УДК 531.53:534.1

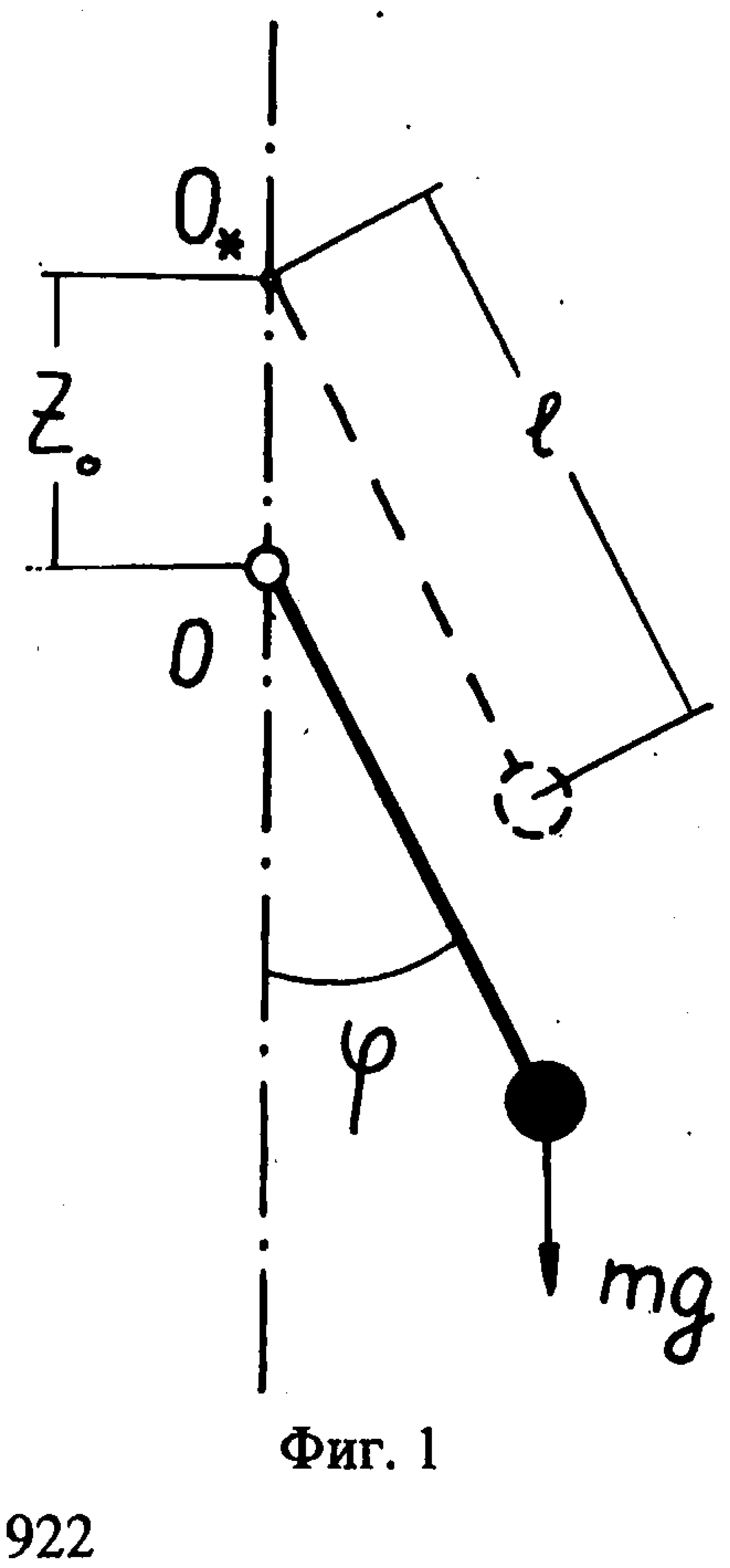
© 1995 г. Б.С. Бардин, А.П. Маркеев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ МАЯТНИКА ПРИ ВЕРТИКАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТОЧКИ ПОДВЕСА

Рассматривается движение маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания произвольной частоты и амплитуды. Дано полное строгое решение нелинейной задачи об устойчивости относительных положений равновесия маятника на вертикали.

