УДК 62–50

© 1995 г. Н.Ю. Лукоянов

К ЗАДАЧЕ КОНФЛИКТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СМЕШАННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Для линейной динамической системы рассматривается задача управления на минимакс терминального показателя качества. Реализации управляющих воздействий стеснены одновременно геометрическими и интегрально-импульсными, трактуемыми как запас ресурсов управлений, ограничениями. Задача формализуется в дифференциальную игру [1–4] в рамках концепции [5–8], разрабатываемой в Екатеринбурге. При этом, поскольку есть геометрические ограничения на управления, не возникает импульсной постановки и связанных с ней трудностей [2–4]. С другой стороны, поскольку есть интегральные ограничения, появляются дополнительные переменные, эволюция которых описывает динамику расхода ресурсов управлений. Эти переменные подвержены фазовым ограничениям, что составляет особенность задачи. Указаны достаточный информационный образ и класс стратегий для которых данная игра имеет цену и седловую точку. Предложен конструктивный способ вычисления функции цены игры и построения оптимальных стратегий. Этот способ идейно связан с конструкцией стохастического программного синтеза [5] и основан на рекуррентном построении выпуклых сверху оболочек для некоторых вспомогательных функций. Установлена возможность перестановки операций минимума и максимума по ресурсным параметрам при вычислении цены игры согласно предложенной процедуре.

Настоящее исследование развивает конструкции из [5–7], в соответствии с [8], для задач со смешанными ограничениями на управляющие воздействия.

1. Постановка задачи. Пусть эволюция динамической системы описывается уравнением

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u + C(t)\upsilon \tag{1.1}$$

$$x \in R^n, \quad u \in R^r, \quad \upsilon \in R^s, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$$

где x – фазовый вектор, u и υ – векторы управлений первого и второго игроков соответственно, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ – кусочно-непрерывные матрицы-функции, непрерывные справа в точках разрыва; t_0, ϑ – фиксированные моменты времени. Допустимыми реализациями управлений первого $u[t_0[\cdot]\vartheta) = \{u[t], t_0 \leqslant t < \vartheta\}$ и второго $\upsilon[t_0[\cdot]\vartheta)$ игроков предполагаются любые измеримые по Борелю вектор-функции, удовлетворяющие одновременно как геометрическим

$$|u[t]|_1 \leqslant M, |\upsilon[t]|_2 \leqslant N, \quad t_0 \leqslant t < \vartheta \tag{1.2}$$

так и интегрально-импульсным ограничениям

$$\int_{t_0}^{\vartheta} \alpha(\tau)|u[\tau]|_1\, d\tau \leqslant \mu[t_0], \quad \int_{t_0}^{\vartheta} \beta(\tau)|\upsilon[\tau]|_2\, d\tau \leqslant \nu[t_0] \tag{1.3}$$

Здесь $|\cdot|_1$, $|\cdot|_2$ – некоторые нормы в R^r и R^s соответственно, M и N – известные

постоянные; $\mu[t_0] > 0$, $\nu[t_0] > 0$ – заданные числа, $\alpha(\tau)$ и $\beta(\tau)$ – скалярные, положительные, непрерывные на $[t_0, \vartheta]$ функции.

Рассматривается задача об управлениях u и υ, нацеленных соответственно на минимизацию и максимизацию терминального показателя качества

$$\gamma = |x[\vartheta]|_3 \tag{1.4}$$

где $|\cdot|_3$ – какая-либо норма в R^n.

Формализуем эту задачу в дифференциальную игру [5, 8].

Дополнительно к фазовому вектору x системы (1.1) введем переменные μ и ν, эволюция которых описывается уравнениями

$$d\mu/dt = -\alpha(t)|u|_1, \quad d\nu/dt = -\beta(t)|\upsilon|_2, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{1.5}$$

Тогда интегральные ограничения (1.3) перепишутся в виде фазовых ограничений на μ и ν

$$0 \leqslant \mu \leqslant \mu[t_0], \quad 0 \leqslant \nu \leqslant \nu[t_0] \tag{1.6}$$

Под стратегией $u(\cdot)$ первого и стратегией $\upsilon(\cdot)$ второго игроков будем понимать любые вектор-функции

$$u(\cdot) = \{u(t, x, \mu, \nu, \varepsilon),\ |u(t, x, \mu, \nu, \varepsilon)|_1 \leqslant M,\ \{t, x, \mu, \nu\} \in G,\ \varepsilon > 0\} \tag{1.7}$$

$$\upsilon(\cdot) = \{\upsilon(t, x, \mu, \nu, \varepsilon),\ |\upsilon(t, x, \mu, \nu, \varepsilon)|_2 \leqslant N,\ \{t, x, \mu, \nu\} \in G,\ \varepsilon > 0\} \tag{1.8}$$

где

$$G = \{\{t, x, \mu, \nu\}:\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta,\ |x|_e \leqslant R[t],\ 0 \leqslant \mu \leqslant \mu[t_0],\ 0 \leqslant \nu \leqslant \nu[t_0]\} \tag{1.9}$$

$$R[t] = (1 + R_0)\exp\{\lambda(t - t_0)\} - 1$$

– область возможных позиций расширенной системы (1.1), (1.5); ε – параметр точности [5, 8]. В (1.9) $|x|_e$ – евклидова норма x, $R_0 > 0$ – достаточно большое число, определяемое по начальному состоянию системы (1.1) в момент времени $t = t_0$; значение параметра λ определяется по формуле

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 M\exp(\lambda_1(\vartheta - t_0)) + \lambda_3 N \tag{1.10}$$

$$\lambda_1 = \max_t\|A(t)\|, \quad \lambda_2 = \max_t\|B(t)\|, \quad \lambda_3 = \max_t\|C(t)\|, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$$

$$\|A(t)\| = \max_x|A(t)x|_e, \quad |x|_e \leqslant 1; \quad \|B(t)\| = \max_u|B(t)u|_e, \quad |u|_1 \leqslant 1$$

$$\|C(t)\| = \max_\upsilon|C(t)\upsilon|_e, \quad |\upsilon|_2 \leqslant 1$$

Заметим, что ограничение на текущее значение фазового вектора x в определении области G (1.9) не является обременительным, так как выполняется для любого движения системы (1.1), порожденного произвольными измеримыми реализациями управлений, соблюдающими геометрические ограничения (1.2). Ограничения же (1.6) на значения μ и ν (1.5), вообще говоря, такими реализациями управлений не гарантируются, если не предполагать дополнительно выполнения условий (1.3).

