

УДК 531.3,531.66

© 1995 г. А.П. Иванов

О КРАТНОМ УДАРЕ

Обсуждаются закономерности и парадоксы, присущие проблеме кратного удара. Последняя включает в себя не только случай одновременного столкновения трех и более тел, но и задачи о соударении двух тел при наличии дополнительных связей. На основе решения ряда задач показано, что в зависимости от конфигурации системы и динамических свойств соударяемых тел следует различать следующие типы кратного удара.

1°. Регулярный тип характеризуется возможностью корректного решения проблемы в рамках данной механической системы с конечным числом степеней свободы. В этом случае малые изменения начальных условий приводят к изменению послеударных скоростей на величину того же порядка малости.

2°. Стохастический тип объединяет высокую чувствительность результата к начальным условиям с невозможностью определить эти условия с достаточной точностью. В этом случае следует, по-видимому, считать ударный импульс случайной функцией с дискретным множеством значений.

3°. В квазирегулярном случае решение рассматриваемой проблемы возможно, однако оно существенно зависит от физических свойств соударяемых тел. Для получения этого решения уже недостаточно рассмотрения конечномерной механической системы.

Получены критерии регулярности для соударения трех или более свободных тел, и удара физического маятника о препятствие.

Задача о кратном ударе возникла в 18-м столетии. И. Бернулли исследовал [1] абсолютно упругий удар в симметричной системе шаров. Маклорен использовал для описания кратного удара ньютоновские коэффициенты восстановления [2]. Даламбер интерпретировал ударные импульсы как следствие упругих деформаций и пришел к неожиданному выводу, что получаемый при таком подходе результат не совпадает с суммой импульсов, вычисленных для каждой пары по отдельности [3]. Выводы Даламбера не получили должного признания, и по сей день задача о кратном ударе решается путем редукции к парным соударениям. Суть парадоксов, присущих такому подходу, обсуждалась в [4, 5].

1. Методы решения задачи о кратном ударе. В динамике соударение твердых тел рассматривается как их кратковременное взаимодействие, приводящее к скачкообразному изменению скоростей. Как известно, даже простейшая задача о прямом центральном ударе двух невращающихся шаров не может быть решена без определенных дополнительных физических предположений. Наиболее употребительна гипотеза Ньютона, согласно которой скорости до и после удара $v_{1,2}$ и $V_{1,2}$ связаны соотношением

$$V_1 - V_2 = k(v_2 - v_1), \quad k \in [0, 1] \quad (1.1)$$

Здесь k – коэффициент восстановления; предельные значения $k = 1$ и $k = 0$ отвечают абсолютно упругому и пластическому ударам соответственно.

Вторым условием для определения двух неизвестных $V_{1,2}$ может служить сохранение количества движения:

$$\sum_{j=1}^2 m_j V_j = \sum_{j=1}^2 m_j v_j \quad (1.2)$$

где $m_{1,2}$ – массы шаров.

Система (1.1), (1.2) имеет единственное решение, которое к тому же является реалистичным, хотя точные эксперименты и показывают наличие зависимости коэффициента k от скорости сближения $v_1 - v_2$ [6].

Данный подход можно обобщить на случай косоугольного удара шаров, а также твердых тел произвольной формы с гладкими выпуклыми поверхностями. Для этого надо составить уравнения, аналогичные (1.1), для нормальных составляющих скоростей в точке контакта и учесть, что касательные составляющие в отсутствие трения не изменяются.

Часто полезно геометрическое представление удара как отражения изображающей точки от границы области существования в конфигурационном пространстве системы [4,5, 7]. Для этого выразим кинетическую энергию через обобщенные скорости

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^T, \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (1.3)$$

и определим в касательном пространстве $TM_{\mathbf{q}}$ скалярное произведение при помощи матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{q})$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_{\mathbf{q}} = \mathbf{u}_1 \mathbf{A}(\mathbf{q}) \mathbf{u}_2^T \quad (1.4)$$

Область допустимых значений координат можно представить в виде совокупности решений неравенства

$$f(\mathbf{q}) \geq 0 \quad (1.5)$$

где равенство соответствует контакту тел, а строгое неравенство – отсутствию контакта. Нормаль к поверхности $f(\mathbf{q}) = 0$ в смысле евклидовой структуры (1.4) можно задать следующим образом:

$$\mathbf{n} = \text{grad } f(\mathbf{q}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}) \quad (1.6)$$

Если изображающая точка попадает на поверхность удара по направлению вектора \mathbf{n} , то она отразится в том же направлении:

$$\dot{q}_n^+ = -k \dot{q}_n^- \quad (1.7)$$

Составляющие скорости, касательные поверхности $f(\mathbf{q}) = 0$ при ударе без трения не изменяются.

Одновременному соударению трех или более тел соответствует попадание изображающей точки в ребро области существования, образуемое пересечением нескольких гладких поверхностей

$$f_1(\mathbf{q}) \geq 0, \quad f_2(\mathbf{q}) \geq 0, \quad \dots, \quad f_k(\mathbf{q}) \geq 0 \quad (1.8)$$

Перечислим наиболее употребительные методы решения проблемы кратного удара.

1°. Метод независимого восстановления [2] состоит в редукции кратного удара к сумме "парных" соударений, каждое из которых описывается условием типа (1.7). При этом к k равенствам, характеризующим восстановление каждой из односторонних связей, добавляется $n - k$ условий сохранения касательных составляющих скорости.

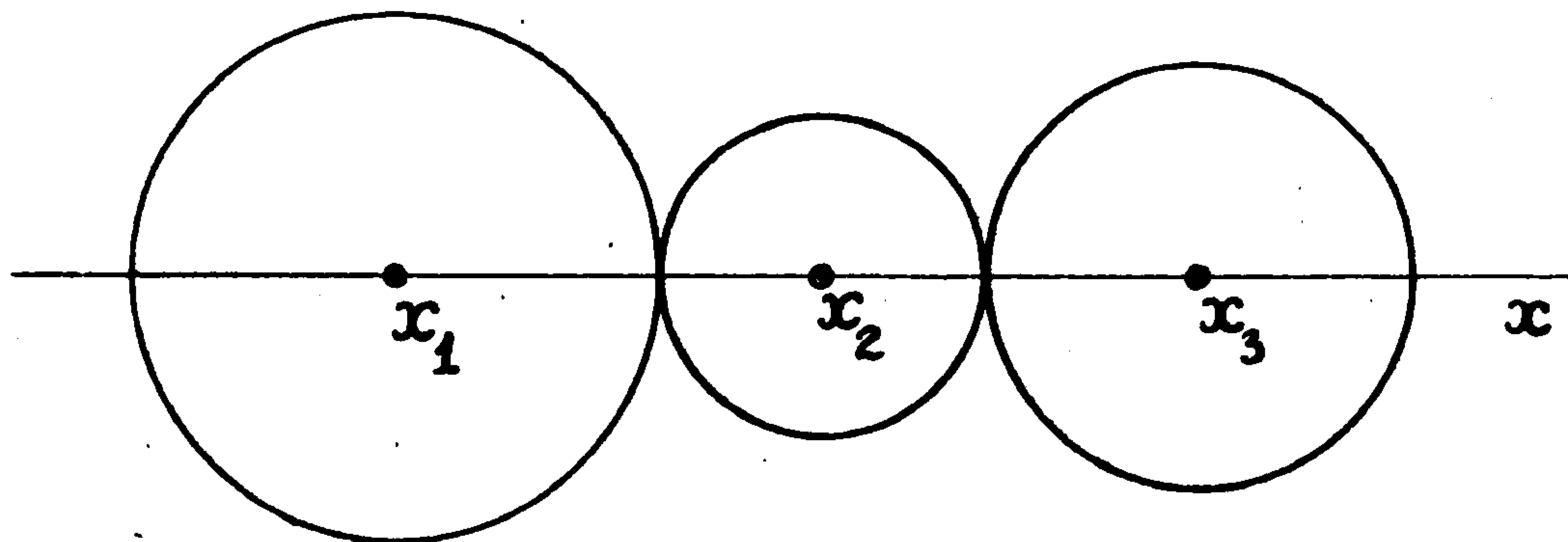
2°. Метод последовательных соударений состоит в представлении кратного удара в виде последовательности поочередных ударов системы об односторонние связи (1.8).

3°. Метод "вдавливания" основан на учете деформаций в соударяемых телах, формирующих ударные силы [3]. Как известно [6, 8, 9], в применении к удару двух тел такой подход более реалистичен, нежели гипотеза Ньютона (1.1).

Достоинства и недостатки перечисленных методов будут обсуждены ниже, здесь же укажем на еще один подход, типичный для задач статистической механики. В теории удара он, по-видимому, используется впервые.

4°. Метод статистического ансамбля применяется в тех случаях, когда погрешности в определении координат системы нельзя считать пренебрежимо малыми, так как они существенно влияют на ее эволюцию. При этом необходимо рассмотреть совокупность тождественных систем, различающихся начальными условиями, а результат кратного удара определять как случайную функцию.

Перейдем к обсуждению конкретных систем.



Фиг. 1

2. Коллинеарное соударение трех шаров. Рассмотрим задачу об одновременном коллинеарном соударении трех шаров с массами m_1, m_2, m_3 , являющуюся простейшей в проблеме кратного удара. Простота постановки этой задачи делает экспериментальную проверку различных гипотез общедоступной: достаточно иметь несколько монет на гладкой поверхности стола.

Единственное бесспорное уравнение для нахождения трех неизвестных величин V_{1-3} аналогично (1.2):

$$\sum_{j=1}^3 m_j V_j = \sum_{j=1}^3 m_j v_j \quad (2.1)$$

Поэтому для решения задачи необходимы некоторые дополнительные гипотезы. Рассмотрим методы, изложенные в предыдущем разделе.