Задаче об устойчивости равновесий маятника при гармонических колебаниях его точки подвеса было уделено много внимания. Однако эта задача решена во всей полноте только в рамках линеаризованных уравнений возмущенного движения (см., например, [1–3]). Было дано [4] строгое решение задачи об устойчивости нормального положения равновесия маятника, но лишь для малых амплитуд колебаний точки подвеса. Получено [5] строгое достаточное условие неустойчивости перевернутого положения маятника. Нестрогий анализ нелинейной задачи об устойчивости перевернутого маятника проведен в [6,7].

1. Постановка задачи. Пусть маятник представляет собой абсолютно твердый невесомый стержень длины l, вращающийся вокруг одного своего конца и несущий на другом конце точечную массу m. Все нижеследующие результаты легко обобщить для случая физического маятника; надо только величину l заменить на его приведенную длину, равную r^2d^{-1}, где r – радиус инерции, d – расстояние от центра тяжести до точки подвеса. Точка подвеса O маятника совершает гармонические колебания вдоль вертикали с амплитудой a и частотой ω: $z_0 = a\cos\omega t$, где z_0 – смещение точки подвеса от некоторого фиксированного положения O_* (фиг. 1).



Фиг. 1

Уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\varphi}+(\alpha+\beta\cos\tau)\sin\varphi=0,\quad \alpha=g/(\omega^2 l),\quad \beta=a/l \tag{1.1}$$

где φ – угол отклонения маятника от вертикали, точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau=\omega t$.

Уравнение (1.1) имеет частные решения $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$, отвечающие относительным равновесиям маятника на вертикали. При $\varphi=0$ точка подвеса лежит выше, а при $\varphi=\pi$ – ниже центра тяжести. Следуя [8], будем называть первое положение нормальным, а второе – перевернутым положением маятника.

Цель работы – строгое решение задачи об устойчивости по Ляпунову этих положений маятника для всех возможных значений параметров α и β.

Полагая $\varphi=q$, $\dot{\varphi}=p$, уравнения возмущенного движения для случая нормального положения маятника можно записать в гамильтоновой форме

$$dq/d\tau = \partial H/\partial p, \; dp/d\tau = -\partial H/\partial q \tag{1.2}$$

$$H = \tfrac{1}{2} p^2 - (\alpha + \beta \cos\tau)\cos q \tag{1.3}$$

Аналогично, положив $\varphi = \pi + q$, $\dot{\varphi} = p$, получим гамильтоновы уравнения возмущенного движения для случая перевернутого маятника. Соответствующий им гамильтониан при замене τ на $\tau + \pi$ и α на $-\alpha$ переходит в гамильтониан (1.3).

Поэтому при решении задачи об устойчивости положений относительного равновесия маятника на вертикали будем рассматривать устойчивость решения $q = p = 0$ уравнений (1.2), считая, что в функции Гамильтона (1.3) параметры α, β принимают любые значения из полуплоскости $-\infty < \alpha < \infty$, $\beta \geqslant 0$. В результате исследования эта полуплоскость разбивается на области устойчивости и неустойчивости. Те из них, где $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, будут областями устойчивости и неустойчивости нормального положения равновесия маятника. Области, в которых $\alpha \leqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, после зеркального отражения относительно оси $\alpha = 0$ дадут области устойчивости и неустойчивости перевернутого положения маятника.

2. О линейных уравнениях возмущенного движения и устойчивости в первом приближении. В окрестности точки $q = p = 0$ функция Гамильтона (1.3) представима в виде сходящегося ряда по степеням q, p:

$$H = \tfrac{1}{2} p^2 + \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta\cos\tau)q^2 - 1/24(\alpha + \beta\cos\tau)q^4 + \ldots \tag{2.1}$$

Не зависящее от q, p слагаемое в (2.1) отброшено.

Линеаризованная в окрестности точки $q = p = 0$ система уравнений (1.2) эквивалентна уравнению Матье

$$\ddot{q} + (\alpha + \beta\cos\tau)q = 0 \tag{2.2}$$

Исследованию этого уравнения посвящена обширная литература. Результаты и достаточно полную библиографию можно найти в [1–3]. Приведем кратко некоторые сведения, необходимые в дальнейшем.