Пусть реализовалась позиция $\{t_*, x_*, \mu_*, \nu_*\} \in G$ (1.9). Назначим разбиение Δ_δ ($\delta > 0$) отрезка $[t_*, \vartheta]$

$$\Delta_\delta = \{t_i:\ t_1 = t_*, t_{i+1} > t_i,\ t_{i+1} - t_i \leqslant \delta,\ i = 1,\ldots, k, t_{k+1} = \vartheta\} \tag{1.11}$$

в которое включим все точки разрыва матриц-функций $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$. Выбранные стратегия $u(\cdot)$ (1.7) первого игрока, значение $\varepsilon > 0$ и разбиение Δ_δ (1.11) определяют закон управления U первого игрока

$$U = \{u(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\} \tag{1.12}$$

Пусть на систему действует какое-либо допустимое управление

$$\upsilon[t_*[\cdot]\vartheta) = \{\upsilon[t], |\upsilon[t]|_2 \leqslant N, \quad t_* \leqslant t < \vartheta, \quad \int_{t_*}^{\vartheta} \beta(\tau)|\upsilon[\tau]|_2\, d\tau \leqslant \nu_*\} \tag{1.13}$$

второго игрока. Тогда движение $\{x_U[t], \mu_U[t], \nu[t]\}$, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$, где величины $\mu_U[t]$, $\nu[t]$ определяют оставшийся ресурс управления в момент t для первого и второго игроков соответственно, однозначно формируется под действием закона U (1.12) как решение пошаговых дифференциальных уравнений

$$dx_U[t]/dt = A(t)x_U[t] + B(t)u_{[t_i,t_{i+1})}[t] + C(t)\upsilon[t] \tag{1.14}$$

$$d\mu_U[t]/dt = -\alpha(t)|u_{[t_i,t_{i+1})}[t]|_1, \quad d\nu[t]/dt = -\beta(t)|\upsilon[t]|_2$$

$$t_i \leqslant t < t_{i+1}, \quad i = 1,\ldots,k; \quad x_U[t_1] = x_*, \quad \mu_U[t_1] = \mu_*, \quad \nu[t_1] = \nu_*$$

Начальное состояние $\{x_U[t_i], \mu_U[t_i], \nu[t_i]\}$ для $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$, $i > 1$ совпадает с конечным состоянием $\{x_U[t_i], \mu_U[t_i], \nu[t_i]\}$ для предыдущего отрезка $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$. В (1.14) реализация управления первого игрока $u_{[t_i,t_{i+1})}[t]$, $t_i \leqslant t < t_{i+1}$, $i = 1,\ldots, k$ на каждом шаге назначается законом U (1.12) следующим образом:

$$u_{[t_i,t_{i+1})}[t] = 0, \quad t_i \leqslant t < t_{i+1}, \quad \text{если} \quad \mu_U[t_i] = 0 \tag{1.15}$$

$$u_{[t_i,t_{i+1})}[t] = \begin{cases} u_i, & t_i \leqslant t < t', \\ 0, & t' \leqslant t < t_{i+1}, \end{cases} \quad \text{если} \quad 0 < \mu_U[t_i] < J_i(t_{i+1})$$

где t' определяется из условия $J_i(t') = \mu_U[t_i]$; наконец

$$u_{[t_i,t_{i+1})}[t] = u_i, \quad t_i \leqslant t < t_{i+1}, \quad \text{если} \quad \mu_U[t_i] \geqslant J_i(t_{i+1})$$

Здесь

$$u_i = u(t_i, x_U[t_i], \ \mu_U[t_i], \ \nu[t_i], \varepsilon), \qquad J_i(t) = \int_{t_i}^{t} \alpha(\tau)|u_i|_1\, d\tau$$

Аналогично, для реализовавшейся позиции $\{t_*, x_*, \mu_*, \nu_*\} \in G$ (1.9) выбранные стратегия $\upsilon(\cdot)$ (1.8) второго игрока, значение $\varepsilon > 0$ и разбиение Δ_δ (1.11) определяют закон управления $V = \{\upsilon(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ второго игрока. Этот закон в паре с какой-либо допустимой реализацией управления первого игрока

$$u[t_*[\cdot]\vartheta) = \{u[t], |u[t]|_1 \leqslant M, \quad t_* \leqslant t < \vartheta, \quad \int_{t_*}^{\vartheta} \alpha(\tau)|u[\tau]|_1\, d\tau \leqslant \mu_*\} \tag{1.16}$$

однозначно определяют движение $\{x_V[t], \mu[t], \nu_V[t]\}$, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$.

Формируемые законами U и V реализации управлений $u[t_*[\cdot]\vartheta) = \{u_{[t_i,t_{i+1})}[t], t_i \leqslant t < t_{i+1}, i = 1,\ldots, k\}$ и $\upsilon[t_*[\cdot]\vartheta) = \{\upsilon_{[t_i,t_{i+1})}[t], t_i \leqslant t < t_{i+1}, i = 1,\ldots, k\}$ по построению (1.15) (для $u[\cdot]$ и по аналогии для $\upsilon[\cdot]$) являются допустимыми в смысле (1.16) и (1.13). Следовательно, в силу (1.9), (1.10) рассматриваемые позиции $\{t, x_U[t], \mu_U[t], \nu[t]\}$ и $\{t, x_V[t], \mu[t], \nu_V[t]\}$, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$ не выходят за рамки области G.