1°. Использование метода независимого восстановления состоит в задании коэффициентов восстановления для каждой из пар 1-2 и 2-3 (фиг. 1) по аналогии с (1.1):

$$V_1 - V_2 = \kappa_{12}(v_2 - v_1), \quad V_2 - V_3 = \kappa_{23}(v_3 - v_2) \quad (2.2)$$

Система (2.1), (2.2) имеет единственное решение, однако оно абсолютно нереалистично. Простой эксперимент показывает, что для системы трех одинаковых бильiardных шаров, из которых два вначале покоятся, а третий ударяет по ним ($v_1 > 0, v_2 = v_3 = 0$); результатом будет отскок шара, противоположного битку, т.е. $V_1 = V_2 = 0, V_3 > 0$. Это должно означать, что в равенствах (2.2) $\kappa_{23} = \infty, \kappa_{12} = 0$, хотя в силу тождественности шаров $\kappa_{12} = \kappa_{23}$. Можно сделать вывод, что использование независимых коэффициентов восстановления неприемлемо для решения данной задачи. Единственным исключением является случай пластического удара $\kappa_{12} = \kappa_{23} = 0$; при этом $V_1 = V_2 = V_3$. Ниже будут рассматриваться лишь упругие удары.

2°. При втором подходе парные соударения происходят не одновременно, а последовательно. Вначале рассматриваем удар первого шара о второй, пренебрегая существованием третьего шара, при этом пользуясь уравнением (1.2) и первым из уравнений (2.2). Затем переходим к исследованию соударения второго и третьего

шаров в отсутствие первого, но для скорости второго шара принимаем не начальное значение v_2 , а значение V_2' скорости после удара о первый шар. На этом парные удары могут не закончиться: их последовательность следует продолжать до тех пор, пока не окажется выполненным двойное неравенство $V_1 \leq V_2 \leq V_3$.

Данный подход выглядит привлекательнее предыдущего, так как он позволяет получить разумное решение задачи о кратном ударе. В случае трех одинаковых шаров с абсолютно упругими ударами при начальных условиях $v_1 > 0, v_2 = v_3 = 0$ он приводит к такому результату: после удара первого шара о второй $V_1' = 0, V_2' = v_1, V_3' = 0$, а после удара второго шара о третий $V_1 = V_2 = 0, V_3 = v_1$, что согласуется с данными эксперимента.

К сожалению, подобное удачное совпадение не является закономерным, как видно из следующего примера.

Пример. Пусть параметры системы и начальные условия таковы:

$$m_1 = m_3 = \frac{1}{3}m_2, \quad \kappa_{12} = \kappa_{23} = 1, \quad v_1 = 1, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = -1$$

Существуют два варианта реализации обсуждаемого метода, приводящие к разным результатам. В первом варианте вначале рассматривается удар первого и второго шаров, в результате чего $V_1' = -\frac{1}{2}, V_2' = \frac{1}{2}, V_3' = -1$; а затем второго и третьего шаров. В итоге $V_1 = -\frac{1}{2}, V_2 = -\frac{1}{4}, V_3 = \frac{5}{4}$. Во втором варианте считают, что вначале соударяются второй и третий шары $V_1' = 1, V_2' = -\frac{1}{2}, V_3' = \frac{1}{2}$, а затем – первый и второй ($V_1 = -\frac{5}{4}, V_2 = \frac{1}{4}, V_3 = \frac{1}{2}$).

Заметим, что несмотря на симметрию данной системы по отношению к центральному (второму) шару, ни одно из построенных решений не симметрично.

Можно сделать вывод, что метод последовательных "парных" соударений в общем случае не позволяет получить однозначного решения задачи о кратном ударе.

3°. Для использования метода "вдавливания" введем на прямой, содержащей центры шаров, систему координат и обозначим x_j – координаты центров, ρ_j – радиусы ($j = 1, 2, 3$). Если бы шары были абсолютно твердыми, то при кратном ударе выполнялись бы равенства

$$x_2 - x_1 = \rho_1 + \rho_2, \quad x_3 - x_2 = \rho_2 + \rho_3$$

Поэтому нормальные деформации можно определить формулами

$$\zeta_{1,2} = \max\{0, \delta_{1,2}\}, \quad \delta_1 = \rho_1 + \rho_2 - x_2 + x_1, \quad \delta_2 = \rho_2 + \rho_3 - x_3 + x_2 \quad (2.3)$$

В классической стереомеханической теории удара пренебрегают сопровождающими его вибрациями, а также действием "конечных" сил [6]. При этих допущениях уравнения, описывающие коллинеарное соударение трех шаров, можно представить в виде

$$m_1 [\dot{x}_1(t) - \dot{x}_1(t_0)] = -I_1 = -\int_{t_0}^t R_{12} dt \quad (2.4)$$

$$m_3 [\dot{x}_3(t) - \dot{x}_3(t_0)] = I_2 = \int_{t_0}^t R_{23} dt \quad m_2 [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_2(t_0)] = I_1 - I_2$$

где t_0, t – начальный и текущий моменты удара, $R_{12} = R_{12}(\zeta_1, \dot{\zeta}_1)$, $R_{23} = R_{23}(\zeta_2, \dot{\zeta}_2)$ ударные реакции (при отсутствии диссипации последние зависят только от ζ). При учете соотношений (2.3) уравнения (2.4) в области $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ можно записать так:

$$\ddot{\delta}_1 = m_2^{-1} R_{23}(\delta_2, \dot{\delta}_2) - (m_1^{-1} + m_2^{-1}) R_{12}(\delta_1, \dot{\delta}_1) \quad (2.5)$$

$$\ddot{\delta}_2 = m_2^{-1} R_{12}(\delta_1, \dot{\delta}_1) - (m_2^{-1} + m_3^{-1}) R_{23}(\delta_2, \dot{\delta}_2)$$

Если какая-либо из величин δ_1 или δ_2 отрицательна, то соответствующая реакция R_{12} или R_{23} равна нулю.

Решение системы (2.5) должно удовлетворять начальным условиям $\delta_1(t_0) = \delta_2(t_0) = 0$, $\dot{\delta}_1(t_0) = v_1 - v_2$, $\dot{\delta}_2(t_0) = v_2 - v_3$. Признаком окончания упругого удара являются равенства $\zeta_{1,2}(t_k) = 0$, $\dot{\zeta}_{1,2}(t_k) \leq 0$ (в случае пластического удара это условие имеет другой вид: $\dot{\zeta}_1(t_k) = \dot{\zeta}_2(t_k) = 0$).

Особенность уравнений (2.5) состоит в различии диапазонов изменения переменных: скорости $\dot{\delta}_{1,2}$ принимают конечные значения, координаты $\delta_{1,2}$ и промежуток интегрирования $t_k - t_0$ исчезающе малы, а ускорения $\ddot{\delta}_{1,2}$ велики. По сути дела эта система неявно содержит большой параметр M , обратно пропорциональный продолжительности удара $t_k - t_0$ (в механических системах это величина порядка $10^{-6} - 10^{-3}$ с), при этом $\delta_{1,2} = O(M^{-1})$, $\dot{\delta}_{1,2} = O(1)$, $\ddot{\delta}_{1,2} = O(M)$. Общепринятая гипотеза о возможности пренебречь продолжительностью удара, лежащая в основе вывода уравнений (1.1), (1.2), эквивалентна предельному переходу $M \rightarrow +\infty$.

Для удобства анализа произведем масштабирование единиц длины и времени, полагая $\delta^* = M\delta$, $\zeta^* = M\zeta$, $t^* = M(t - t_0)$. Уравнения (2.5) преобразуются к виду

$$\frac{d^2\delta_1^*}{dt^{*2}} = \frac{1}{m_2} R_{23}^* \left(\zeta_2^*, \frac{d\delta_2^*}{dt^*} \right) - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) R_{12}^* \left(\zeta_1^*, \frac{d\delta_1^*}{dt^*} \right) \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2\delta_2^*}{dt^{*2}} = \frac{1}{m_2} R_{12}^* \left(\zeta_1^*, \frac{d\delta_1^*}{dt^*} \right) - \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) R_{23}^* \left(\zeta_2^*, \frac{d\delta_2^*}{dt^*} \right)$$

$$R \left(\zeta^*, \frac{d\delta^*}{dt^*} \right) = \frac{1}{M} R \left(\frac{\zeta^*}{M}, \frac{d\delta^*}{dt^*} \right)$$

Система (2.6) имеет регулярную форму, и ее решения обладают свойствами существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных условий. Это означает, в частности, что при малых отклонениях начальных значений переменных δ^* от нуля конечные значения производных $d\delta^*/dt^*$ получают приращения того же порядка малости. В применении к исходным уравнениям (2.5) это означает, что изменение начальных значений координат на величину Δ может привести к изменениям скоростей в конце удара на величину порядка $M\Delta$. В пределе при $M \rightarrow \infty$ это свидетельствует о разрывной зависимости решения от начальных условий, т.е. о некорректности задачи о кратном ударе.

Поясним эту некорректность на приведенном числовом примере. Если скорости первого и третьего шаров немного различаются по абсолютной величине, то они достигнут второго шара не строго одновременно (что всегда и имеет место на практике). В зависимости от того, какое из парных соударений произойдет раньше, результат будет определяться по одному из двух описанных сценариев.

Использование метода "вдавливания" в обсуждаемой задаче правомерно в единственном частном случае: если до удара два шара соприкасаются, а их скорости равны. Тогда неопределенность исчезает, и можно решать систему (2.6) при начальных условиях $\delta_1^* = \delta_2^* = 0$, $\dot{\delta}_1^* = 0$, $\dot{\delta}_2^* = u_2$ (или наоборот $\dot{\delta}_2^* = 0$, $\dot{\delta}_1^* = u_1$). При этом метод "вдавливания" не сводится ни к независимому восстановлению, ни к последовательным "парным" соударениям. Наиболее выпукло это различие проявляется в тех случаях, когда тела имеют разную жесткость.

