

УДК 531.36

© 1995 г. Е.В. Абрарова

### ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

Рассматривается задача о поступательно-вращательном движении твердого тела с трехосным эллипсоидом инерции в центральном поле тяготения. Тело моделируется безмассовым шаром, на концах трех взаимно перпендикулярных диаметров которого расположены точечные массы. Показано, что в отличие от случаев использования приближенного выражения для потенциала сил тяготения существуют не только "тривиальные" стационарные движения тела, при которых главные центральные оси инерции тела совпадают с осями орбитальной системы координат, но и другие классы стационарных движений. Кроме того, исследована устойчивость указанных "тривиальных" стационарных движений и отмечена возможность вековой устойчивости движений, неустойчивых в спутниковом приближении.

1. Рассмотрим задачу о движении тела с трехосным эллипсоидом инерции в центральном ньютоновском поле. Тело моделируется безмассовым шаром радиуса  $a$ , на концах трех взаимно ортогональных диаметров  $d_i$  которого расположены точечные массы  $m_i/2$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Без ограничения общности будем полагать, что  $m_1 > m_2 > m_3$ .

Введем неподвижную систему координат  $M\xi\eta\zeta$  с началом в притягивающем центре и связанную с телом систему координат  $Ox_1x_2x_3$  с началом в центре масс и осями  $Ox_i$ , направленными по указанным выше диаметрам.

Положение центра масс тела относительно неподвижной системы координат будем определять сферическими координатами  $\rho, \vartheta, \psi$ , где  $\vartheta$  – угол, образуемый радиус-вектором  $\rho = MO$  с плоскостью  $O\xi\zeta$ ,  $\psi$  – угол между осью  $O\xi$  и проекцией радиус-вектора  $\rho$  на плоскость  $O\xi\zeta$ ,  $\rho$  – длина вектора  $\rho$ .

Пусть  $\gamma$  – единичный вектор, направленный вдоль вектора  $\rho$ , а  $\beta$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $M\eta$ . Проекции этих векторов на оси  $Ox_i$  обозначим через  $\gamma_i$  и  $\beta_i$  соответственно. Очевидно, они связаны соотношениями

$$\sum \gamma_i^2 = 1, \sum \beta_i^2 = 1, \sum \gamma_i \beta_i = \sin \vartheta \quad (1.1)$$

Пусть  $m = m_1 + m_2 + m_3$  – масса тела,  $J_i = a^2(m_j + m_k)$  – его главные центральные моменты инерции;  $i \neq j \neq k$ ,  $(i, j, k) \in S_3$ , где  $S_3$  – группа подстановок из трех элементов  $(1, 2, 3)$ ; при этом  $J_1 < J_2 < J_3$ .

Кинетическая и потенциальная энергии рассматриваемой системы имеют вид

$$T = \frac{1}{2} [m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2 \cos^2 \vartheta + \rho^2 \dot{\vartheta}^2) + J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2]$$

$$U = \sum [F_i(a) + F_i(-a)], \quad F_i(a) = -\frac{fMm_i}{2} (\rho^2 + a^2 + 2a\rho\gamma_i)^{-1/2}$$

Здесь  $f$  – гравитационная постоянная,  $M$  – масса притягивающего центра,  $\omega_i$  – проекции абсолютной угловой скорости тела  $\omega$  на оси  $Ox_i$ .

Уравнения движения тела допускают интегралы энергии и площадей:

$$T + U = \text{const}, \quad \partial T / \partial \dot{\psi} = k = \text{const}$$

Полагая  $\omega = \dot{\psi}\beta + \omega^*$ , где  $\omega^*$  – мгновенная угловая скорость тела в его движении относительно орбитальной системы координат и игнорируя циклическую координату  $\psi$ , введем функцию Рауса

$$R = T - U - k\dot{\psi} \equiv R_2 + R_1 + R_0$$

Здесь  $R_s$  – однородная степени  $s$  относительно  $\rho$ ,  $\vartheta$ ,  $\omega_i^*$  часть функции  $R$ . При этом измененная потенциальная энергия тела  $W = -R_0$  принимает вид  $W = U + k^2/(2S)$ , где

$$S = m\rho^2 \cos^2 \vartheta + J_1\beta_1^2 + J_2\beta_2^2 + J_3\beta_3^2$$

Согласно теореме Рауса критическим точкам функции  $W$  отвечают стационарные движения системы (см., например, [1–3]).

Поскольку направляющие косинусы связаны соотношениями (1.1), то вместо  $W$  далее будем рассматривать функцию

$$W_* = W + \lambda(\sum \gamma_i \beta_i - \sin \vartheta) + \sigma(\sum \gamma_i^2 - 1)/2 + \nu(\sum \beta_i^2 - 1)/2$$

где  $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $\nu$  – неопределенные множители Лагранжа.