Для стратегий $u(\cdot)$, $\upsilon(\cdot)$ и исходной позиции $\{t_*, x_*, \mu_*, \nu_*\} \in G$ будем называть гарантированными результатами величины

$$\rho_u(u(\cdot);\ t_*, x_*, \mu_*, \nu_*) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \lim_{\delta\to 0} \sup_{\Delta_\delta} \sup_{\upsilon[\cdot]} \gamma \tag{1.17}$$

$$\rho_\upsilon(\upsilon(\cdot);\ t_*, x_*, \mu_*, \nu_*) = \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \lim_{\delta\to 0} \inf_{\Delta_\delta} \inf_{u[\cdot]} \gamma \tag{1.18}$$

Здесь Δ_δ ($\delta > 0$) – разбиение (1.11); в (1.17) и (1.18) верхняя и нижняя грани берутся по всем измеримым реализациям $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ (1.16), $\upsilon[t_*[\cdot]\vartheta)$ (1.13).

Стратегии первого игрока $u^0(\cdot)$ и второго $\upsilon^0(\cdot)$ назовем оптимальными, если для всякой позиции $\{t_*, x_*, \mu_*, \nu_*\} \in G$ (1.9) справедливы равенства

$$\rho_u(u^0(\cdot);\ t_*, x_*, \mu_*, \nu_*) = \min_{u(\cdot)} \rho_u(u(\cdot);\ t_*, x_*, \mu_*, \nu_*)$$

$$\rho_\upsilon(\upsilon^0(\cdot);\ t_*, x_*, \mu_*, \nu_*) = \max_{\upsilon(\cdot)} \rho_\upsilon(\upsilon(\cdot);\ t_*, x_*, \mu_*, \nu_*)$$

Было установлено [8] существование оптимальных стратегий $u^0(\cdot)$, $\upsilon^0(\cdot)$ и справедливость равенства

$$\rho_u(u^0(\cdot); t_*, x_*, \mu_*, \nu_*) = \rho_\upsilon(\upsilon^0(\cdot); t_*, x_*, \mu_*, \nu_*) = \rho^0(t_*, x_*, \mu_*, \nu_*)$$

какова бы ни была позиция $\{t_*, x_*, \mu_*, \nu_*\} \in G$ (1.9). Это означает, что $\rho^0(t_*, x_*, \mu_*, \nu_*)$ – цена рассматриваемой дифференциальной игры, а пара оптимальных стратегий $\{u^0(\cdot), \upsilon^0(\cdot)\}$ образует седловую точку. Подчеркнем, что оптимальные стратегии эффективно строятся, по известной функции цены игры, методом экстремального сдвига на сопутствующие позиции [8].

2. Вычисление цены игры. Рассмотрим вспомогательную модель

$$dw/d\tau = A(\tau)w + B(\tau)u + C(\tau)\upsilon, \quad dw_{n+1}/d\tau = -\alpha(\tau)|u|_1 \tag{2.1}$$
$$dw_{n+2}/d\tau = -\beta(\tau)|\upsilon|_2, \quad w \in R^n, \quad u \in R^r, \quad \upsilon \in R^s, \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta$$

Определим область G' возможных позиций модели

$$G' = \{\{\tau, w, w_{n+1}, w_{n+2}\}:\ t_0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta, \quad |w|_e \leqslant R'[\tau], \quad 0 \leqslant w_{n+1} \leqslant \mu[t_0] + \xi,$$
$$0 \leqslant w_{n+2} \leqslant \nu[t_0] + \xi\}, \quad R'[\tau] = (1 + R_0 + \xi)\exp\{\lambda(\tau - t_0)\} - 1 \tag{2.2}$$

В (2.2) $\xi > 0$ – достаточно малое фиксированное число; R_0, λ – из (1.9), (1.10). Отметим, что G (1.9) $\subset G'$ (2.2) ($\{\tau, w, w_{n+1}, w_{n+2}\} = \{t, x, \mu, \nu\}$), а также, что движения $\{w[\tau_*[\cdot]\vartheta], w_{n+1}[\tau_*[\cdot]\vartheta], w_{n+2}[\tau_*[\cdot]\vartheta]\}$ модели (2.1), порожденные из какой-либо позиции $\{\tau_*, w_*, w_{*n+1}, w_{*n+2}\} \in G'$ реализациями $u[\tau_*[\cdot]\vartheta)$ (1.16), $\upsilon[\tau_*[\cdot]\vartheta)$ (1.13), где $t_* = \tau_*$, $\mu_* = w_{*n+1}$, $\nu_* = w_{*n+2}$, не покидают область G'.

Пусть выбраны позиция $\{\tau_*, w_*, \mu_*, \nu_*\} \in G'$ (2.2) модели (2.1) и разбиение $\Delta_k = \Delta_k\{\tau_j\} = \{\tau_j: \tau_1 = \tau_*, \tau_{j+1} > \tau_j, j = 1,\ldots, k, \tau_{k+1} = \vartheta\}$ отрезка $[\tau_*, \vartheta]$, в которое включены все точки разрыва матриц-функций $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$. Введем функции

$$\Delta\psi_j(m, \mu, \nu) = \min_{u[\cdot]\in D_j^u(\mu)} \max_{\upsilon[\cdot]\in D_j^\upsilon(\nu)} \left[\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \langle m, X[\vartheta, \tau](B(\tau)u[\tau] + C(\tau)\upsilon[\tau])\rangle d\tau\right] \tag{2.3}$$

$$D_j^u(\mu) = \left\{u[\tau]: |u[\tau]|_1 \leqslant M, \quad \tau_j \leqslant \tau < \tau_{j+1}; \quad \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \alpha(\tau)|u[\tau]|_1\, d\tau \leqslant \mu\right\}$$

$$D_j^\upsilon(\nu) = \left\{\upsilon[\tau]: |\upsilon[\tau]|_2 \leqslant N, \quad \tau_j \leqslant \tau < \tau_{j+1}; \quad \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \beta(\tau)|\upsilon[\tau]|_2\, d\tau \leqslant \nu\right\}$$

$$j = 1,\ldots, k, \quad \mu \geqslant 0, \quad \nu \geqslant 0; \quad m \in S = \{m \in R^n, |m|^* \leqslant 1\}$$