Пример. Пусть $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $v_1 = 1$, $v_2 = v_3 = 0$, а диссипация при ударах отсутствует. Система (2.6) выглядит так:

$$\frac{d^2\delta_1^*}{dt^{*2}} = R_{23}^*(\zeta_2^*) - 2R_{12}^*(\zeta_1^*), \quad \frac{d^2\delta_2^*}{dt^{*2}} = R_{12}^*(\zeta_1^*) - 2R_{23}^*(\zeta_2^*) \quad (2.7)$$

$$\delta_1^*(t_0) = \delta_2^*(t_0) = 0, \quad \frac{d\delta_1^*}{dt^*}(t_0) = 1, \quad \frac{d\delta_2^*}{dt^*}(t_0) = 0$$

Рассмотрим три случая, различающиеся материалами, из которых сделаны соударяющиеся тела.

А. Все шары идентичны, тогда в соответствии с контактной теорией Герца $R_{12}^*(x) \equiv R_{23}^*(x) = Cx^{1,5}$. Численное интегрирование системы (2.7) приводит к такому результату: $V_1 = -0,071$, $V_2 = 0,076$, $V_3 = 0,995$.

В. Жесткость третьего шара намного меньше, чем первого и второго (в эксперименте использовался твердый ластик и монеты, при этом разница в жесткости достигает трех порядков), тогда $R_{12}^*(x) \gg R_{23}^*(x)$. Кратный удар распадается на две различные фазы: в первой из них $\delta_1^* > 0$, и в системе (2.7) величина R_{23}^* пренебрежимо мала. По окончании этой фазы первый шар передает весь свой импульс второму, а деформация ζ_1 обращается в нуль. Во второй фазе $R_{12}^* \equiv 0$; следовательно, второй шар передает свой импульс третьему. В итоге получим $V_1 = V_2 = 0$, $V_3 = 1$.

Можно сделать вывод, что в данном случае кратный удар происходит по сценарию метода последовательных соударений.

С. Поменяем первое и третье тела местами, так что $R_{12}^*(x) \ll R_{23}^*(x)$. Вычисления показывают, что в этом случае величина δ_2^* остается близкой к нулю, так что $R_{12}^*(\zeta_1^*) \approx 2R_{23}^*(\zeta_2^*)$. В итоге $V_1 = -1/3$, $V_2 = V_3 = 2/3$, т.е. второй и третий шары при ударе не разделятся.

Заметим, что в данном примере построенное решение реалистично лишь при условии, что $\delta_2(t_0) = 0$. Если между вторым и третьим шарами имеется зазор порядка ударных деформаций (при соударении монет эти деформации не превышают сотых долей миллиметра), то более верным может оказаться результат, полученный методом последовательных соударений.

4°. Будем рассматривать данную систему для различных допустимых начальных условий в окрестности кратного удара. Смысл такого обобщения заключается в том, что значения координат, а также радиусов шаров содержат погрешности, на практике значительно превышающие величину ударных деформаций. При этом в общем случае вместо одновременного соударения всех трех шаров мы получим последовательность парных соударений. В зависимости от того, с каким из двух других шаров вначале столкнется средний шар, возможно два сценария, вероятность каждого из которых близка к одной второй. Промежуточный случай, когда интервалы контакта обеих ударных пар перекрываются, крайне маловероятен (единственное исключение составляет тот случай, когда до удара два шара находятся в продолжительном контакте).

Расчет последовательных парных соударений можно провести, пользуясь уравнениями (1.1), (1.2). При ударе второго шара о первый

$$V_1 = [v_1(m_1 - \kappa_{12}m_2) + v_2m_2(1 + \kappa_{12})] / (m_1 + m_2) \quad (2.8)$$

$$V_2 = [v_2(m_2 - \kappa_{12}m_1) + v_1m_1(1 + \kappa_{12})] / (m_1 + m_2), \quad V_3 = v_3$$

а при соударении второго и третьего шаров

$$V_2 = [v_2(m_2 - \kappa_{23}m_3) + v_1m_3(1 + \kappa_{23})] / (m_2 + m_3) \quad (2.9)$$

$$V_3 = [v_2(m_3 - \kappa_{23}m_2) + v_2m_2(1 + \kappa_{23})] / (m_2 + m_3), \quad V_1 = v_1$$

Общее число парных соударений зависит от коэффициентов восстановления и соотношений масс и может быть сколь угодно большим и даже теоретически бесконечным [4]. Признаком окончания кратного удара является выполнение двойного неравенства $V_1 \leq V_2 \leq V_3$, справедливость которого можно проверить, вычисляя величину $\alpha = (V_2 - V_1) / (V_3 - V_2)$. Видно, что парные соударения продолжаются, пока $\alpha < 0$, и заканчиваются, если величина α становится положительной.

Изменение параметра α при ударе первого и второго шаров описывается формулой

$$\alpha^+ = \varphi_1(\alpha^-) = -\kappa_{12}\alpha^- / (1 + \theta_1\alpha^-), \quad \theta_1 = m_1(1 + \kappa_{12}) / (m_1 + m_2) \quad (2.10)$$

а при ударе второго и третьего шаров – формулой

$$\alpha^+ = \varphi_2(\alpha^-) = -(\alpha^- + \theta_2) / \kappa_{23}, \quad \theta_2 = m_3(1 + \kappa_{23}) / (m_2 + m_3) \quad (2.11)$$

Пусть доударное значение равно α_0 . Первой из возможных последовательностей парных соударений соответствует цепочка

$$\alpha_1 = \varphi_1(\alpha_0), \quad \alpha_2 = \varphi_2(\alpha_1), \quad \alpha_3 = \varphi_1(\alpha_2), \quad \dots \quad (2.12)$$

где общее число ударов k_2 определяется из условия $\alpha_{k_1} > 0$.

Вторая последовательность описывается соотношениями

$$\alpha_1 = \varphi_2(\alpha_0), \quad \alpha_2 = \varphi_1(\alpha_1), \quad \alpha_3 = \varphi_2(\alpha_2), \quad \dots \quad (2.13)$$

причем число ударов k_2 может быть отличным от k_1 .

Как правило, формулы (2.12) и (2.13) приводят к различным результатам, что свидетельствует о стохастичности рассматриваемой системы. Возможны и некоторые исключения, когда результаты совпадают. Здесь уместна аналогия с ударом материальной точки о вершину двугранного угла, отмеченная в разд. 1.

Положим

$$q = (x_1, x_2, x_3), \quad f_1 = x_2 - x_1 - \rho_1 - \rho_2 \geq 0, \quad f_2 = x_3 - x_2 - \rho_2 - \rho_3 \geq 0$$

Система обладает кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 m_j \dot{x}_j^2 = \frac{1}{2} \dot{q} A \dot{q}^T, \quad A = \text{diag}\{m_1, m_2, m_3\}$$

Угол между плоскостями $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$ в метрике (1.4) вычисляется по формуле [4]

$$\cos \beta = -(\mathbf{e}_1, A^{-1} \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1, A^{-1} \mathbf{e}_1)^{-1/2} (\mathbf{e}_2, A^{-1} \mathbf{e}_2)^{-1/2} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{e}_1 = \text{grad } f_1 = (-1, 1, 0), \quad \mathbf{e}_2 = \text{grad } f_2 = (0, -1, 1)$$

Следовательно, $\cos \beta = (m_1 m_3)^{1/2} (m_1 + m_2)^{-1/2} (m_3 + m_2)^{-1/2}$. Заметим, что угол β острый при любых соотношениях масс.

Пример. Пусть $m_1 = m_3$, $\kappa_{12} = \kappa_{23} = \kappa$. Тогда $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, $\cos \beta = \theta / (1 + \kappa)$.

Уравнение

$$\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1$$

имеет единственное решение $\kappa = 1, \theta = \sqrt{2}$. При этом $\varphi_1 \circ \varphi_2(\alpha_0) < 0$ для всех $\alpha_0 < 0$, а $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2(\alpha_0) > 0$. Следовательно, кратный удар сводится к четырем парным соударениям.

Далее, уравнение

$$\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$$

имеет единственное решение $\kappa = 1, \theta = \sqrt{3}$, и удар сводится к трем парным соударениям. Аналогично можно составлять цепочки произвольной длины m ($m = 5, 6, \dots$). Оказывается, что

во всех случаях регулярность достигается лишь при условии $\kappa = 1$, $\theta = \theta_m = 2\cos(\pi/m)$. С динамической точки зрения, данная система оказывается эквивалентной абсолютно упругому удару частицы о плоский угол величины $\beta = \arccos(\theta/2)$, имеющему регулярный характер лишь в случаях $\beta = \pi/m$ ($m = 2, 3, \dots$) [4, 5].

В каждом из обнаруженных квазирегулярных случаев решение задачи о кратном ударе имеет одинаковый вид

$$V_j = -v_j + 2(m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3)/(m_1 + m_2 + m_3) \quad (j=1,2,3) \quad (2.15)$$

Помимо этого имеет место еще случай квазипластического удара, при котором последовательность парных соударений теоретически бесконечна. Условие его реализации, полученное в [4], выглядит так:

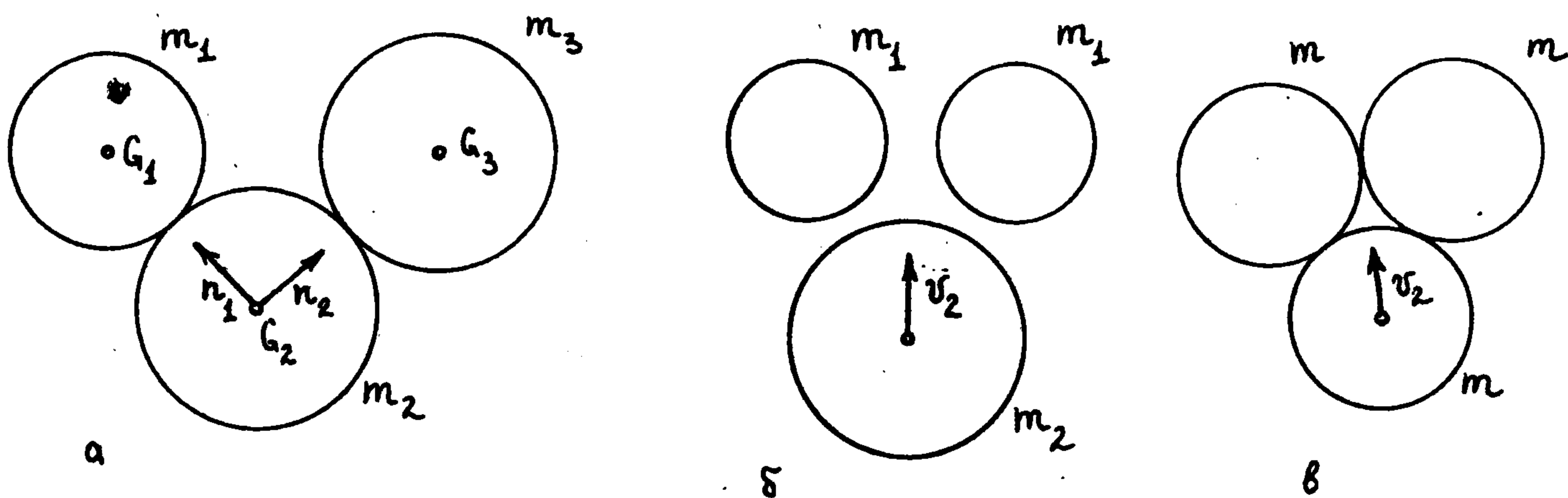
$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} > \frac{4\sqrt{\kappa}}{(1 + \kappa)^2} \quad (2.16)$$

а результат имеет вид

$$V_1 = V_2 = V_3 = (m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3)/(m_1 + m_2 + m_3)$$

Помимо перечисленных случаев возможно также совпадение двух сценариев кратного удара для отдельных значений параметра α , характеризующего начальные условия. Все перечисленные случаи следует отнести к квазирегулярному типу кратного удара.

Подведем итог. Если постановка задачи о кратном ударе допускает погрешность в задании начальных условий, то результат надо определять методом статистического ансамбля, т.е. рассматривать различные варианты последовательных соударений. Как правило, в итоге задача имеет два различных равновероятных решения (стохастический тип), но возможно и их совпадение при некоторых значениях параметров (квазирегулярный тип).



Фиг. 2

3. Пространственное соударение трех шаров. Рассмотрим теперь общий пространственный случай соударения трех шаров с гладкими поверхностями. Реакции R_{21} и R_{23} представляют собой векторы, направленные вдоль прямых G_2G_1 и G_2G_3 , соединяющих центры шаров (фиг. 2, а). Они не создают вращательных моментов, поэтому удар сводится к изменению скоростей \dot{r}_j ($j = 1, 2, 3$) центров шаров.

По аналогии с (2.4) можно составить уравнения удара в виде

$$m_1[\dot{r}_1(t) - \dot{r}_1(t_0)] = I_1, \quad m_2[\dot{r}_2(t) - \dot{r}_2(t_0)] = -I_1 - I_2 \quad (3.1)$$

$$m_3[\dot{r}_3(t) - \dot{r}_3(t_0)] = I_2$$

$$I_1 = R_{21}n_1, \quad I_2 = R_{23}n_2, \quad n_1 = G_2G_1/|G_1G_2|, \quad n_2 = G_2G_3/|G_3G_2|$$

Контактные деформации определяются по формулам

$$\delta_1 = \rho_1 + \rho_2 - |G_1 G_2|, \quad \delta_2 = \rho_2 + \rho_3 - |G_2 G_3|$$

а для их производных по времени имеем

$$\dot{\delta}_1 = -d/dt |r_2 - r_1| = (\dot{r}_2 - \dot{r}_1, n_1), \quad \dot{\delta}_2 = (\dot{r}_2 - \dot{r}_3, n_2) \quad (3.2)$$

Дифференцируя равенства (3.1), получим при учете (3.2) уравнения удара в виде

$$\ddot{\delta}_1 = -m_2^{-1} (n_1, n_2) R_{23} (\delta_2, \dot{\delta}_2) - (m_1^{-1} + m_2^{-1}) R_{21} (\delta_1, \dot{\delta}_1) \quad (3.3)$$

$$\ddot{\delta}_2 = -m_2^{-1} (n_1, n_2) R_{21} (\delta_1, \dot{\delta}_1) - (m_2^{-1} + m_3^{-1}) R_{23} (\delta_2, \dot{\delta}_2)$$

$$\delta_1(t_0) = \delta_2(t_0) = 0, \quad \dot{\delta}_1(t_0) = \dot{\delta}_1^0, \quad \dot{\delta}_2(t_0) = \dot{\delta}_2^0$$

В частности, для коллинеарного соударения $n_1 = -n_2$, и мы получаем формулы (2.5).

Уравнения (3.3) разделяются в случае, если векторы n_1 и n_2 ортогональны:

$$(n_1, n_2) = 0 \quad (3.4)$$

При этом кратный удар сводится к сумме независимых парных соударений, и решение задачи выглядит так:

$$V_1 = v_1 + (1 + \kappa_{12})(v_2 - v_1, n_1) m_2 (m_1 + m_2)^{-1} n_1$$

$$V_3 = v_3 + (1 + \kappa_{23})(v_2 - v_3, n_2) m_2 (m_3 + m_2)^{-1} n_2 \quad (3.5)$$

$$V_2 = v_2 + \theta_1 (v_1 - v_2, n_1) n_1 + \theta_2 (v_3 - v_2, n_1) n_2$$

причем параметры $\theta_{1,2}$ определены в (2.10).

Если условие (3.4) нарушено, то корректное решение системы (3.3), вообще говоря, невозможно. Случайные погрешности в задании начальных условий приведут к неодновременности ударного контакта. Результат может значительно меняться в зависимости от того, какая из ударных пар включается первой. Можно, как и в разд. 2, провести аналогию с материальной точкой, соударяющейся с вершиной двугранного угла. Как отмечалось выше, возможно корректное определение абсолютно упругого удара, если величина этого угла является целой частью π , т.е. $\beta_m = \pi/m$ ($m \in N$).

Введем декартову систему координат $OXYZ$ и обозначим (x_j, y_j, z_j) – координаты центров шаров G_j ($j = 1, 2, 3$). Кинетическая энергия выражается формулой

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 m_j (\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2) = \frac{1}{2} \dot{q} A \dot{q}^T$$

$$A = \text{diag}\{m_1, m_2, m_3, m_1 m_2, m_3, m_1, m_2, m_3\}, \quad q = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3)$$

Односторонние связи, наложенные на систему, можно задать неравенствами

$$f_1 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - (\rho_1 + \rho_2)^2 \geq 0 \quad (3.6)$$

$$f_2 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 - (\rho_3 + \rho_2)^2 \geq 0$$

Нормальные векторы $n_{1,2}$ к поверхностям $f_{1,2} = 0$ определяем по формуле (1.6):

$$n_1 = \left(\frac{1}{m_1} (x_2 - x_1), \frac{1}{m_2} (x_1 - x_2), 0, \frac{1}{m_1} (y_2 - y_1), \frac{1}{m_2} (y_1 - y_2), 0, \frac{1}{m_1} (z_2 - z_1), \frac{1}{m_2} (z_1 - z_2), 0 \right)$$

$$\mathbf{n}_2 = \left(0, \frac{1}{m_2}(x_2 - x_3), \frac{1}{m_3}(x_3 - x_2), 0, \frac{1}{m_2}(y_2 - y_3), \frac{1}{m_3}(y_3 - y_2), 0, \frac{1}{m_2}(z_2 - z_3), \frac{1}{m_3}(z_3 - z_2) \right)$$

Для определения величины угла между поверхностями (3.6) получим такое соотношение:

$$\cos \beta = -(1 + m_2 / m_1)^{-1/2} (1 + m_2 / m_3)^{1/2} \cos \angle G_1 G_2 G_3 \quad (3.7)$$

Таким образом, условие (3.4) эквивалентно ортогональности поверхностей (3.6) в метрике Якоби.

Пример. (Задача И. Бернулли.) Шар с массой m_2 ударяет по двум покоящимся одинаковым и симметрично расположенным другим шарам (фиг. 2, б); диссипацией энергии пренебрегаем. Можно получить решение этой задачи, если к законам сохранения энергии и количества движения добавить условие сохранения симметрии после удара [1]. Однако данный результат не будет, как показывают эксперименты с монетами, отражать поведение реальной системы. Если угол $G_1 G_2 G_3$, образуемый центрами в момент соударения, острый, то незаметная на глаз начальная асимметрия системы приводит к значительной разнице в послеударных скоростях первого и третьего шаров. Если $m_2 < m_1$, то кратный удар может свестись к обычному соударению движущегося шара с одним из двух неподвижных без контакта с другим неподвижным шаром, а в общем случае он представляет собой последовательность "парных" соударений, причем первенство в этой последовательности определяется случайными факторами. Длина последовательности зависит от угла β , который вследствие равенства $m_1 = m_3$ вычисляется по формуле

$$\cos \beta = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \angle G_1 G_2 G_3$$

Сохранение симметрии после удара, которое Бернулли рассматривал как постулат, в данной задаче имеет место лишь в квазирегулярных случаях, когда угол β составляет целую часть от развернутого угла, т.е.

$$\cos \angle G_1 G_2 G_3 = -(1 + m_2 / m_1) \cos \pi / k \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (3.8)$$

Критерий (3.8) выполнен вне зависимости от соотношения масс, если угол, образуемый центрами шаров, прямой ($k = 2$). Если $m_2 \geq m_1$, то других решений нет, так как правая часть по абсолютной величине будет превосходить единицу. В случае $m_2 < m_1$ уравнение (3.8) имеет несколько решений, количество которых возрастает с ростом отношения m_1/m_2 .