Пусть $\mathbf{X}(\tau)$ – фундаментальная матрица решений линеаризованной системы (1.2), удовлетворяющая условию $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица второго порядка. Элементы $x_{11}(\tau)$, $x_{12}(\tau)$ первой строки этой матрицы удовлетворяют уравнению (2.2), а элементы второй строки получаются из них дифференцированием по τ: $x_{21} = \dot{x}_{11}$, $x_{22} = \dot{x}_{12}$. Диагональные элементы x_{11}, x_{22} четные, а x_{12}, x_{21} нечетные функции τ.

В характеристическом уравнении линеаризованной системы (1.2)

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0 \tag{2.3}$$

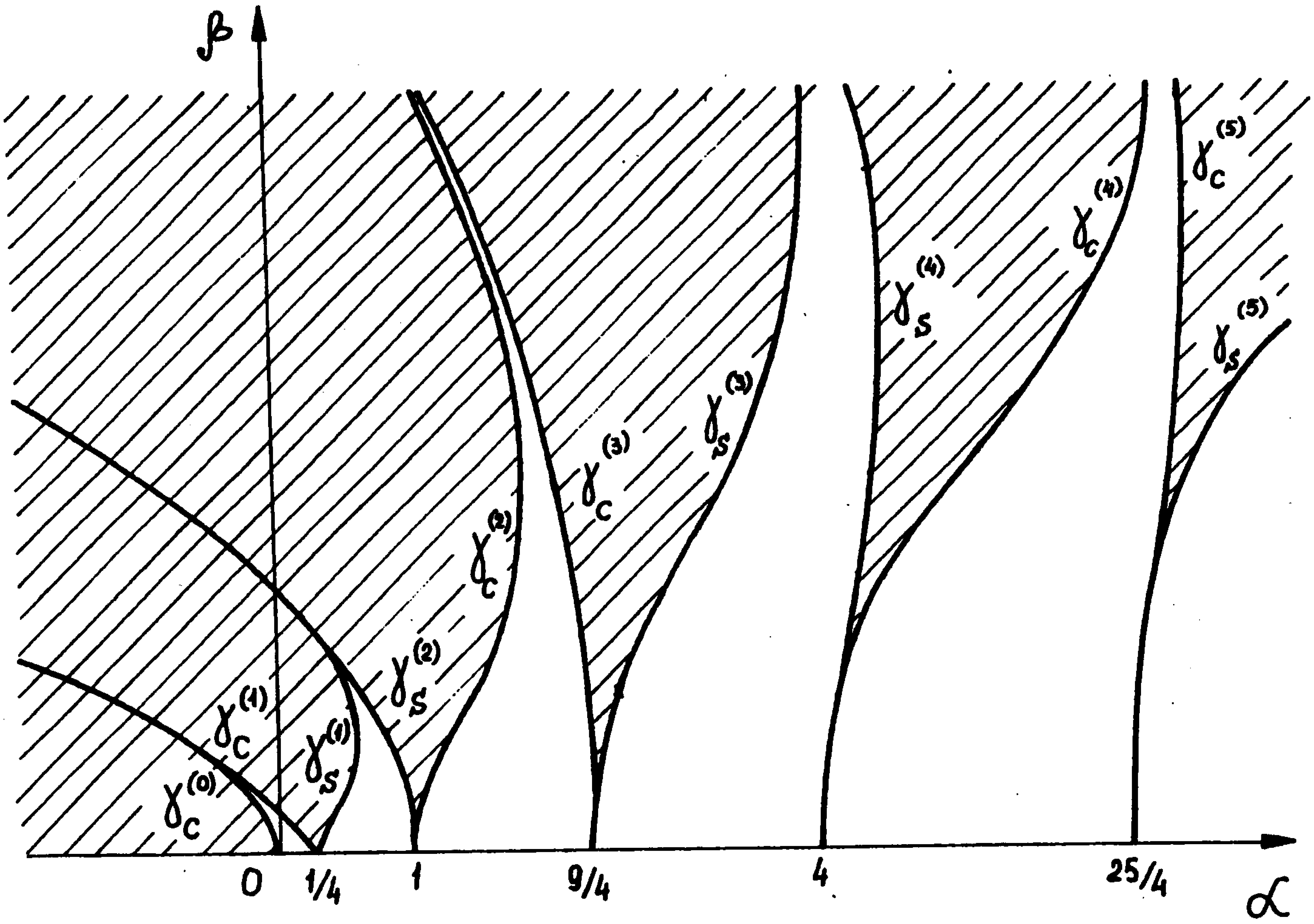
имеем $A = x_{11}(2\pi) = x_{22}(2\pi)$.