2. Условия стационарности функции  $W_*$  приводят к уравнениям:

$$\frac{\partial W_*}{\partial \rho} = \frac{fM}{2} \sum m_i ((\rho + a\gamma_i)P_i(a) + (\rho - a\gamma_i)P_i(-a)) - \frac{k^2 m \rho \cos^2 \vartheta}{S^2} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial W_*}{\partial \vartheta} = \frac{k^2 m \rho \sin 2\vartheta}{2S^2} - \lambda \cos \vartheta = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial W_*}{\partial \gamma_i} = \frac{afM\rho}{2} m_i (P_i(a) - P_i(-a)) + \lambda\beta_i + \sigma\gamma_i = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial W_*}{\partial \beta_i} = -\frac{k^2}{2S^2} J_i \beta_i + \lambda\gamma_i + \nu\beta_i = 0 \quad (2.4)$$

Здесь  $P_i(a) = (\rho^2 + a^2 + 2a\rho\gamma_i)^{-3/2}$ .

Очевидно, системе (2.2)–(2.4), (1.1) тождественно по  $\rho$  удовлетворяют решения вида

$$\gamma_i^2 = 1, \quad \beta_j^2 = 1 \quad (i \neq j), \quad \gamma_j = \gamma_k = \beta_i = \beta_k = 0 \quad (2.5)$$

$$\vartheta = 0, \quad \lambda = 0, \quad \sigma = \sigma_{0i}, \quad \nu = \nu_{0j}$$

Эти решения отвечают стационарным движениям тела, при котором его центр масс движется по круговой орбите, одна из главных центральных осей инерции направлена по радиус-вектору, а две другие – по касательной и бинормали к орбите. При этом уравнение (2.1) принимает вид

$$k^2 = C y_{ij}(\rho) \quad (2.6)$$

$$C = \frac{fMS^2}{m\rho}, \quad y_{ij}(\rho) = m_i \frac{\rho^2 + a^2}{\rho(\rho^2 - a^2)^2} + \frac{m_j + m_k}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}}$$

Постоянные  $\sigma_{0i}$  и  $\nu_{0j}$  определяются соотношениями

$$\sigma_{0i} = fMm_i a^2 \frac{\rho(3\rho^2 + a^2)}{(\rho^2 - a^2)^3}, \quad \nu_{0j} = \frac{k^2 J_j}{S^2} \quad (2.7)$$

При  $\rho > a$  существует единственная точка  $\rho_{ij}^0$ , такая, что  $y'_{ij}(\rho_{ij}^0) = 0$ . Следовательно, уравнение (2.6) относительно  $\rho > a$  не имеет решений при  $k^2 < k_{ij}^{0^2} = y_{ij}(\rho_{ij}^0)$ , имеет единственное решение  $\rho = \rho_{ij}^0$  при  $k^2 = k_{ij}^{0^2}$  и два решения  $\rho = \rho_{ij}^{\pm}(k^2)$  при  $k^2 > k_{ij}^{0^2}$ , причем  $\rho_{ij}^+ > \rho_{ij}^0 > \rho_{ij}^-$ , и  $y'_{ij} > 0$  при  $\rho > \rho_{ij}^0$ ,  $y'_{ij} < 0$  при  $\rho < \rho_{ij}^0$ .

Другими словами, при заданном значении постоянной интеграла площадей возможны два различных стационарных движения тела, отвечающих одной и той же его ориентации и различающихся величиной радиуса орбиты (ср. с [4–7]).

В дальнейшем без уменьшения общности будем рассматривать решения (2.8), для которых  $\gamma_i = \beta_j = 1$ , поскольку решения вида  $\gamma_i = \pm 1$ ,  $\beta_j = \pm 1$  отвечают геометрически идентичным решениям.