Допустим, в частности, что все три шара идентичны, причем первый и третий до удара соприкасаются (фиг. 2, в). Тогда центры шаров в момент удара образуют (без учета случайных погрешностей) равносторонний треугольник. По формуле (3.7) получаем $\cos \beta = -0,25$, откуда $\beta \approx 0,58\pi$. Следовательно, условие (3.8) не выполнено, и система относится к стохастическому типу. Несложные расчеты показывают, что удар сначала по первому, а потом по третьему шару приводит к такому результату:

$$\mathbf{V} = \frac{\sqrt{3}}{2} |v_2| \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{V}_2 = \frac{\sqrt{3}}{12} |v_2| (\mathbf{n}_2 - 2\mathbf{n}_1), \quad \mathbf{V}_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} |v_2| \mathbf{n}_2 \quad (3.9)$$

К иному итогу ведет другая последовательность парных соударений – вначале второй шар ударяет по третьему, а затем – по первому:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} |v_2| \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{V}_2 = \frac{\sqrt{3}}{12} |v_2| (\mathbf{n}_1 - 2\mathbf{n}_2), \quad \mathbf{V}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} |v_2| \mathbf{n}_2 \quad (3.10)$$

В зависимости от случайных погрешностей задача имеет два равновероятных решения (3.9) и (3.10). Заметим, что в обоих случаях после удара один из покоящихся вначале шаров приобретает скорость вдвое большую, нежели другой.

Заметим, что стохастический характер данной задачи сохраняется и в предположении, что соударения абсолютно неупруги, исследованном в [2]: несложные вычисления показывают, что при поочередных ударах о симметрично расположенные шары движущий шар отклоняется от оси симметрии.

Помимо отмеченных случаев корректного решения задачи о пространственном ударе трех шаров, к квазирегулярному типу относится удар по системе двух соприкасающихся шаров, неподвижных относительно друг друга. Решение можно найти методом "вдавливания".

4. Соударение трех тел произвольной формы. Рассмотрим теперь соударение трех твердых тел произвольной формы с гладкими поверхностями. Как и ранее, пренебрегаем размером области контакта и считаем, что первое и второе тело имеют единственную общую точку C_1 , а второе и третье – общую точку C_2 . Обозначая G_k ($k = 1, 2, 3$) центры масс тел, J_k – их центральные тензоры инерции, W_k – угловые скорости, представим уравнения удара по аналогии с (3.1) в виде [6]

$$m_1[\dot{\mathbf{r}}_1(t) - \dot{\mathbf{r}}_1(t_0)] = \mathbf{I}_1, \quad m_2[\dot{\mathbf{r}}_2(t) - \dot{\mathbf{r}}_2(t_0)] = -\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2, \quad (4.1)$$

$$m_3[\dot{\mathbf{r}}_3(t) - \dot{\mathbf{r}}_3(t_0)] = \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{J}_1[\mathbf{W}_1(t) - \mathbf{W}_1(t_0)] = G_1 C_1 \times \mathbf{I}_1$$

$$\mathbf{J}_3[\mathbf{W}_3(t) - \mathbf{W}_3(t_0)] = G_3 C_2 \times \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{J}_2[\mathbf{W}_2(t) - \mathbf{W}_2(t_0)] = -G_2 C_1 \times \mathbf{I}_1 - G_2 C_2 \times \mathbf{I}_2$$

Нормальные деформации определяются соотношениями

$$\delta_1 = (\mathbf{r}_{c_1}^{(1)} - \mathbf{r}_{c_1}^{(2)}, \mathbf{n}_1), \quad \delta_2 = (\mathbf{r}_{c_2}^{(3)} - \mathbf{r}_{c_2}^{(2)}, \mathbf{n}_2) \quad (4.2)$$

Здесь $\mathbf{r}_c^{(j)}$ – радиус-вектор точки C , лежащей на недеформированной поверхности j -го тела, $\mathbf{n}_{1,2}$ – орты, нормальные поверхностям контакта. Тогда скорость деформирования вычисляется по формулам

$$\dot{\delta}_1 = (\dot{\mathbf{r}}_{c_1}^{(1)} - \dot{\mathbf{r}}_{c_1}^{(2)}, \mathbf{n}_1), \quad \dot{\delta}_2 = (\dot{\mathbf{r}}_{c_2}^{(3)} - \dot{\mathbf{r}}_{c_2}^{(2)}, \mathbf{n}_2) \quad (4.3)$$

Выразим относительные скорости по формулам Эйлера: $\dot{\mathbf{r}}_c^{(j)} = \dot{\mathbf{r}}_j + \mathbf{W}_j \times G_j C$ и вычислим вторые производные деформаций, дифференцируя уравнения (4.3). В результате получим

$$\ddot{\delta}_1 = \left(\frac{1}{m_1} \mathbf{R}_1 + \frac{1}{m_2} (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) + \mathbf{J}_1^{-1} (G_1 C_1 \times \mathbf{R}_1) \times G_1 C_1 + \mathbf{J}_2^{-1} (G_2 C_1 \times \mathbf{R}_1) \times G_2 C_1 + \right. \quad (4.4)$$

$$\left. + \mathbf{J}_2^{-1} (G_2 C_2 \times \mathbf{R}_2) \times G_2 C_1, \mathbf{n}_1 \right)$$

$$\ddot{\delta}_2 = \left(\frac{1}{m_3} \mathbf{R}_2 + \frac{1}{m_2} (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) + \mathbf{J}_3^{-1} (G_3 C_2 \times \mathbf{R}_2) \times G_3 C_2 + \mathbf{J}_2^{-1} (G_2 C_1 \times \mathbf{R}_1) \times G_2 C_2 + \right.$$

$$\left. + \mathbf{J}_2^{-1} (G_2 C_2 \times \mathbf{R}_2) \times G_2 C_2, \mathbf{n}_2 \right)$$

В формулах (4.4) каждая из реакций $\mathbf{R}_{1,2}$ коллинеарна соответствующему нормальному вектору $\mathbf{n}_{1,2}$ и зависит только от одноименной деформации и скорости ее изменения. Условие возможности корректного решения задачи о кратном ударе сводится к независимости правой части первого из уравнений от \mathbf{R}_1 , а второго – от \mathbf{R}_2 и выражается единственным равенством

$$(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) + m_2 (\mathbf{J}_2^{-1} (G_2 C_2 \times \mathbf{n}_2), G_2 C_1 \times \mathbf{n}_1) = 0 \quad (4.5)$$

Интересно отметить, что условие (4.5) связывает только динамические характеристики второго тела с расположением точек ударного контакта на его поверхности и не зависит от свойств двух других тел. В случае, когда хотя бы один из векторов $G_2 C_1$ или $G_2 C_2$ ортогонален поверхности тела, это условие сводится к равенству (3.4).

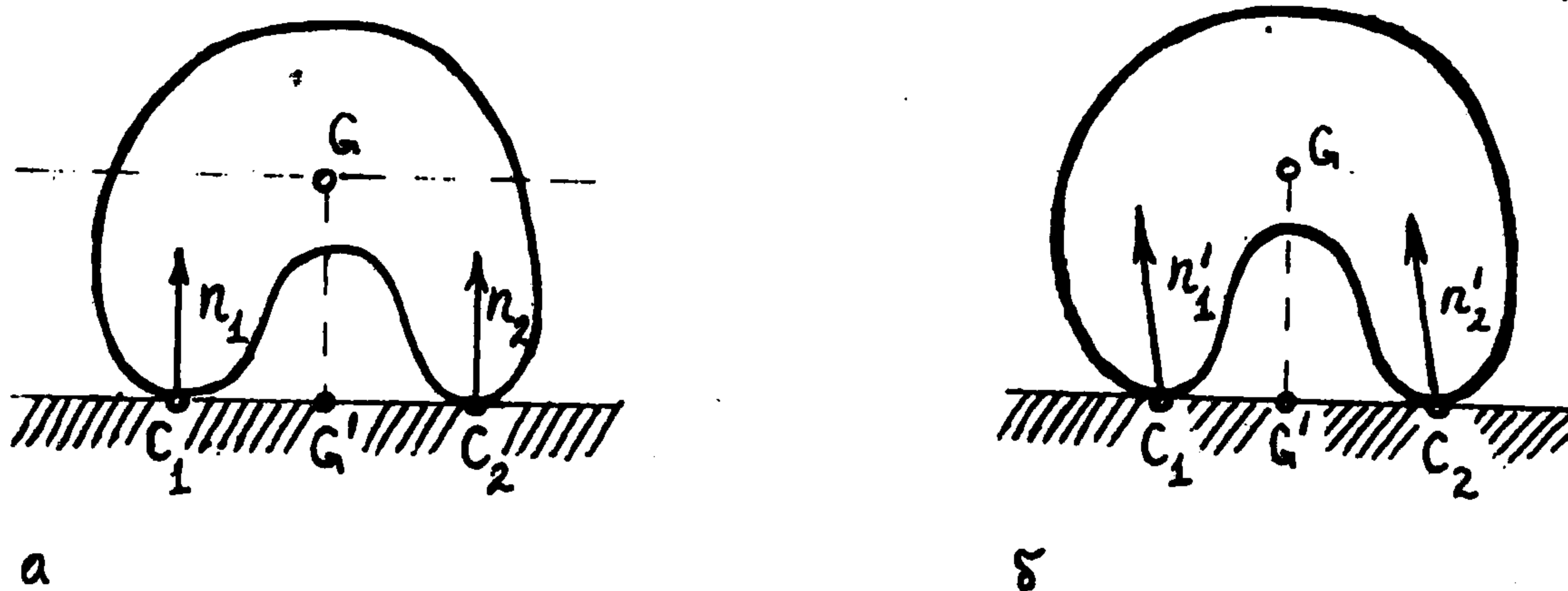
Можно получить равенство (3.4) и из геометрических соображений как условие ортогональности поверхностей удара в метрике Якоби. Соответствующие выкладки аналогичны рассмотрению предыдущих параграфов, но более громоздки, так как размерность конфигурационного пространства в обсуждаемом случае равна восемнадцати. Поэтому ограничиваемся полученным условием регулярности (4.5), имея в виду, что существуют и квазирегулярные случаи (например, абсолютно упругий удар при значениях угла $\beta = \pi/k$).