На фиг. 2 изображены области устойчивости и неустойчивости уравнения (2.2) в полуплоскости $-\infty < \alpha < \infty$, $\beta \geqslant 0$. Области неустойчивости (области параметрического резонанса) заштрихованы. В этих областях модуль одного из корней уравнения (2.3) больше единицы. Следовательно, согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению [9] здесь имеет место неустойчивость не только для линейного уравнения (2.2), но и для полной нелинейной системы уравнений возмущенного движения (1.2).

В незаштрихованной части фиг. 2 выполнены условия устойчивости в линейном приближении. Здесь корни уравнения (2.3) являются комплексно-сопряженными и имеют модули, равные единице. При этом

$$A = \cos 2\pi\lambda, \quad x_{12}(2\pi)x_{21}(2\pi) = -\sin^2 2\pi\lambda < 0$$

где $\pm i\lambda$ – характеристические показатели (i – мнимая единица, $\lambda > 0$).



Фиг. 2

Множества областей неустойчивости и областей устойчивости в линейном приближении счетны. Область устойчивости, переходящую при $\beta \to 0$ в интервал $(n-1)^2/4 < \alpha < n^2/4$ оси $\beta = 0$, обозначим через $g_n (n = 1,2, ...)$. Криволинейные границы областей g_{2m-1} и $g_{2m} (m = 1,2, ...)$ обозначим через $\gamma_c^{(2m-2)}$, $\gamma_c^{(2m-1)}$ и $\gamma_s^{(2m-1)}$, $\gamma_s^{(2m)}$ соответственно. Кривые $\gamma_c^{(k)}$ и $\gamma_s^{(k)}$ пересекаются на оси $\beta = 0$ в точках $\alpha = k^2/4$ $(k = 1,2, ...)$, из которых при малых β рождаются области параметрического резонанса. Граничные кривые $\gamma_c^{(k)}$ и $\gamma_s^{(k)}$ этих областей при $\beta \to 0$ имеют касание порядка $k-1$ $(k = 1,2, ...)$.

Все граничные кривые пересекают ось $\alpha = 0$ и не оканчиваются в конечной области. При фиксированном β области устойчивости тем шире, чем больше α. При больших значениях β области устойчивости становятся очень узкими и стремятся к кривым, у которых тангенс угла наклона касательной равен – 1.

Для значений параметров α, β, принадлежащих граничным кривым, корни уравнения (2.3) равны. На кривых $\gamma_c^{(0)}$, $\gamma_c^{(2k)}$, $\gamma_s^{(2k)} (k = 1,2,\dots)$ имеем резонанс первого порядка ($\rho_1 = \rho_2 = 1$), а на криых $\gamma_c^{(2k-1)}$, $\gamma_s^{(2k-1)} (k = 1,2\dots)$ – резонанс второго порядка ($\rho_1 = \rho_2 = -1$). При этом для $\beta > 0$ элементарные делители матрицы $X(2\pi) - \rho E$ непросты.