3. Для исследования устойчивости стационарных движений составим вековое уравнение [3]:

$$\Delta(\kappa) = (p_1 - \kappa)(p_2 - \kappa)(p_3 - \kappa)(3\kappa^2 - 2\kappa p_4 + p_5) = 0$$

где  $p_s$  определенным образом (см. ниже) выражаются через диагональные элементы матрицы второй вариации приведенного потенциала ( $n = 1, 2, 3$ )

$$w_{11} = \left( \frac{\partial^2 W_*}{\partial \rho^2} \right)_0, \quad w_{22} = \left( \frac{\partial^2 W_*}{\partial \vartheta^2} \right)_0 = \frac{k^2 m \rho^2}{S^2}$$

$$w_{n+2, n+2}^i = \left( \frac{\partial^2 W_*}{\partial \gamma_n^2} \right)_0 = f M a^2 \rho \left[ m_i \frac{(3\rho^2 + a^2)}{(\rho^2 - a^2)^3} - \frac{3m_n \rho}{(\rho^2 + a^2)^{5/2}} \right]$$

$$w_{n+5, n+5} = \left( \frac{\partial^2 W_*}{\partial \beta_n^2} \right)_0 = \frac{k^2 I_n}{S^2}, \quad I_1 = J_3 - J_1, \quad I_2 = J_3 - J_2, \quad I_3 = J_2 - J_1$$

Здесь и далее нижний нулевой индекс означает, что соответствующее выражение вычисляется для рассматриваемого стационарного движения.

Рассмотрим стационарное движение

$$\rho = \rho_{1,3}(k^2), \quad \gamma_1 = \beta_3 = 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \beta_1 = \beta_2 = 0$$

(3.1)

$$\sigma = \sigma_{01}, \quad \nu = \nu_{03}$$

отвечающее такой ориентации тела, при которой ось наименьшего момента инерции направлена вдоль радиус-вектора, ось наибольшего – по нормали к плоскости орбиты, ось среднего – по касательной.

Здесь и далее  $\rho_{ij}(k^2)$  – решение уравнения (2.6),  $\sigma_{0i}$ ,  $\nu_{0j}$  определяются из соотношений (2.7) при соответствующих значениях  $i$  и  $j$ , а соотношения  $\vartheta = \lambda = 0$ , общие для всех решений вида (2.5).

Для стационарного движения (3.1) коэффициенты векового уравнения принимают вид

$$p_1 = w_{11}, \quad p_2 = w_{44}^1, \quad p_3 = w_{77}$$

$$p_4 = w_{22} + w_{55}^1 + w_{66}, \quad p_5 = w_{22} w_{55}^1 + w_{22} w_{66} + w_{55}^1 w_{66}$$

Знак  $w_{11}$  совпадает со знаком  $y'_{13}(\rho)$ , т.е.  $w_{11} > 0$  для  $\rho = \rho_{13}^+(k^2)$ ,  $w_{11} = 0$  для  $\rho = \rho_{13}^0$  и  $w_{11} < 0$  для  $\rho = \rho_{13}^-(k^2)$ , а  $w_{22} > 0$ ,  $w_{66} > 0$ ,  $w_{77} > 0$  в силу того, что  $J_3 > J_2 > J_1$ .

Для исследования  $w_{44}^1$  и  $w_{55}^1$  рассмотрим функцию  $g_{ij}(x) = m_i^2 m_j^{-2} 9^{-1} x^{-1} (3x + b)^2 \cdot (x + b)^5 (x - b)^{-6}$  ( $x = \rho^2$ ,  $a = b^2$ ). Очевидно, что

$$\lim_{x \rightarrow b^+} g_{ij}(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g_{ij}(x) = m_i^2 m_j^{-2}$$

причем  $g'_{ij}(x) < 0$  при любом  $x > b$ . Таким образом получаем, что  $g_{ij}(x) > 1$  при  $m_i > m_j$  и  $g_{ij}(x) < 1$  в противном случае.

Функция  $g_{12} > 1$ . Следовательно,  $w_{44}^1 > 0$  и  $w_{55}^1 > 0$ , а также (с учетом соотношений  $w_{22} > 0$ ,  $w_{66} > 0$ ) имеем  $p_4 > 0$  и  $p_5 > 0$ .

Таким образом, четыре корня векового уравнения, соответствующего решению (3.1), всегда положительны, а корень  $\kappa_1 = w_{11}$  положителен для ветви  $\rho = \rho_{13}^+(k^2)$  и отрицателен для ветви  $\rho = \rho_{13}^-(k^2)$ .