Пример. Пусть тело подковообразной формы ударяется о барьер сразу двумя своими точками (удар плоский, фиг. 3, а). В этом случае подкова играет роль центрального тела, а первым и третьим телом служит массивное основание. При этом $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$, $m_2 \mathbf{J}_2^{-1} = \rho^{-2} \mathbf{E}_2$ (ρ – радиус инерции, \mathbf{E}_2 – единичная матрица), и равенство (4.5) принимает вид

$$|G'C_1| * |G'C_2| = \rho^2 \quad (4.6)$$

где G' – проекция центра масс на основание.

Данное соотношение означает, что если закрепить тело в одной из точек контакта C_1 или C_2 , то вторая из этих точек будет лежать на линии действия ударного импульса, приложенного в центре удара. Таким образом, ударная реакция в каждой из точек контакта не создает нагрузки в другой точке.



Фиг. 3

Рассмотренный пример можно обобщить и для случая, когда поверхности соударяемых тел шероховаты и ударные силы имеют касательные составляющие. Если угол атаки достаточно велик, то скольжение при ударе не прекращается и направление реакций остается неизменным и коллинеарным векторам $\mathbf{n}'_1 = \mathbf{n}'_2 = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$, $\tan \alpha = \mu$, где μ – динамический коэффициент трения (фиг. 3, б). В данном случае равенство (4.5) после преобразований будет выглядеть так:

$$(1 + \mu^2) \rho^2 = |G'C_1| * |G'C_2| - \mu^2 |GG'|^2 + \mu |GG'| (|G'C_1| - |G'C_2|)$$

В общем случае кратного соударения шероховатых тел возможность корректного определения ударных импульсов ограничивается теми системами, в которых направление относительного проскальзывания остается в ходе удара неизменным. По-видимому, примеры таких систем исчерпываются случаем плоскопараллельного движения.

5. Соударение многих тел. Полученные выше результаты можно обобщить для случая одновременного соударения более чем трех твердых тел. Для получения условий регулярности надо выделить в системе все возможные тройки тел, составляющих две ударные пары, и для каждой из них составить равенства типа (4.5). Оказывается, что общее число соударяемых тел, для которых могут быть выполнены условия ортогональности неограничено, однако ни одно из них не должно ударяться более чем о шесть других тел. Данное ограничение проявляется при геометрическом представлении кратного удара: каждое тело имеет шесть степеней свободы, а в

шестимерном пространстве существуют не более шести попарно ортогональных (в метрике Якоби) векторов (ударных импульсов). Кроме того, и для достижения этого максимального значения требуется весьма специальная форма тела и выбор точек касания с другими телами. В частности, для шара возможно лишь три взаимно перпендикулярных направления.

Некоторое представление о более сложных случаях попарной ортогональности дает следующий пример.

Пример. Вновь рассмотрим подкову (фиг. 3, а), для которой выполнено условие ортогональности (4.6). Наряду с двумя взаимно ортогональными ударами в точках C_1 и C_2 существует и третий удар, ортогональный им обоим: линия его действия проходит через центр масс G параллельно линии C_1C_2 . Действительно, такой импульс придает подкове поступательное движение, причем точки касания с препятствием движутся вдоль него. Однако возможность такого удара реализуется лишь в том случае, когда прямая, проходящая через точку G параллельно C_1C_2 , пересекает границу подковы под прямым углом.

Отметим, что для проского тела число степеней свободы равно трем, и построенный пример дает максимальное число ортогональных ударов.

При невыполнении условий ортогональности следует использовать метод статистического ансамбля. Заметим, что получаемое при этом решение качественно сложнее, чем в рассматривавшихся выше случаях: число возможных вариантов последовательных соударений может быть сколь угодно большим, а сами эти варианты иметь разные вероятности осуществления.

Причина кроется в более сложной геометрии трехгранного (тем более многогранного) угла по сравнению с двугранным, так как его грани имеют различный видимый угловой размер, зависящий к тому же от позиции наблюдателя. Ввиду этого случайные отклонения от траектории, идущей в вершину, приведет к попаданию на различные грани угла с неравной вероятностью. Для количественной оценки различных возможностей необходимо задать в фазовом пространстве системы вероятностную меру, описывающую случайные погрешности в определении координат и скоростей. Окрестность невозмущенной траектории (идущей в вершину многогранного угла) разбивается многообразиями координатности единица на части, отвечающие попаданию изображающей точки на ту или иную грань. В свою очередь каждая из этих частей подразделяется на подобласти, соответствующие различным вариантам второго удара и т.д. Вычисляя меру каждой из подобластей, получим в итоге решение задачи о кратном ударе в виде случайной функции.

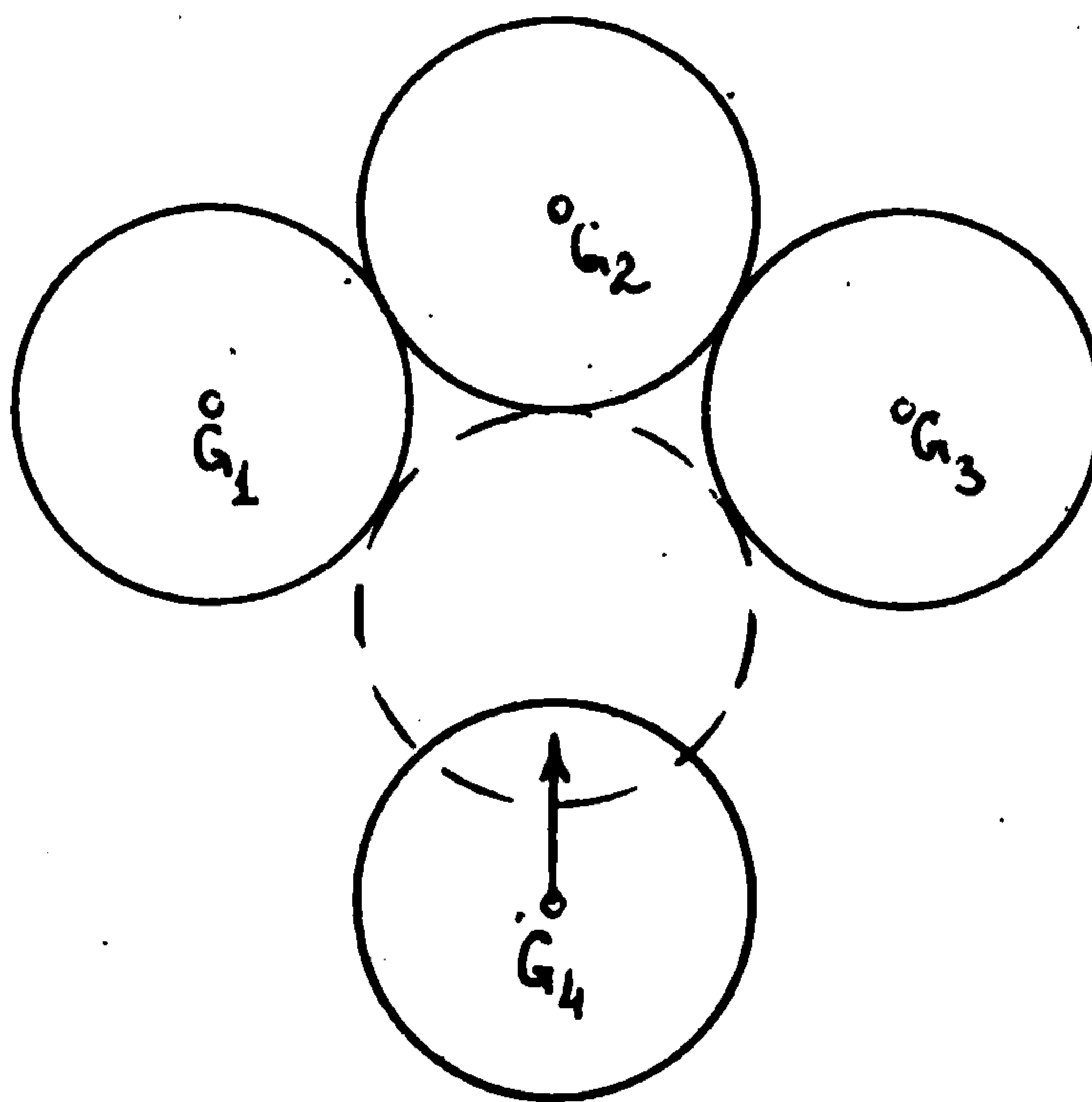
Примеры. 1°. Вновь рассмотрим систему, изображенную на фиг. 2, в, но для других начальных условий: будем считать, что все три шара имеют скорости, равные по величине 1 и направленные к общему центру симметрии. Система имеет три ударные пары, которые вследствие случайных погрешностей включаются последовательно. При абсолютно упругом соударении первого и второго шаров, а затем первого и третьего – произойдет еще удар второго и третьего шаров, после чего они разойдутся со следующими скоростями:

$$V_1 = 5\frac{\sqrt{3}}{6}n_1 - \frac{\sqrt{3}}{6}n_2, \quad V_2 = \frac{\sqrt{3}}{12}(n_2 - 8n_1), \quad V_3 = \frac{\sqrt{3}}{12}(n_2 - 2n_1) \quad (5.1)$$

В случае, если соударения шаров идут в последовательности: (2–3), (1–3), (1–2), то для получения решения достаточно в равенствах (5.1) поменять местами векторы n_1 и n_2 . Аналогично можно построить решение и в четырех других возможных случаях. Таким образом, в данном примере имеется шесть вариантов кратного удара, вероятность каждого из которых близка к одной шестой.