Линейно независимые решения уравнения Матье (2.2) на кривых $\gamma_c^{(m)} (m = 0,1,2,\dots)$ обозначим через $\varphi_1^{(m)}$ и $\varphi_2^{(m)}$, а на кривых $\gamma_s^{(m)} (m = 1,2,...)$ – через $\psi_1^{(m)}$ и $\psi_2^{(m)}$. Тогда

$$\varphi_1^{(m)}(\tau) = \mathrm{ce}_m(\tau/2, -2\beta), \quad \varphi_2^{(m)}(\tau) = \mathrm{fe}_m(\tau/2, -2\beta),$$

$$\psi_1^{(m)}(\tau) = \mathrm{se}_m(\tau/2, -2\beta), \quad \psi_2^{(m)}(\tau) = \mathrm{ge}_m(\tau/2, -2\beta)$$

Здесь ce_m и se_m – четная и нечетная функции Матье первого рода, а fe_m и ge_m – соответствующие им функции Матье второго рода. Функции $\varphi_1^{(m)}$, $\psi_1^{(m)}$ 2π-периодичны по τ при четном m и 4π-периодичны, когда m нечетно. Функции $\varphi_2^{(m)}$, $\psi_2^{(m)}$ являются непериодическими и неограниченными, они стремятся к бесконечности как первая степень τ. Следовательно, для значений параметров α, β, принадлежащих граничным кривым, имеет место неустойчивость в линейном приближении.

Строгое решение вопроса об устойчивости внутри областей g_n устойчивости в линейном приближении и на граничных кривых требует рассмотрения полной нелинейной системы уравнений возмущенного движения (1.2). Соответствующие необходимые методы и алгоритмы разработаны ранее [10–13].

В разд. 3 – 5 будет доказано следующее утверждение.

Теорема. Для значений параметров α, β, лежащих внутри областей устойчивости в линейном приближении или на их границах $\gamma_c^{(2k-1)}$, $\gamma_s^{(2k)} (k = 1,2,\ldots)$, решение $q = p = 0$ системы (1.2) устойчиво по Ляпунову, а на границах $\gamma_c^{(0)}$, $\gamma_c^{(2k)}$, $\gamma_s^{(2k-1)}$ (k = = 1,2, ...) имеет место неустойчивость.

3. Нормализация линеаризованных уравнений возмущенного движения. Согласно [10–13] для строгого решения задачи об устойчивости надо предварительно привести к нормальной форме квадратичную по q, p часть гамильтониана возмущенного движения (2.1).

Рассмотрим сначала области g_n устойчивости в линейном приближении. В этом случае линейной вещественной 2π-периодической по τ канонической заменой переменных $q,p \to q_*, p_*$:

$$q = n_{11}(\tau)q_* + n_{12}(\tau)p_*, \quad p = n_{21}(\tau)q_* + n_{22}(\tau)p_* \tag{3.1}$$

гамильтониан (2.1) приводится к виду

$$H = {}^1\!/_2\lambda(q_*^2 + p_*^2) - 1/24(\alpha + \beta\cos\tau)(n_{11}q_* + n_{12}p_*)^4 + O_6 \tag{3.2}$$

где O_6 – совокупность членов шестой и более высоких степеней относительно q_*, p_*.

Входящая в (3.2) величина λ соотношением $\cos 2\pi\lambda = A$ определяется неоднозначно. Неоднозначность устраняется, если воспользоваться непрерывностью характеристических показателей по β, заметив, что при $\beta = 0$ имеем $\lambda = \alpha^{1/2}$. Получим, что

$$\lambda = \begin{cases} (2\pi)^{-1}\arccos A + n - 1 & \text{для } g_{2n-1} (n = 1,2,\ldots) \\ -(2\pi)^{-1}\arccos A + n & \text{для } g_{2n} \end{cases}$$

В замене переменных (3.1) имеем

$$\begin{gathered} n_{i1} = \kappa^{-1/2}(\mu_i\cos\lambda\tau + \nu_i\sin\lambda\tau), \quad n_{i2} = \kappa^{-1/2}(-\mu_i\sin\lambda\tau + \nu_i\cos\lambda\tau) \\ \kappa = x_{12}(2\pi)\sin 2\pi\lambda > 0 \\ \mu_i = \sin 2\pi\lambda x_{i2}(\tau), \quad \nu_i = -x_{12}(2\pi)x_{i1}(\tau)(i = 1,2) \end{gathered} \tag{3.3}$$