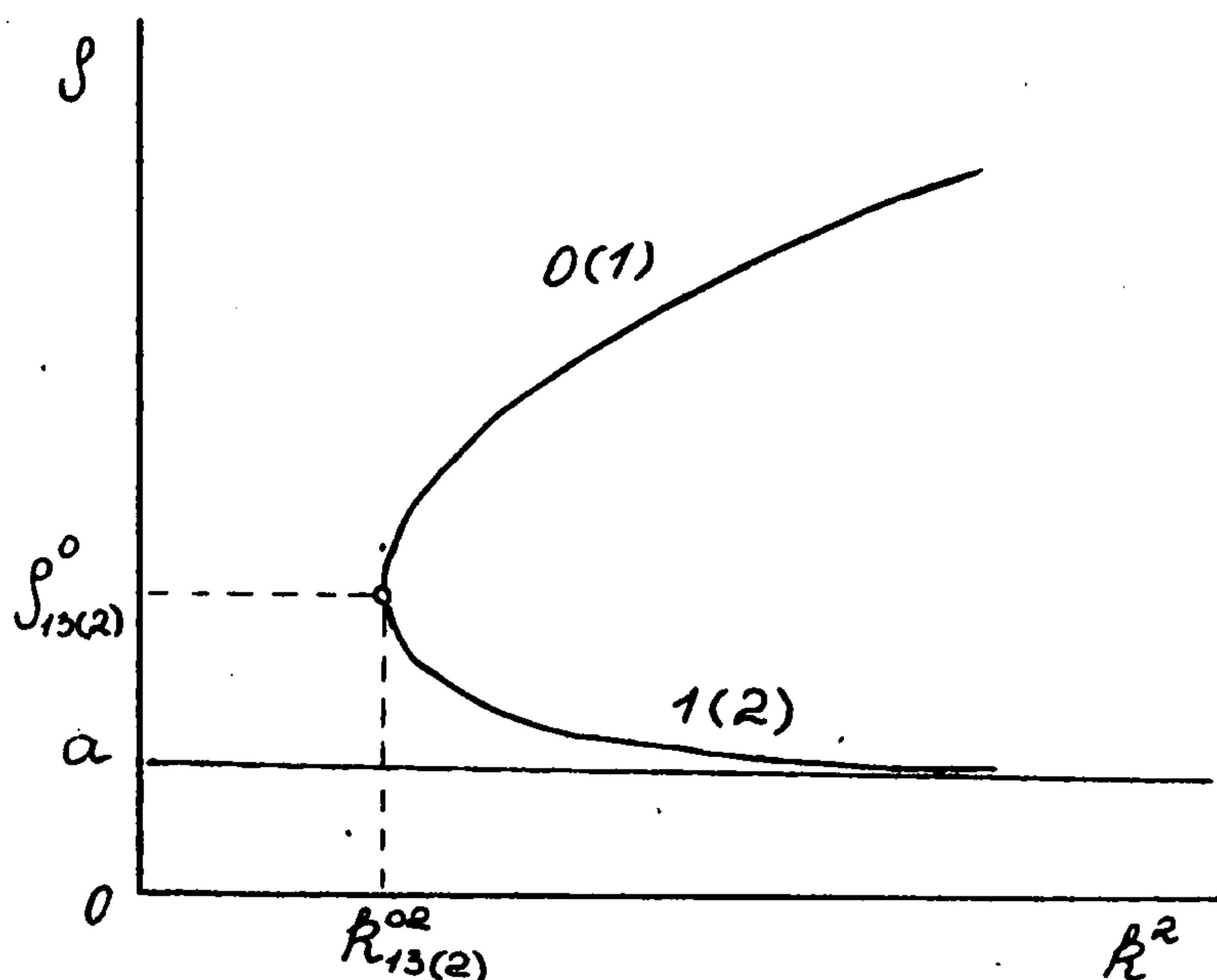
Итак, степень неустойчивости решений (3.1) равна нулю для  $\rho = \rho_{13}^+(k^2)$  и единице для  $\rho = \rho_{13}^-(k^2)$ .

Следовательно, стационарные движения (3.1) устойчивы в вековом смысле, если  $\rho = \rho_{13}^+(k^2)$  и неустойчивы, если  $\rho = \rho_{13}^-(k^2)$ .

Для стационарного движения

$$\rho = \rho_{12}(k^2), \quad \gamma_1 = \beta_2 = 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \beta_1 = \beta_3 = 0, \quad \sigma = \sigma_{01}, \quad v = v_{02} \quad (3.2)$$

отвечающего такой ориентации тела, при которой ось наименьшего момента инерции направлена вдоль радиус-вектора, ось среднего – по нормали к плоскости орбиты, ось наибольшего – по касательной, аналогично получаем, что степень неустойчивости



Фиг. 1

решений (3.2) равна единице для  $\rho = \rho_{12}^+(k^2)$  и двум для  $\rho = \rho_{12}^-(k^2)$  (для этих решений один из корней векового уравнения всегда меньше нуля, три других – всегда больше нуля, а еще один меняет знак при  $\rho = \rho_{12}^0$ ).

Следовательно, стационарные движения (3.2) неустойчивы, если  $\rho = \rho_{12}^+(k^2)$ , а для стационарных движений  $\rho = \rho_{12}^-(k^2)$ , вообще говоря, возможна гироскопическая стабилизация.