где $|\cdot|^*$ – норма, сопряженная к норме $|\cdot|_3$, которая фигурирует в (1.4); $X[t, \tau]$ – фундаментальная матрица для уравнения $dx/dt = A(t)x$, а через $\langle\cdot, \cdot\rangle$ обозначено скалярное произведение векторов; $D_j^u(\mu)$, $D_j^\upsilon(\nu)$ – слабокомпактные множества

измеримых вектор-функций. Функции $\Delta\psi_j(m, \mu, \nu)$ будут непрерывными по совокупности своих аргументов, выпуклыми по μ, невозрастающими по μ и неубывающими по ν. Значения функций $\Delta\psi_j(\cdot)$ (2.3) не изменятся, если при определении множеств $D_j^u(\mu)$ и $D_j^v(\nu)$ знак неравенства в последних интегральных ограничениях заменить на знак равенства (разумеется, при тех значениях μ и ν, для которых это равенство возможно).

Далее введем функции $\overset{*}{\varphi}_j(\cdot)$ согласно рекуррентной процедуре

$$\overset{*}{\varphi}_{k+1}(m, \mu, \nu) = 0, \quad \overset{*}{\varphi}_j(m, \mu, \nu) = \{\overset{*}{\psi}_j(\cdot, \mu, \nu)\}_* \tag{2.4}$$

$$\psi_j^*(m,\mu,\nu) = \max_{\nu' \in N_j(\nu)} \min_{\mu' \in M_j(\mu)} [\Delta\psi_j(m,\mu-\mu',\nu-\nu') + \varphi_{j+1}^*(m,\mu',\nu')]$$

$$m \in S, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \mu_*, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant \nu_*, \quad j = k,\ldots, 1$$

где

$$M_j(\mu) = \left\{\mu' \colon \max\left[0,\ \mu - M\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \alpha(\tau)d\tau\right] \leqslant \mu' \leqslant \mu\right\} \tag{2.5}$$

$$N_j(\nu) = \left\{\nu' \colon \max\left[0,\ \nu - N\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \beta(\tau)d\tau\right] \leqslant \nu' \leqslant \nu\right\}$$

и величину

$$e^*(\tau_*, w_*, \mu_*, \nu_*; \Delta_k) = \max_{m \in S}[\langle m, X[\vartheta, \tau_*]w_*\rangle + \varphi_1^*(m, \mu_*, \nu_*)] \tag{2.6}$$

В (2.4) символом $\varphi(m) = \{\psi(\cdot)\}_*$ обозначена выпуклая сверху оболочка функции $\psi(\cdot)$ – минимальная вогнутая функция, мажорирующая функцию $\psi(m)$, $m \in S$. Здесь и далее выпуклая сверху оболочка берется только для $m \in S$ при фиксированных значениях других переменных. В (2.4), (2.6) соответствующие минимумы и максимумы действительно достигаются, поскольку справедлива

Лемма 1. Если $S = \{m \in R^n, |m|^* \leqslant 1\}$ – многогранник, либо строго выпуклое множество, то функции $\overset{*}{\psi}_j(m, \mu, \nu)$ и $\overset{*}{\varphi}_j(m, \mu, \nu)$, $j = k,\ldots, 1$ непрерывны на множестве $S \times [0, \mu_*] \times [0, \nu_*]$, выпуклы по μ, невозрастают по μ и неубывают по ν, при этом $\overset{*}{\varphi}_j(m, \mu, \nu)$ вогнуты по m.

Справедливость леммы 1 вытекает из известных фактов выпуклого анализа [9].

Замечание. Если какая-либо функция $\psi(m)$, $m \in S$ непрерывна, то $\{\psi(m)\}_*$ всегда будет непрерывна на всем множестве S в том случае, когда S удовлетворяет условиям леммы 1, откуда и следует справедливость последней. В противном случае, в качестве S можно выбирать многогранники, аппроксимирующие множество $\{m \in R^n, |m|^* \leqslant 1\}$. Тогда дальнейшие рассуждения останутся неизменными, а полученный результат будет верен с точностью до погрешности указанной аппроксимации.

Напомним, что в [8] при вычислении цены игры вместо функций $\overset{*}{\psi}_j(m, \mu, \nu)$ и $\overset{*}{\varphi}_j(m, \mu, \nu)$ были введены функции $\psi_j(m, \mu, \nu)$ и $\varphi_j(m, \mu, \nu)$, которые определялись через $\Delta\psi_j(m, \mu, \nu)$ (2.3) по формулам (2.4), (2.5) с той лишь разницей, что в (2.4) фигурировала не операция $\max_{\nu'}\min_{\mu'}$, а $\min_{\mu'}\max_{\nu'}$. Соответственно, вместо величины $e^*(\tau_*, w_*, \mu_*, \nu_*; \Delta_k)$ в согласии с (2.6), где в правой части следует заменить $\overset{*}{\varphi}_1(\cdot)$ на $\varphi_1(\cdot)$, определялась величина $e(\tau_*, w_*, \mu_*, \nu_*; \Delta_k)$, для которой был установлен следующий результат [8].

