272.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
21.XII.1994