На фиг. 1 указан вид сечения пространства  $\rho, \vartheta, \gamma, \beta, k$  гиперплоскостью  $\gamma_1 = 1, \beta_{3(2)} = 1, \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \beta_1 = \beta_{2(3)} = 0, \vartheta = 0$ ; цифрами 0(1), 1(2) указана степень неустойчивости соответствующих стационарных движений.

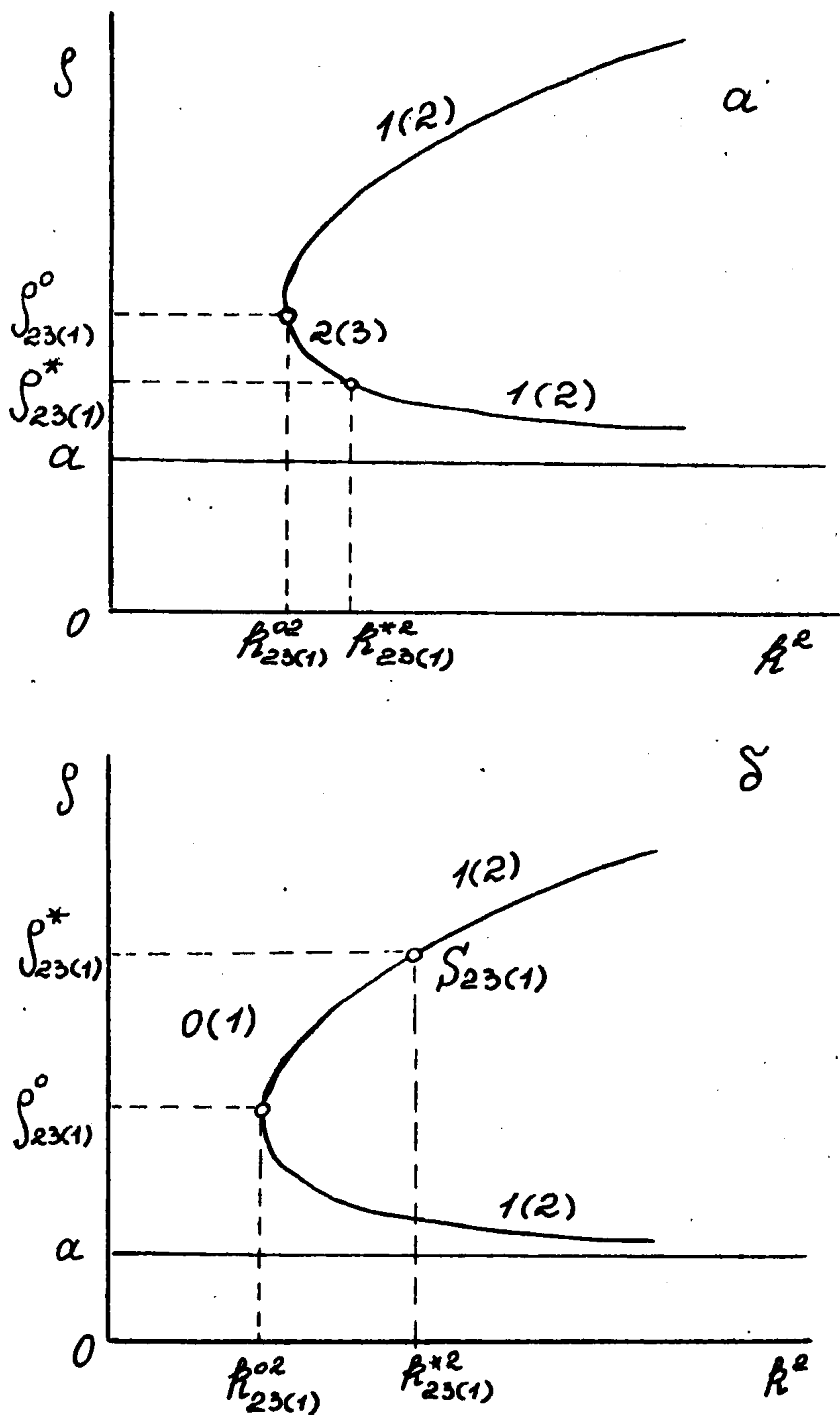
4. Рассмотрим стационарное движение

$$\rho = \rho_{23}(k^2), \quad \gamma_2 = \beta_3 = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_3 = \beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \sigma = \sigma_{02}, \quad v = v_{03} \quad (4.1)$$

отвечающее такой ориентации тела, при которой ось наименьшего момента инерции направлена по касательной к орбите, ось среднего – вдоль радиус-вектора, ось наибольшего – по нормали к плоскости орбиты.