Теорема 1. Каковы бы ни были исходная позиция $\{t_*, x_*, \mu_*, \nu_*\} \in G$ (1.9) и последовательность разбиений $\Delta_k = \Delta_k\{\tau_j\}$ ($k = 1, 2,...$) отрезка $[t_*, \vartheta]$, $\tau_1 = t_*$, $\tau_{k+1} = \vartheta$ с шагом $\delta_k = \max_j(\tau_{j+1} - \tau_j)$, $j = 1,..., k$, удовлетворяющая условию $\lim \delta_k = 0$, $k \to \infty$, справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty} e(t_*, x_*, \mu_*, \nu_*; \Delta_k) = \rho^0(t_*, x_*, \mu_*, \nu_*)$$

Ввиду определений величин $e^*(\cdot)$ (2.6) и $e(\cdot)$ из [8] для любых позиций $\{\tau_*, w_*, \mu_*, \nu_*\}$ и разбиения Δ_k отрезка $[\tau_*, \vartheta]$ справедливо неравенство

$$e^*(\tau_*, w_*, \mu_*, \nu_*; \Delta_k) \leqslant e(\tau_*, w_*, \mu_*, \nu_*; \Delta_k) \tag{2.7}$$

Кроме того, может случиться ситуация, когда неравенство (2.7) будет строгим.

Это показывает следующий

Пример. Рассмотрим систему, описываемую уравнением

$$dx/dt = b(t)u + c(t)\upsilon, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2, \quad x \in R^1, \quad u \in R^1, \quad \upsilon \in R^1 \tag{2.8}$$

где

$$b(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leqslant t < 1 \\ 1, & 1 \leqslant t \leqslant 2 \end{cases}; \quad c(t) = \begin{cases} 6, & 0 \leqslant t < 1 \\ 2, & 1 \leqslant t \leqslant 2 \end{cases} \tag{2.9}$$

Пусть управляющие воздействия u и υ стесены ограничениями смешанного типа

$$|u| \leqslant 1, \quad |\upsilon| \leqslant 1; \quad \int_0^2 |u[\tau]| d\tau \leqslant 1, \quad \int_0^2 |\upsilon[\tau]| d\tau \leqslant 0.25 \tag{2.10}$$

а показатель качества имеет вид

$$\gamma = |x[2]| \tag{2.11}$$

Пусть случилась позиция $\{\tau_*, w_*, \mu_*, \nu_*\} = \{0, 0.5, 1, 0.25\}$. Назначим разбиение $\Delta_2 = \{\tau_1 = 0, \tau_2 = 1, \tau_3 = 2\}$ отрезка времени [0, 2].

Тогда, проводя вычисления, получаем

$$\varphi_1^*(m, 1, 0,25) = -|m|/2, \quad \varphi_1(m, 1, 0.25) = \begin{cases} -|m|^2/(1-|m|), & |m| \leqslant 0,2 \\ (1-9|m|)/16, & 0,2 < |m| \leqslant 1 \end{cases} \tag{2.12}$$

и соответственно

$$e^*(0, 0.5, 1, 0.25; \Delta_2) = 0, \quad e(0, 0.5, 1, 0.25; \Delta_2) = 2.5 - \sqrt{6} > 0 \tag{2.13}$$

Ниже будет показано, что несмотря на неравенство (2.7) (возможно, строгое, как например, (2.8)–(2.13)) для любых позиции $\{t_*, x_*, \mu_*, \nu_*\} \in G$ (1.9) расширенной системы (1.1), (1.5) и последовательности разбиений $\Delta_k = \Delta_k\{\tau_j\}$ ($k = 1, 2,...$) отрезка $[t_*, \vartheta]$, $\tau_1 = t_*$, $\tau_{k+1} = \vartheta$ с шагом $\delta_k = \max_j(\tau_{j+1} - \tau_j)$, $j = 1,..., k$, удовлетворяющей условию $\lim \delta_k = 0$, $k \to \infty$, справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty} e^*(t_*, x_*, \mu_*, \nu_*; \Delta_k) = \lim_{k\to\infty} e(t_*, x_*, \mu_*, \nu_*; \Delta_k) = \rho^0(t_*, x_*, \mu_*, \nu_*) \tag{2.14}$$

Установим сначала важные свойства u-стабильности ([5], с. 208) и υ-стабильности ([5], с. 216) величины $e^*(\cdot)$ (2.6).

Теорема 2 (u-стабильность $e^*(\cdot)$). Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что, каковы бы ни были позиция модели $\{\tau_*, w_* = w[\tau_*], \mu_* = \mu[\tau_*], \nu_* = \nu[\tau_*]\} \in G'$ (2.2) ($w_{n+1} = \mu$, $w_{n+2} = \nu$) и разбиение $\Delta_k = \Delta_k\{\tau_j\}$ отрезка $[\tau_*, \vartheta]$, для всякой допустимой реализации $\upsilon_*[\tau_*[\cdot]\tau^*) \in D_1^\upsilon(\nu_*)$ (2.3), где $\tau^* = \tau_2$ – вторая точка разбиения $\Delta_k\{\tau_j\}$, найдется такая

допустимая реализация $u[\tau_*[\cdot]\tau^*) \in D_1^u(\mu_*)$ (2.3), что движение модели, порожденное этими реализациями из позиции $\{\tau_*, w_*, \mu_*, \nu_*\}$, придет в позицию $\{\tau^*, w^* = w[\tau^*], \mu^* = \mu[\tau^*], \nu^* = \nu^*[\tau^*]\} \in G'$, и будет выполнено неравенство

$$e^*(\tau^*, w^*, \mu^*, \nu^*; \Delta^*_{k^*}) - e^*(\tau_*, w_*, \mu_*, \nu_*; \Delta_k) \leqslant \varepsilon(\tau^* - \tau_*) \tag{2.15}$$

если только

$$\tau^* - \tau_* \leqslant \delta(\varepsilon) \tag{2.16}$$

где $\Delta^*_{k^*} = \Delta^*_{k^*}\{\tau^*_j\}$ – разбиение отрезка $[\tau^*, \vartheta], \tau^*_1 = \tau^*, \ \tau^*_{k^*+1} = \vartheta$, удовлетворяющее условию $\tau^*_j = \tau_i, i = j + 1, j = 1,..., k^*, k^* = k - 1$, а $\tau_i \in \Delta_k$.