Пусть теперь параметры α, β принадлежат граничным кривым. Как отмечалось выше, на этих кривых реализуется резонанс первого или второго порядка, а элементарные делители матрицы $\mathbf{X}(2\pi) - \rho\mathbf{E}$ непростые. При резонансе первого порядка существует линейная, вещественная, каноническая, 2π-периодическая замена переменных $q,p \to q_*, p_*$, приводящая гамильтониан (2.1) к виду

$$H = \frac{1}{2}\delta p_*^2 - \frac{1}{24}(\alpha + \beta\cos\tau)(n_{11}q_* + n_{12}p_*)^4 + O_6 \tag{3.4}$$

где величина δ равна 1 или –1, ее конкретное значение определяется в процессе линейной нормализации. Нормализующая замена переменных

$$\|qp\|' = \mathbf{N}(\tau)\|q_* p_*\|' \tag{3.5}$$

задается симплектической матрицей $\mathbf{N} = \|n_{ij}\|$ вида

$$\mathbf{N} = \mathbf{X}(\tau)\mathbf{P}\mathbf{Q}(\tau) \tag{3.6}$$

где

$$\mathbf{Q} = \begin{Vmatrix} 1 & -\delta\tau \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

а матрица $\mathbf{P}$ и величина δ определяются следующим образом. Если $x_{12}(2\pi) \neq 0$, то $\delta = \operatorname{sign} x_{12}(2\pi)$, тогда

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{Vmatrix}, \quad b = \left((|x_{12}(2\pi)|/(2\pi)\right)^{1/2}$$

Если же $x_{21}(2\pi) \neq 0$, то $\delta = -\operatorname{sign} x_{21}(2\pi)$, а

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} 0 & c^{-1} \\ -c & 0 \end{Vmatrix}, \quad c = \left((|x_{21}(2\pi)|/(2\pi)\right)^{1/2}$$

Отметим, что $x_{12}(2\pi)\, x_{21}(2\pi) = 0$, но одновременно величины $x_{12}(2\pi)$ и $x_{21}(2\pi)$ не могут быть равными нулю, так как элементарные делители матрицы $\mathbf{X}(2\pi) - \mathbf{E}$ непросты.

При резонансе второго порядка приведение функции Гамильтона (2.1) к виду (3.4) осуществляется при помощи 4π-периодической по τ замены (3.5) с матрицей $\mathbf{N}$ вида (3.6). Надо только при определении константы δ и матрицы $\mathbf{P}$ в соответствующих формулах величину 2π заменить на 4π.

В дальнейшем в разд. 5 при нелинейном анализе задачи об устойчивости на граничных кривых потребуются величина δ и элемент $n_{11}(\tau)$ матрицы $\mathbf{N}$. Рассмотрим четыре возможных случая.

1°. *Кривые* $\gamma_c^{(2k)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ *резонансов первого порядка*. Эти кривые являются правыми границами областей параметрического резонанса, исходящих при малых β из точек $\alpha = k^2$ оси $\beta = 0$. На них имеем

$$\mathbf{X}(\tau) = \begin{Vmatrix} \dfrac{\varphi_1^{(2k)}(\tau)}{\varphi_1^{(2k)}(0)} & \dfrac{\varphi_2^{(2k)}(\tau)}{\dot\varphi_2^{(2k)}(0)} \\ \dfrac{\dot\varphi_1^{(2k)}(\tau)}{\varphi_1^{(2k)}(0)} & \dfrac{\dot\varphi_2^{(2k)}(\tau)}{\dot\varphi_2^{(2k)}(0)} \end{Vmatrix} \tag{3.7}$$

$$x_{21}(2\pi) = 0, \quad x_{12}(2\pi) = \frac{\varphi_2^{(2k)}(2\pi)}{\dot\varphi_2^{(2k)}(0)}, \quad \delta = \operatorname{sign} x_{12}(2\pi) \tag{3.8}$$

$$n_{11}(\tau) = b x_{11}(\tau) \tag{3.9}$$

2°. *Кривые* $\gamma_s^{(2k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *резонансов первого порядка*. Эти кривые суть левые границы областей параметрического резонанса, исходящих из точек $\alpha = k^2$ оси $\beta = 0$. Здесь