Для стационарного движения (4.1) коэффициенты векового уравнения принимают вид

$$p_1 = w_{11}, \quad p_2 = w_{33}^2, \quad p_3 = w_{66}, \quad p_4 = w_{22} + w_{55}^2 + w_{77}, \quad p_5 = w_{22}w_{55}^2 + w_{22}w_{77} + w_{55}^2w_{77}$$



Фиг. 2

$\cup(\rho_{23}^0; +\infty)$ , и неустойчивы в вековом смысле, если  $\rho \in (\rho_{23}^*; \rho_{23}^0)$ , а в случае б неустойчивы, если  $\rho \in (a; \rho_{23}^0) \cup (\rho_{23}^*; +\infty)$  и устойчивы в вековом смысле, если  $\rho \in (\rho_{23}^0, \rho_{23}^*)$ , причем в этом случае  $\rho_{23}^* \rightarrow +\infty$ , если  $\mu_1 \rightarrow \mu_2$ .

Для стационарного движения

$$\rho = \rho_{21}(k^2), \quad \gamma_2 = \beta_1 = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_3 = \beta_2 = \beta_3 = 0, \quad \sigma = \sigma_{02}, \quad v = v_{01} \quad (4.2)$$

отвечающего такой ориентации тела, при которой ось среднего момента инерции направлена вдоль радиус-вектора, ось наименьшего — по нормали к плоскости орбиты, ось наибольшего — по касательной, аналогично получаем, что в зависимости от параметров  $\mu_1, \mu_2$  стационарные движения (4.2) в случае а неустойчивы, если  $\rho \in (\rho_{21}^*, \rho_{21}^0)$ , и неустойчивы в вековом смысле, если  $\rho \in (a, \rho_{21}^*) \cup (\rho_{21}^0, +\infty)$ , а в случае б неустойчивы, если  $\rho \in (\rho_{21}^0, \rho_{21}^*)$ , и неустойчивы в вековом смысле, если  $\rho \in (a, \rho_{21}^0) \cup (\rho_{21}^*, +\infty)$ .

На фиг. 2 указан вид сечения пространства  $\rho, \vartheta, \gamma, \beta, k$  гиперплоскостью  $\gamma_2 = 1, \beta_{3(1)} = 1, \gamma_1 = \gamma_3 = 0, \beta_2 = \beta_{1(3)} = 0, \vartheta = 0$  и цифрами 0(1), 1(2), 2(3) указана степень

Знак  $w_{11}$  совпадает со знаком  $y'_{23}(\rho)$ , т.е.  $w_{11} > 0$ , если  $\rho = \rho_{23}^+(k^2)$ ,  $w_{11} = 0$ , если  $\rho = \rho_{23}^0$  и  $w_{11} < 0$ , если  $\rho = \rho_{23}^-(k^2)$ . Очевидно,  $w_{22} > 0, w_{55} > 0$ , так как  $m_2 > m_3$ , а  $w_{66} > 0, w_{77} > 0$ , так как  $J_3 > J_2 > J_1$ .

Функция  $g_{21}(x) = 1$  при  $x = x_{23}^*$ . Следовательно,  $w_{33}^2 > 0$ , если  $\rho \in (a; \rho_{23}^* = (x_{23}^*)^{1/2})$ ,  $w_{33} = 0$ , если  $\rho = \rho_{23}^*$  и  $w_{33}^2 < 0$ , если  $\rho \in (\rho_{23}^*; +\infty)$ ,  $p_4 > 0$  и  $p_5 > 0$ . Согласно предыдущему корень  $\kappa_1 = w_{11}$  положителен для ветви  $\rho = \rho_{23}^+(k^2)$  и отрицателен для ветви  $\rho = \rho_{23}^-(k^2)$ ,  $\kappa_2 > 0$  для  $\rho \in (a, \rho_{23}^*)$ ,  $\kappa_2 = 0$  для  $\rho = \rho_{23}^*$  и  $\kappa_2 < 0$  для  $\rho \in (\rho_{23}^*; +\infty)$ , а остальные три корня всегда положительны.

В зависимости от параметров задачи  $\mu_1 = m_1 m_3^{-1}, \mu_2 = m_2 m_3^{-1}$  возможны два варианта расположения точек  $\rho_{23}^0, \rho_{23}^*$ : а)  $\rho_{23}^0 > \rho_{23}^*$ , б)  $\rho_{23}^0 < \rho_{23}^*$ .