Доказательство. Пусть случилась позиция $\{\tau_*, w_*, \mu_*, \nu_*\} \in G'$ и выбрано разбиение Δ_k отрезка $[\tau_*, \vartheta]$, удовлетворяющее условию (2.16) при $\delta(\varepsilon) > 0$, достаточно малом для справедливости последующих рассуждений. Фиксируем реализацию $\upsilon_*[\tau_*[\cdot]\tau^*) \in D_1^\upsilon(\nu_*)$, а стало быть и $\nu^* = \nu[\tau^*]$. Рассмотрим множество $MW = MW(\tau^*, \tau_*, w_*, \mu_*) \subset R^{n+1}$ – область достижимости в пространстве переменных $\{w, \mu\} \subset R^{n+1}$ к моменту τ^* для движений модели, порожденных из позиции $\{\tau_*, w_*, \mu_*, \nu_*\}$ каким угодно управлением $u[\cdot] \in D_1^u(\mu_*)$ в паре с $\upsilon_*[\tau_*[\cdot]\tau^*)$. Это множество будет непустым, выпуклым и компактным в R^{n+1}. Кроме того, если $y = \{w, \mu\} \in MW$, то $\mu \in M_1(\mu_*)$ (2.5) и для любого $\mu' \leqslant \mu, \mu' \in M_1(\mu_*)$ справедливо $y' = \{w, \mu'\} \in MW$. Наряду с MW введем множество

$$MW' = MW'(\tau^*, \tau_*, w_*, \mu_*) \subset R^{n+1}$$

$$MW' = \Bigg\{\{w', \mu\}: \mu = \mu_* - \int_{\tau_*}^{\tau^*} \alpha_1 |u[\tau]|_1 \, d\tau, \quad \mu \in M_1(\mu_*)$$

$$w' = X[\tau^*, \tau_*]w_* + \int_{\tau_*}^{\tau^*} X[\tau^*, \tau]C(\tau)\upsilon_*[\tau]d\tau + \int_{\tau_*}^{\tau^*} X[\tau^*, \tau_*]B(\tau_*)u[\tau]d\tau$$

$$|u[\tau]|_1 \leqslant M, \quad \alpha_1 = \max_\tau \alpha(\tau), \quad \tau_* \leqslant \tau \leqslant \tau^*\Bigg\} \tag{2.17}$$

Множество MW' (2.17) выпукло и компактно в R^{n+1}. Сечение MW' гиперплоскостью $\mu = \mu^0$ (будем обозначать его $MW'|\mu = \mu^0$) есть непустой выпуклый компакт в R^n для любого $\mu^0 \in M_1(\mu_*)$. Заметим также, что если $y = \{w', \mu\} \in MW'$, то в согласии с (1.10), (2.2) и (2.17) позиция $\{\tau^*, w', \mu, \nu^*\} \in G'$ (2.2). В силу указанных свойств множеств MW, MW' и свойств непрерывности $A(\tau)$, $B(\tau)$, $\alpha(\tau)$ при $\tau_* \leqslant \tau \leqslant \tau^*$ (напомним, что все точки разрыва матриц-функций $A(t)$ и $B(t)$ включены в разбиение Δ_k) справедлива

Лемма 2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого вектора $y^0 = \{w'^0, \mu^0\} \in MW'$ найдется такой вектор $z^0 = \{w^0, \mu^0\} \in MW$, что будет справедливо соотношение

$$|y^0 - z^0|_e = |w'^0 - w^0|_e \leqslant \varepsilon(\tau^* - \tau_*)$$

если только выполнено условие (2.16).

Для доказательства теоремы достаточно показать, что существует вектор $y^0 = \{w'^0, \mu^0\} \in MW'$, удовлетворяющий условию

$$\Delta e^* = e^*(\tau^*, w'^0, \mu^0, \nu^*; \Delta^*_{k^*}) - e^*(\tau_*, w_*, \mu_*, \nu_*; \Delta_k) \leqslant \varepsilon(\tau^* - \tau_*) \tag{2.18}$$

$\tau^* - \tau_* \leqslant \delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) > 0$ – достаточно малое число

Действительно, из (2.18), в согласии с леммой 2 и с учетом липшицовости величины $e^*(\tau, w, \mu, \nu; \Delta)$ (2.6) по переменной w, вытекает существование $z^0 = \{w^0, \mu^0\} \in MW$ такого, что справедливо неравенство (2.15) (при $w^* = w^0$, $\mu^* = \mu^0$). А это, если принять во внимание определения множества MW и области G' (2.2), составляет содержание теоремы.

Далее предположим, что найдется пара $(m^0, y^0 = \{w'^0, \mu^0\}) \in D = [S \times MW']$, удовлетворяющая одновременно трем условиям:

$$\langle m^0, X[\vartheta, \tau^*]w'^0\rangle + \varphi_2^*(m^0, \mu^0, \nu^*) = \max_{m \in S}[\mathrm{Idem}(m^0 \to m)] \tag{2.19}$$

$$\Delta\psi_1(m^0, \mu_* - \mu^0, \nu_* - \nu^*) + \varphi_2^*(m^0, \mu^0, \nu^*) = \min_{\mu' \in M_1(\mu_*)}[\mathrm{Idem}(\mu^0 \to \mu')] \tag{2.20}$$

$$\langle m^0, X[\vartheta, \tau^*]w'^0\rangle = \min_{w' \in MW' | \mu = \mu^0}[\langle m^0, X[\vartheta, \tau^*]w'\rangle] \tag{2.21}$$

Здесь Idem в правой части равенства означает выражение, стоящее в левой части равенства при указанной в скобках замене символов.