$$\mathbf{X}(\tau) = \begin{Vmatrix} \dfrac{\psi_2^{(2k)}(\tau)}{\psi_2^{(2k)}(0)} & \dfrac{\psi_1^{(2k)}(\tau)}{\dot\psi_1^{(2k)}(0)} \\ \dfrac{\dot\psi_2^{(2k)}(\tau)}{\psi_2^{(2k)}(0)} & \dfrac{\dot\psi_1^{(2k)}(\tau)}{\dot\psi_1^{(2k)}(0)} \end{Vmatrix} \tag{3.10}$$

$$x_{12}(2\pi) = 0,\ \ x_{21}(2\pi) = \frac{\dot\psi_2^{(2k)}(2\pi)}{\psi_2^{(2k)}(0)},\ \ \delta = -\operatorname{sign} x_{21}(2\pi) \tag{3.11}$$

$$n_{11}(\tau) = -c\ \ x_{12}(\tau) \tag{3.12}$$

3°. *Кривые* $\gamma_s^{(2k-1)}(k = 1, 2, ...)$ *резонансов второго порядка.* Эти кривые являются правыми границами областей параметрического резонанса, исходящих из точек $\alpha = (2k-1)^2/4$ оси $\beta = 0$. На этих кривых матрица $\mathbf{X}(\tau)$ и величины $x_{12}(4\pi)$, $x_{21}(4\pi)$, δ, $n_{11}(\tau)$ задаются равенствами (3.10)–(3.12), в которых у функций $\psi_i^{(2k)}(i = 1,2)$ верхний индекс $2k$ надо заменить на индекс $2k - 1$, а величину 2π – на 4π.

4°. *Кривые* $\gamma_c^{(2k-1)}(k = 1, 2, ...)$ *резонансов второго порядка.* Они суть левые границы областей параметрического резонанса, исходящих из точек $\alpha = (2k-1)^2/4$ оси $\beta = 0$. Здесь матрица $\mathbf{X}(\tau)$ и величины $x_{12}(4\pi)$, $x_{21}(4\pi)$, δ, $n_{11}(\tau)$ определяются равенствами (3.7) – (3.9), если в них у функций $\varphi_i^{(2k)}(i = 1,2)$ верхний индекс $2k$ заменить на $2k - 1$, а величину 2π – на 4π.

Величины $x_{12}(2\pi)$, $x_{12}(4\pi)$ в случаях 1°, 4° и $x_{21}(2\pi)$, $x_{21}(4\pi)$ в случаях 2°, 3° при $\beta > 0$ сохраняют знак на всей соответствующей граничной кривой. Поэтому для нахождения величины δ достаточно выяснить знак этих величин при малых β. Воспользовавшись необходимыми разложениями функций Матье из [2], найдем, что в рассмотренных выше случаях 1°–4° при $0 < \beta \ll 1$ имеют место такие соотношения:

$$1^\circ.\ \ x_{12}(2\pi) \sim \frac{\pi\beta^{2k}}{2^{2k-3}[(2k)!]^2} > 0,\ \ 2^\circ.\ \ x_{21}(2\pi) \sim \frac{\pi\beta^{2k}}{2^{2k-1}[(2k-1)!]^2} > 0$$

$$3^\circ.\ \ x_{21}(4\pi) \sim -\frac{\pi\beta^{2k-1}}{2^{2k-3}[2k-2)!]^2} < 0,\ \ 4^\circ.\ \ x_{12}(4\pi) \sim -\frac{\pi\beta^{2k-1}}{2^{2k-5}[(2k-1)!]^2} < 0$$

Следовательно в случаях 1°, 3° величина δ равна 1, в случаях 2°, 4° имеем $\delta = -1$.

4. Нелинейный анализ устойчивости в областях устойчивости в линейном приближении. В каждой из областей устойчивости в линейном приближении существует одна кривая, на которой реализуется резонанс четвертого порядка (4λ – целое число). В области g_n на этой кривой имеем $4\lambda = 2n - 1$, при малых β кривая исходит из точки $\alpha = (2n-1)^2/16$ оси $\beta = 0$ и простирается неограниченно в сторону возрастающих значений β. Кривые резонансов четвертого порядка на фиг. 2 не изображены.