2°. Изучим вариант задачи Бернулли – удар движущегося шара по системе трех неподвижных равных ему шаров, имеющих две точки контакта (фиг. 4). Примем следующую модель погрешностей: точка G_2 лежит точно на линии движения четвертого шара, $\angle G_4C_2G_1 = \pi/3 + \Delta_1$, $\angle G_4G_2G_3 = \pi/3 + \Delta_2$, где $\Delta_{1,2}$ – случайные величины с одинаковым распределением. Если $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$, то удар сведется к единственному парному соударению –

четвертого шара со вторым (вероятность такого варианта близка к 0,25). Если $\Delta_1 < 0$ и $\Delta_1 < \Delta_2$, то четвертый шар вначале ударяется о первый, затем о второй и, наконец, о третий. В итоге скорости шаров будут составлять по абсолютной величине соответственно $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$ и $\sqrt{\frac{3}{8}}$ от первоначальной скорости четвертого шара. Другая возможность: $\Delta_2 < 0$, $\Delta_2 < \Delta_1$ приводит к аналогичному результату, но с перестановкой первого и третьего шаров. По соображениям симметрии два этих варианта имеют равные вероятности, близкие к 0,375.



Фиг. 4

6. Соударение связанных тел. Данная проблема в теории удара является наиболее запутанной. Причина кроется в смешении ее с задачей о действии заданного ударного импульса на систему со связями, решение которой хорошо известно [10]. Это решение основывается на предположении об абсолютной жесткости связей, обуславливающей их способность сохранять конфигурацию системы под действием ударных сил. Примером, когда такой подход правомерен, служит баллистический маятник [10]: ударный импульс возникает при попадании снаряда в резервуар с землей, составляющий часть маятника. Другой пример – удар наклонным кием по бильярдному шару, стоящему на столе [11].

Однако обобщение такого метода на задачу о соударении связанных тел может привести к неверному результату.

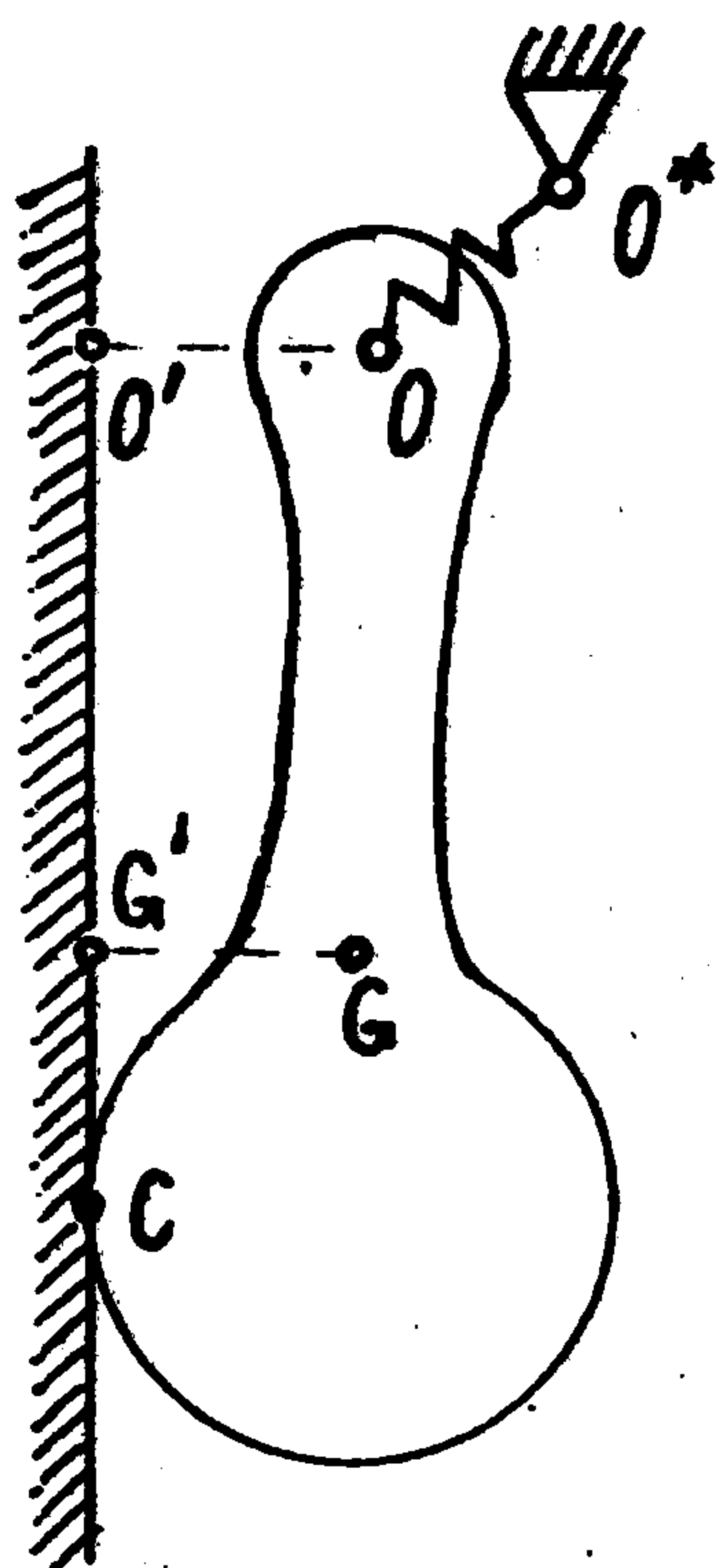
Пример. Бильярдный шар, стоящий у борта, можно рассматривать как систему с наложенной связью. Абсолютная жесткость этой связи означала бы, что при ударе по шару перпендикулярно борту он остается неподвижным. В действительности подобного результата можно достичь, ударяя по костяному шару резиновым. Если же шары идентичны, то при ударе неподвижный шар отойдет от борта. Для описания этого явления можно воспользоваться системой (2.6), полагая $m_1 = m_2 \ll m_3$, $R_{23}^*(x) = 2\sqrt{2R_{12}^*(x)}$, что соответствует согласно контактной теории Герца предельному случаю абсолютно жесткого (по сравнению с шаром) борта. В результате численного интегрирования получаем $V_1 = -0,96$, $V_2 = -0,28$.

Замечания. 1°. Задача о соударении бильярдных шаров была решена [12] на основе предположения об абсолютной жесткости контакта шара и стола. Как показывает приведенный пример, такое допущение правомерно лишь в случае, когда бьющий шар сделан из гораздо менее жесткого материала, чем второй шар.

2°. В рассмотренном примере связь имеет односторонний характер, однако вывод о необходимости учета ее жесткости остается справедливым и в случае удерживающей связи. Так, если бы одна из точек неподвижного шара была прикреплена к борту, то его отрыв от последнего был бы невозможным, однако это никак бы не повлияло на скорость отскока первого шара. Как свидетельствуют представленные выше результаты, он теряет часть своей кинетической энергии, что свидетельствует о ее трансформации в колебания "неподвижной" системы шар – борт.

Перейдем к рассмотрению задачи об ударе физического маятника о неподвижную стенку. Проведем плоскость через точку контакта перпендикулярно оси вращения и рассмотрим полученное сечение (фиг. 5). Будем считать стенку гладкой, так что ударная реакция ей ортогональна.

Маятник можно рассматривать как центральное тело, соударяющееся с двумя другими: с препятствием и осью подвеса одновременно. Обычно в данной задаче



Фиг. 5

считают крепление к оси абсолютно жестким. Тогда ударный импульс в точке C можно определить, исходя из гипотезы Ньютона: так как имеется лишь одна – вращательная – степень свободы, то формула (1.1) однозначно определяет I . Затем можно вычислить реакции в точках крепления [10].

Такой подход к решению кажется на первый взгляд безупречным, однако в нем можно обнаружить изъяны. Действительно, предположение об идеальности крепления к оси вращения оправданно в единственном случае: если материал, из которого сделано препятствие, значительно менее жесткий, нежели маятник и ось крепления. Тогда продолжительность соударения достаточно велика, чтобы можно было пренебречь податливостью опоры. Если же маятник и стенка сделаны из материалов, имеющих жесткости одного порядка, то при ударе в точках крепления возникнут вибрации, поглощающие часть кинетической энергии. Диссипация тем больше, чем больше ударные нагрузки, необходимые для фиксации оси крепления маятника.

Для получения количественных оценок ограничимся плоским случаем (фиг. 5). Оставаясь в рамках гипотезы абсолютно твердого тела, рассмотрим следующую модель упругого крепления.

Будем считать, что неподвижная опора O^* и фиксированная точка O тела связаны жесткой пружиной, препятствующей их разделению. Реакция опоры зависит от смещения точки O и определяется формулой

$$R_o = -K(q)q, \quad q = O^*O \quad (6.1)$$

В формуле (6.1) коэффициент жесткости K предполагается большим по абсолютной величине.

Уравнения (4.1) примут вид

$$m_2[\dot{r}_2(t) - \dot{r}_2(t_0)] = -I_1 - I_0, \quad J_2[W_2(t) - W_2(t_0)] = -G_2C \times I_1 - G_2O \times I_0 \quad (6.2)$$

$$I_0 = -\int_{t_0}^t R_0 dt, \quad I_1 = \int_{t_0}^t R_1 dt, \quad R_1 = R_1(\delta_1, \dot{\delta}_1)n_1$$

где реакция R_0 вычисляется по формуле (6.1), а деформация δ_1 – по формуле (4.2).

Скорость точки O определяется соотношением

$$V_o = \dot{q} = \dot{r}_2(t) + W(t) \times G_2O \quad (6.3)$$

Объединяя равенства (6.1) – (6.3), получаем уравнения удара в виде

$$\ddot{q} = m_2^{-1}(R_1 - Kq) + J_2^{-1}(G_2C \times R_1 - G_2O \times Kq) \times G_2O \quad (6.4)$$

$$\ddot{\delta} = m_2^{-1}(-R_1 + Kq, n_1) + (J_2^{-1}(-G_2C \times R_1 + G_2O \times Kq), G_2C \times n_1)$$

$$q(t_0) = \dot{q}(t_0) = 0, \quad \delta_1(t_0) = 0, \quad \dot{\delta}_1(t_0) = (OC \times W(t_0), n_1)$$

Заметим, что формулы (6.4) можно использовать и для описания пространственного удара о препятствие твердого тела с неподвижной точкой.