Пусть $u^0[\tau_*[\cdot]\tau^*) = \{u^0[\tau], \tau_* \leqslant \tau < \tau^*\}$ – реализация управления, которая согласно (2.17) соответствует вектору $y^0 = \{w'^0, \mu^0\} \in MW'$. Из (2.17), (2.21) следует, что справедливо равенство

$$\int_{\tau_*}^{\tau^*} \langle m^0, X[\vartheta, \tau_*]B(\tau_*)u^0[\tau]\rangle d\tau = \min_{u[\cdot]}[\mathrm{Idem}(u^0[\tau] \to u[\tau])] \tag{2.22}$$

$$|u[\tau]|_1 \leqslant M, \quad \tau_* \leqslant \tau < \tau^*, \quad \int_{\tau_*}^{\tau^*} \alpha_1 |u[\tau]|_1 \, d\tau = \mu_* - \mu^0$$

Тогда в силу (2.6), (2.17) и (2.19) получаем

$$e^*(\tau^*, w'^0, \mu^0, \nu^*; \Delta_{k^*}^*) = \langle m^0, X[\vartheta, \tau^*]w'^0\rangle + \varphi_2^*(m^0, \mu^0, \nu^*) =$$

$$= \langle m^0, X[\vartheta, \tau_*]w_*\rangle + \int_{\tau_*}^{\tau^*} \langle m^0, X[\vartheta, \tau]C(\tau)\upsilon_*[\tau]\rangle d\tau +$$

$$+ \int_{\tau_*}^{\tau^*} \langle m^0, X[\vartheta, \tau_*]B(\tau_*)u^0[\tau]\rangle d\tau + \varphi_2^*(m^0, \mu^0, \nu^*) \tag{2.23}$$

С другой стороны, в согласии с (2.4)–(2.6), (2.19) и (2.20) имеем

$$e^*(\tau_*, w_*, \mu_*, \nu_*; \Delta_k) \geqslant \langle m^0, X[\vartheta, \tau_*]w_*\rangle + \varphi_1^*(m^0, \mu_*, \nu_*) \geqslant$$

$$\geqslant \langle m^0, X[\vartheta, \tau_*]w_*\rangle + \Delta\psi_1(m^0, \mu_* - \mu^0, \nu_* - \nu^*) + \varphi_2^*(m^0, \mu^0, \nu^*) \tag{2.24}$$

Из (2.23) и (2.24), при учете (2.3), (2.22) и свойств непрерывности $A(\tau)$, $B(\tau)$, $\alpha(\tau)$ при $\tau_* \leqslant \tau \leqslant \tau^*$, вытекает справедливость неравенства (2.18).

Теперь убедимся, что пара $(m^0, y^0 = \{w'^0, \mu^0\})$ (2.19)–(2.21) действительно существует. Построим отображение $D \to D$. Каждой паре $(m, y) \in D$ поставим в соответствие множество $D_1[m, y]$ всех возможных пар $(m^{(1)}, y^{(1)})$, где $m^{(1)} \in M^0(\tau^*, y = \{w', \mu\}) \subset S$, а $y^{(1)} \in MW'^0(m) \subset MW'$ (2.17). Здесь $M^0(\tau^*, y = \{w', \mu\})$ – множество максимизирующих векторов m^0, удовлетворяющих (2.19) при $w'^0 = w'$, $\mu^0 = \mu$, а $MW'^0(m)$ – множество векторов $y^0 = \{w'^0, \mu^0\}$, удовлетворяющих условиям (2.20), (2.21) при $m^0 = m$. Минимум в правой части (2.21) $(m^0 \to m)$ есть функция, непрерывная по совокупности

переменных $\{m, \mu^0\}$, $m \in S$, $\mu^0 \in M_1(\mu_*)$ (2.5) и линейная по μ^0, что следует из непосредственного вычисления этого минимума в согласии с (2.17). Учитывая это и лемму 1, можно проверить, что множества $M^0(\tau^*, y = \{w', \mu\})$ будут непустыми, выпуклыми, компактными в R^n и изменяющимися полунепрерывно сверху по включению при изменении y, а множества $MW'^0(m)$ – непусты, выпуклы, компактны в R^{n+1} и меняются полунепрерывно сверху по включению при изменении m. Поэтому, в силу теоремы Какутани ([10], с. 638), построенное отображение имеет неподвижную точку $(m^0, y^0 = \{w'^0, \mu^0\}) \in D$, для которой одновременно выполнены условия (2.19)–(2.21). Теорема 2 доказана.

Теорема 3 (υ-стабильность $e^*(\cdot)$). Пусть выбраны позиция модели (2.1) $\{\tau_*, w_* = w[\tau_*], \mu_* = \mu[\tau_*], \nu_* = \nu[\tau_*]\} \in G'$ (2.2) ($w_{n+1} = \mu$, $w_{n+2} = \nu$) и разбиение $\Delta_k = \Delta_k\{\tau_j\}$ отрезка $[\tau_*, \vartheta]$. Тогда найдется такая допустимая реализация $\upsilon_0[\tau_*[\cdot]\tau^*) \in D_1^\upsilon(\nu_*)$ (2.3), где $\tau^* = \tau_2 \in \Delta_k$, что при любой реализации $u[\tau_*[\cdot]\tau^*) \in D_1^u(\mu_*)$ (2.3) будет справедливо неравенство

$$e^*(\tau^*, w[\tau^*], \mu[\tau^*], \nu[\tau^*]; \Delta^*_{k^*}) - e^*(\tau_*, w_*, \mu_*, \nu_*; \Delta_k) \geqslant 0 \tag{2.25}$$

для соответствующего движения модели, порожденного из позиции $\{\tau_*, w_*, \mu_*, \nu_*\}$ этими управлениями.