Следовательно, стационарные движения (4.1) в случае а неустойчивы, если  $\rho \in (a; \rho_{23}^*) \cup$

неустойчивости соответствующих стационарных движений. Отметим, что в точках  $S_{23(1)}$  изменяется степень неустойчивости соответствующих движений, несмотря на то, что в этих точках, казалось бы, нет ветвления решений. На самом деле в этих точках обращается в нуль выражение  $w_{33}^2(p_{21})$  и от решений (4.1) и (4.2) ответвляются стационарные движения, для которых:

$$\gamma_1^2 + (\gamma_2 - 1)^2 + \gamma_2^2 + \beta_{1(3)}^2 + \beta_2^2 + (\beta_{3(1)} - 1)^2 + \vartheta^2 \neq 0$$

Соответствующие этим решениям ветви выходят из сечений, указанных на фиг. 2, а, б.

Этим решениям отвечают такие ориентации тела, при которых ось наибольшего момента инерции направлена по нормали к плоскости орбиты, а оси среднего и наименьшего моментов инерции не совпадают с радиус-вектором центра масс и касательной к орбите.

*Замечание.* Если  $\mu_1 - \mu_2 \rightarrow +0$ , то  $\rho_{23}^* \rightarrow +\infty$ . Это означает, что возможна вековая устойчивость стационарных движений тела с трехосным эллипсоидом инерции, близким к эллипсоиду вращения, для которых ось наименьшего момента инерции направлена по касательной к орбите, ось среднего момента инерции — вдоль радиус-вектора, а ось наибольшего — по нормали к плоскости орбиты (при этом предполагается что наименьший и средний моменты инерции близки один к другому, но не равны между собой см. также [4]).

**5. Аналогичным образом можно исследовать устойчивость стационарных движений**

$$\rho = \rho_{32}(k^2), \quad \gamma_3 = \beta_2 = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \beta_1 = \beta_3 = 0, \quad \sigma = \sigma_{03}, \quad \nu = \nu_{02}, \quad (5.1)$$

$$\rho = \rho_{31}(k^2), \quad \gamma_3 = \beta_1 = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \beta_2 = \beta_3 = 0, \quad \sigma = \sigma_{03}, \quad \nu = \nu_{01}. \quad (5.2)$$

отвечающих таким ориентациям тела, при которых ось наибольшего момента инерции направлена вдоль радиус-вектора, ось среднего — по нормали (5.1), или по касательной (5.2), ось наименьшего — по касательной (5.1) или по нормали (5.2).

На фиг. 3, а–в указан вид сечения пространства  $\rho, \vartheta, \gamma, \beta, k$  гиперплоскостью  $\gamma_2 = 1, \beta_{3(1)} = 1, \gamma_1 = \gamma_3 = 0, \beta_2 = \beta_{1(3)} = 0, \vartheta = 0$  и указана степень неустойчивости соответствующих стационарных движений.

В точках  $S_{32(1)}^*$  и  $S_{32(1)}^{**}$  изменяется степень неустойчивости соответствующих движений и от решений (5.1), (5.2) ответвляются стационарные движения, для которых

$$\gamma_1^2 + (\gamma_3 - 1)^2 + \gamma_2^2 + \beta_{1(2)}^2 + \beta_3^2 + (\beta_{2(1)} - 1)^2 + \vartheta^2 \neq 0$$

Соответствующие этим решениям ветви выходят из сечений, указанных на фиг. 3, а–в.

Указанным решениям отвечают такие ориентации тела, при которых ось среднего (наименьшего) момента инерции направлена по нормали к плоскости орбиты, а оси наибольшего и наименьшего (среднего) моментов инерции не совпадают с радиус-вектором центра масс и касательной к орбите.

**6.** В заключение проведем сравнение полученных результатов с результатами использования "спутникового приближения" для потенциала сил тяготения. В последнем случае предполагается, что  $\varepsilon = a/\rho \ll 1$ , и следует ограничиться той частью фиг. 1–3, для которой выполнено указанное предположение. При этом для решений

вида (3.1 и (3.2) результаты, полученные в разделе 3, согласуются с соответствующими результатами для случая использования "спутникового приближения" (см., например, [1]).