В общем случае переменные q, δ_1 в системе (6.4) связаны, что свидетельствует о необходимости задания значения K и зависимости $R_1(\delta_1, \dot{\delta}_1)$ для решения задачи об

ударе. При этом для рассматриваемой системы первые три из начальных условий фиксированы, и лишь четвертое может варьироваться. С этой оговоркой решение системы (6.4) будет непрерывно зависеть от начальных условий. Тем не менее это решение существенно зависит от соотношения жесткостей в контакте маятника с опорой и с осью подвеса. Поэтому данную задачу следует отнести к квазирегулярному типу, описанному в преамбуле.

Единственное, но приятное исключение составляет случай, когда для любого вектора q выполнено равенство

$$m_2^{-1}(q, n_1) + (J_2^{-1}(G_2 O \times q, G_2 C \times n_1)) = 0$$

которое в обсуждаемом плоском случае принимает вид

$$\rho^2(q, n_1) + (G_2 O \times q, G_2 C \times n_1) = 0 \quad (6.5)$$

где ρ – радиус инерции маятника. Полагая в равенстве (6.5) последовательно $q \perp n_1$ и $q = n_1$, приходим к следующим условиям регулярности:

$$G_2 O \perp n_1, \quad \rho^2 = (O'G', G'C) \quad (6.6)$$

Здесь O', G' – проекции соответствующих точек на препятствие (фиг. 5). Соотношения (6.6) означают, что реакция стенки не создает нагрузки в точке подвеса, т.е. линия ее действия проходит через центр удара (последний лежит на оси OG_2 , которая в момент соударения параллельна стенке).

Пример. Исследуем удар о препятствие маятника, состоящего из невесомого стержня длины L и двух грузиков с массами m_1 и m_2 , из которых первый закреплен на конце стержня, а второй – на расстоянии $l < L$ от точки подвеса (фиг. 6). Расчеты приводят к таким выражениям для радиуса инерции и положения центра масс системы:

$$OG = \frac{m_1 L + m_2 l}{m_1 + m_2}, \quad \rho_2 = \frac{m_1 L^2 + m_2 l^2}{m_1 + m_2} \quad (6.7)$$

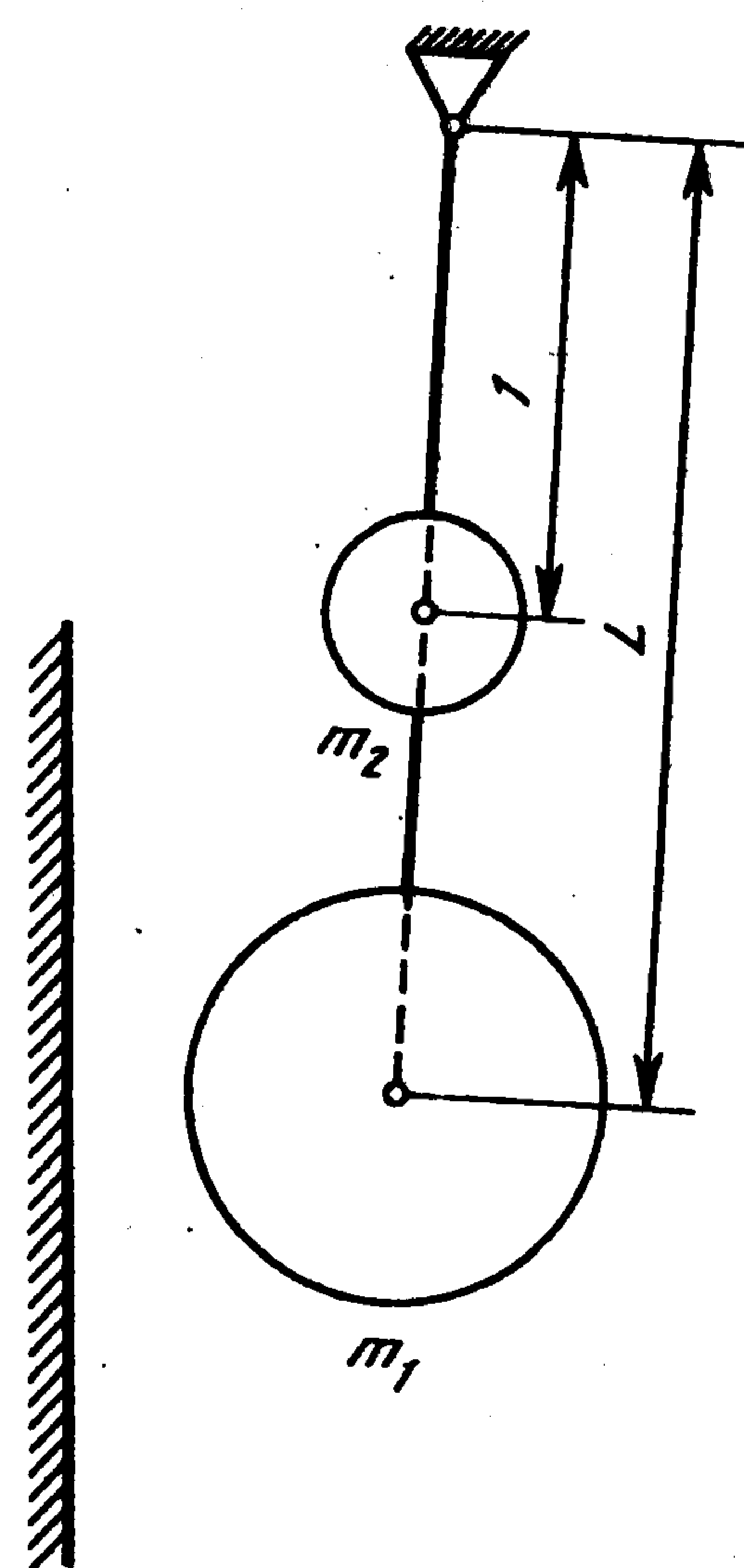
Второе из условий (6.6) при учете (6.7) выглядит так:

$$(m_1 L^2 + m_2 l^2)(m_1 + m_2) = m_2 (L - l)(m_1 L + m_2 l) \quad (6.8)$$

Был поставлен эксперимент: все параметры системы оставались неизменными ($m_2 = 4m_1$), за исключением величины l . Оказалось, что при ударе маятника о вертикальную стенку (при вертикальном положении оси) коэффициент восстановления относительной скорости также изменялся. Корню уравнения (6.8) $l = L/6$ соответствует наибольшее значение этого коэффициента, примерно вдвое превышающее его значение, соответствующее предельному положению $l = L$.

7. Выводы. Выше рассмотрен ряд задач, относящихся к проблеме кратного удара. Как показал проведенный анализ, методы решения этих задач, так же как и сама возможность решения, в значительной мере определяются конфигурацией системы в момент соударения. Можно предположить следующую классификацию возможных случаев.

1°. В регулярном случае ударные пары действуют независимо друг от друга. При этом задача о кратном ударе распадается на несколько более простых задач о соударении двух тел. Каждая из этих задач может быть решена в рамках данной дискретной системы без привлечения теории упругости на основе стандартной гипотезы о коэффициенте восстановления.



Фиг. 6

Для реализации этого случая требуется выполнение довольно жестких условий, выражающих ортогональность ударных импульсов в метрике Якоби (см. [4]). Механический смысл условий ортогональности (3.4), (4.5), (6.6), (6.8) и др. состоит в том, что каждая из ударных пар не нагружает другую пару.

2°. Второй, более распространенный тип задач, допускающих корректное решение, можно назвать квазирегулярным. Он характеризуется невыполнением условий ортогональности, что делает решение поставленной задачи в рамках динамики дискретных систем невозможным. Можно, например, использовать для решения ту или иную модель теории упругости, отражающую физические свойства соударяемых тел. Получаемый результат обладает свойством непрерывной зависимости от начальных условий. Отличие от регулярного случая заключается в том, что этот результат существенно изменится, если изменить физические свойства соударяемых тел (например, жесткость). К этому типу можно отнести задачу об ударе физического маятника о препятствие и частный случай коллинеарного соударения трех шаров, при котором два из них до удара неподвижны.

3°. Наиболее распространенным является третий тип задач о кратном ударе, который можно назвать стохастическим. Он характеризуется высокой чувствительностью результата к начальным условиям удара, сочетающейся с невозможностью определить эти условия с необходимой точностью. В этом случае однозначное корректное решение проблемы кратного удара, согласующееся с экспериментом, невозможно. Один из возможных путей преодоления данного парадокса, по мнению автора, состоит в представлении решения в виде случайной вектор – функции, принимающей несколько значений. Примеры такой ситуации рассмотрены выше.

С качественной точки зрения, стохастическая система аналогична монете, падающей на горизонтальный стол параллельно вертикальной плоскости: теоретически она должна остановиться на ребре, однако на практике мы имеем равновероятные "орел – решка".

Более сложная ситуация возникает при ударе большей кратности: здесь ударный импульс может принимать сколь угодно большое (но конечное) число различных значений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17228).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернулли И. Избранные сочинения по механике. М.; Л.: Гостехиздат, 1937. 294 с.
2. MacLaurin С. A treatise on fluxions. Edinburg: Ruddimans, 1742. 763 p.
3. Даламбер Ж. Динамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 344 с.
4. Иванов А.П. Об ударах в системе с несколькими неустойчивыми связями // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 559–566.
5. Козлов В.В., Трещев Д.В. Биллиарды. М.: Изд-во МГУ, 1991. 168 с.
6. Голдсмит В. Удар. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
7. Киргетов В.И. Об абсолютно упругом ударе материальных систем // ПММ. Т. 24. Вып. 5. С. 781–789.
8. Кильчевский Н.А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. Киев: Наук. думка, 1976. 319 с.
9. Lankarani Н.М., Nikravesh Р.Е. A contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems // Trans. ASME. J. Mech. Design. 1990. V. 112. № 3. P. 369–376.
10. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
11. Кориолис Г. Математическая теория явлений бильярдной игры. М.: Гостехиздат, 1956. 235 с.
12. Нагаев Р.Ф., Холодилин Н.А. К теории соударения бильярдных шаров // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 6. С. 48–55.