Доказательство. В силу (2.4)–(2.6), леммы 1 и известных свойств выпуклых сверху оболочек, являющихся следствием теоремы Каратеодори ([9], с. 171), найдутся вектор $m_0 \in S$ и число $\nu_0 \in N_1(\nu_*)$ (2.5), такие, что для любой реализации $u[\tau_*[\cdot]\tau^*) \in D_1^u(\mu_*)$ будут справедливы соотношения

$$e^*(\tau_*, w_*, \mu_*, \nu_*; \Delta_k) = \max_{m \in S}[\langle m, X[\vartheta, \tau_*]w_*\rangle + \{\psi_1^*(m, \mu_*, \nu_*)\}_*] =$$

$$= \langle m_0, X[\vartheta, \tau_*]w_*\rangle + \psi_1^*(m_0, \mu_*, \nu_*) \leqslant$$

$$\leqslant \langle m_0, X[\vartheta, \tau_*]w_*\rangle + \Delta\psi_1(m_0, \mu_* - \mu[\tau^*], \nu_* - \nu_0) + \varphi_2^*(m_0, \mu[\tau^*], \nu_0) \tag{2.26}$$

Пусть выбрана реализация $\upsilon_0[\tau_*[\cdot]\tau^*)$:

$$\int_{\tau_*}^{\tau^*} \langle m_0, X[\vartheta, \tau]C(\tau)\upsilon_0[\tau]\rangle d\tau = \max_{\upsilon[\cdot]}[\mathrm{Idem}(\upsilon_0[\tau] \to \upsilon[\tau])] \tag{2.27}$$

$$|\upsilon[\tau]|_2 \leqslant N, \quad \tau_* \leqslant \tau < \tau^*, \quad \int_{\tau_*}^{\tau^*} \beta(\tau)|\upsilon[\tau]|_2\, d\tau = \nu_* - \nu_0$$

Такая измеримая реализация $\upsilon_0[\cdot]$ существует, по построению $\upsilon_0[\cdot] \in D_1^\upsilon(\nu_*)$ и $\upsilon_0[\cdot]$ – универсальна, т.е. не зависит от выбора реализации $u[\tau_*[\cdot]\tau^*) \in D_1^u(\mu_*)$. Тогда под воздействием управлений $u[\tau]$ и $\upsilon_0[\tau]$, $\tau_* \leqslant \tau < \tau^*$ модель приходит в позицию $\{\tau^*, w[\tau^*], \mu[\tau^*], \nu[\tau^*]\} \in G'$ (2.2), для которой в соответствии с (2.1), (2.6), (2.27) справедливы соотношения

$$\nu[\tau^*] = \nu_0, \quad e^*(\tau^*, w[\tau^*], \mu[\tau^*], \nu[\tau^*]; \Delta^*_{k^*}) \geqslant$$

$$\geqslant \langle m_0, X[\vartheta, \tau^*]w[\tau^*]\rangle + \varphi_2^*(m_0, \mu[\tau^*], \nu[\tau^*]) = \langle m_0, X[\vartheta, \tau_*]w_* +$$

$$+ \int_{\tau_*}^{\tau^*} \langle m_0, X[\vartheta, \tau](B(\tau)u[\tau] + C(\tau)\upsilon_0[\tau])\rangle d\tau + \varphi_2^*(m_0, \mu[\tau^*], \nu_0) \tag{2.28}$$

Из (2.26)–(2.28), при учете (2.3), следует неравенство (2.25). Теорема 3 доказана.

Как следствие, из теорем 2 и 3, принимая во внимание существование цены исследуемой игры, заключаем, что справедлива

Теорема 4. Каковы бы ни были исходная позиция $\{t_*, x_*, \mu_*, \nu_*\} \in G$ (1.9) и последовательность разбиений $\Delta_k = \Delta_k\{\tau_j\}$ ($k = 1, 2,...$) отрезка $[t_*, \vartheta]$, $\tau_1 = t_*$, $\tau_{k+1} = \vartheta$ с шагом $\delta_k = \max_j(\tau_{j+1} - \tau_j)$, $j = 1,..., k$, удовлетворяющая условию $\lim \delta_k = 0$, $k \to \infty$, справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty} e^*(t_*, x_*, \mu_*, \nu_*; \Delta_k) = \rho^0(t_*, x_*, \mu_*, \nu_*)$$

Из теорем 1 и 4 при учете единственности цены игры следует равенство (2.14).

В заключение заметим, что в силу (2.14) и подходящих свойств величин $e^*(\cdot)$ и $e(\cdot)$ как $e^*(\cdot)$, так и $e(\cdot)$ могут быть использованы для приближенного вычисления значений цены игры и построения стратегий, гарантирующих результат, близкий к цене игры с наперед заданной точностью. Описание способа формирования таких стратегий на базе величины $e(\cdot)$ приведено в [8]. Более того, в данном контексте, операции минимума и максимума по ресурсным параметрам μ' и ν' в (2.4) можно переставлять, что иногда оказывается удобным при практических вычислениях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (NMS000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. *Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.* К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2. № 5. С. 587–599.
3. *Никольский М.С.* Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 6. С. 964–971.
4. *Субботина Н.Н., Субботин А.И.* Альтернатива для дифференциальной игры сближения – уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 397–406.
5. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
6. *Красовский А.Н.* Построение смешанных стратегий на основе стохастических программ // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 186–192.
7. *Локшин М.Д.* О дифференциальных играх с интегральными ограничениями на управляющие воздействия // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 11. С. 1952–1961.
8. *Лукоянов Н.Ю.* О задаче конфликтного управления при смешанных ограничениях на управляющие воздействия // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 9. С. 1537–1545.
9. *Рокафеллар Р.Т.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
10. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
31.I.1995