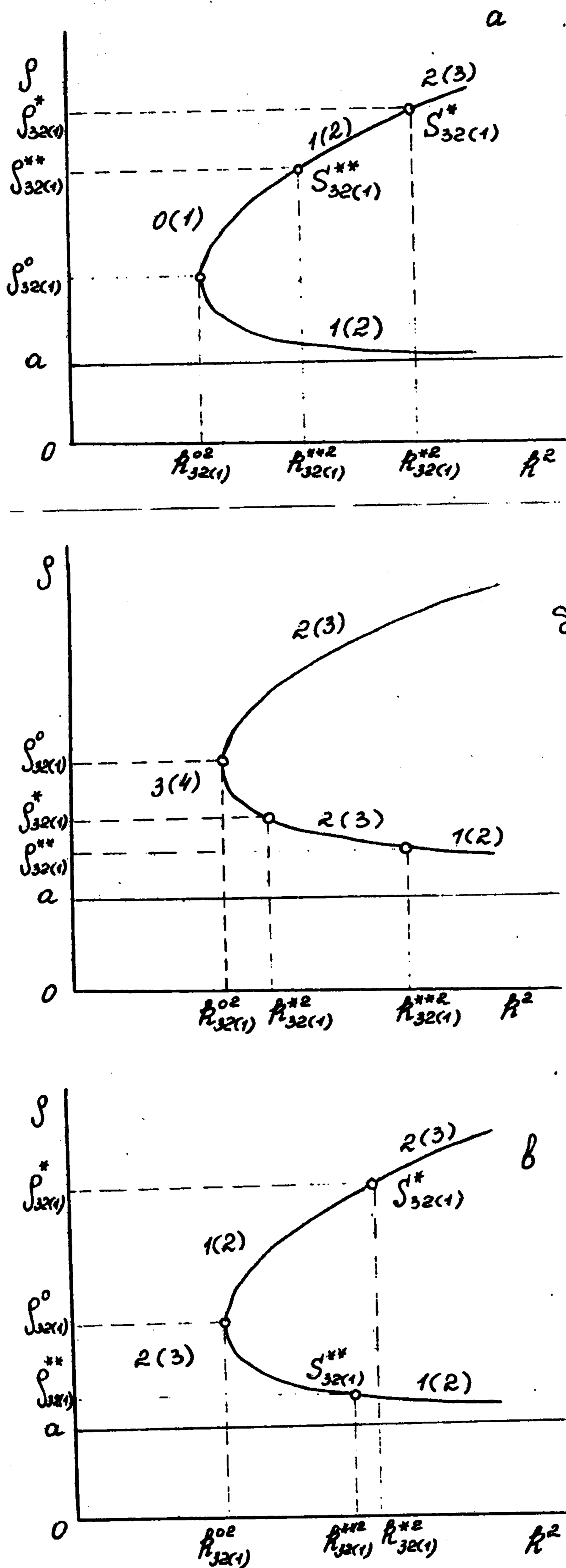
Для решений (4.1), (4.2) и (5.1), (5.2) в общем случае точного согласования нет. Оно имеет место лишь при условии, когда величина

$$\delta = \min_{(i,j,k) \in S_3} ((m_i - m_j) / m_k)$$

отделена от нуля некоторым конечным числом (см. фиг. 2,а и фиг. 3,б). Если же  $\delta \ll 1$ , то точки  $S_{23}$  и  $S_{32}$  на ветвях, помеченных знаком плюс (см. фиг. 2,б и фиг. 3, а,в), могут уходить в бесконечность и для них может выполняться соотношение  $\epsilon \ll 1$ . Таким образом, "спутниковое приближение" не позволяет, в частности, обнаружить возможность существования "нетривиальных" стационарных движений и наличия вековой устойчивости "тривиальных" стационарных движений, при которых ось наименьшего момента инерции тела не направлена вдоль радиус-вектора, даже при выполнении предположения о малости размеров тела по отношению к радиусу орбиты его центра масс, если при этом отношение тех или иных двух моментов инерции тела близко к единице (см. также [4, 8]). Отметим, что последнее заведомо имеет место для многих естественных небесных тел.

Автор благодарит А.В. Карапетяна за обсуждение работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16242), Международного научного фонда и Правительства Российской Федерации (МАК300).



Фиг. 3.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 142 с.
2. Рубановский В.Н., Степанов С.Я. О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнений движения // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 904–912.
3. Рубановский В.Н. О бифуркации и устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1975. Вып. 1. С. 121–200.
4. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
5. Белецкий В.В., Пономарева О.Н. Параметрический анализ устойчивости относительного равновесия в гравитационном поле // Космич. исследования. 1990. Т. 28. № 5. С. 664–675.
6. Карпетян А.В., Шаракин С.А. О стационарных движениях двух взаимногравитирующих тел и их устойчивости // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1992. № 3. С. 42–48.
7. Карпетян А.В., Сахокиа И.Д. О бифуркации и устойчивости стационарных движений двух гравитирующих тел // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 935–938.
8. Абрарова Е.В., Карпетян А.В. О стационарных движениях твердого тела в центральном гравитационном поле // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 68–73.

Москва

Поступила в редакцию  
28.XII.1993