Переходя к нелинейному анализу устойчивости решения $q = p = 0$ системы (1.2), рассмотрим сначала нерезонансный случай, когда параметры α, β лежат внутри областей g_n устойчивости в линейном приближении, не попадая на кривые $4\lambda = 2n - 1$ ($n = 1, 2, ...$). Тогда близкой к тождественной, вещественной, 2π-периодической по τ, аналитической по x, y канонической заменой переменных $q_*, p_* \to x,y$ типа преобразования Биркгофа гамильтониан (3.2) можно привести к виду

$$H = \tfrac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2) + \tfrac{1}{4}c_2(x^2 + y^2)^2 + O_6 \tag{4.1}$$

где c_2 – постоянная величина. Если $c_2 \neq 0$, то имеет место устойчивость [10, 11].

Согласно [12] для функции Гамильтона (3.2) имеем

$$c_2 = -\frac{1}{32\pi}\int_0^{2\pi}(\alpha + \beta\cos\tau)(n_{11}^2 + n_{12}^2)^2\,d\tau$$

Подставив сюда функции n_{11} и n_{12} из (3.3) и воспользовавшись тем, что функции $\mu_1(\tau)$, $\nu_1(\tau)$ – решения уравнения Матье (2.2), после ряда преобразований получим такое выражение для величины c_2:

$$c_2 = -\frac{1}{32\pi\kappa^2}\int_0^{2\pi}\left[(\dot\mu_1\nu_1 + \mu_1\dot\nu_1)^2 + (\mu_1\dot\mu_1 - \nu_1\dot\nu_1)^2 + 2(\mu_1\dot\mu_1 + \nu_1\dot\nu_1)^2\right]d\tau < 0 \tag{4.2}$$

Так как $c_2 \neq 0$, то внутри всех областей $g_n (n = 1, 2, ...)$ при отсутствии резонансов четвертого порядка имеет место устойчивость.

Пусть параметры α, β принадлежат кривым резонансов четвертого порядка. В этом случае нелинейная нормализующая замена переменных $q_*, p_* \to x, y$ приведет гамильтониан (3.2) к такой форме:

$$H = \tfrac{1}{2}\lambda(x^2+y^2)+\tfrac{1}{4}c_2(x^2+y^2)^2+(x_{40}\cos 4\lambda\tau - y_{40}\sin 4\lambda\tau)(x^4-$$

$$-6x^2y^2+y^4)-4(y_{40}\cos 4\lambda\tau + x_{40}\sin 4\lambda\tau)xy(x^2-y^2)+O_6 \qquad (4.3)$$

В (4.3) коэффициент c_2 тот же, что и в (4.1), величины x_{40}, y_{40} постоянны. Если $|c_2| > 4(x_{40}^2+y_{40}^2)^{1/2}$, то решение $q=p=0$ системы (1.2) устойчиво, при обратном знаке в последнем неравенстве имеет место неустойчивость [12].

Согласно [12] для гамильтониана (3.2) имеем

$$x_{40} = \int_0^{2\pi}(\chi_1\cos 4\lambda\tau+\chi_2\sin 4\lambda\tau)d\tau, \quad y_{40} = \int_0^{2\pi}(-\chi_1\sin 4\lambda\tau+\chi_2\cos 4\lambda\tau)d\tau$$

$$\chi_1 = -\frac{1}{384\pi}(\alpha+\beta\cos\tau)[(n_{11}^2+n_{12}^2)^2-8n_{11}^2n_{12}^2] \qquad (4.4)$$

$$\chi_2 = \frac{1}{96\pi}(\alpha+\beta\cos\tau)n_{11}n_{12}(n_{11}^2-n_{12}^2)$$

Использовав выражения (3.3) для n_{11} и n_{12}, преобразуем выражения (4.4) к виду

$$x_{40} = \frac{1}{384\pi\kappa^2}\int_0^{2\pi}[4\mu_1^2\nu_1^2-(\mu_1^2-\nu_1^2)^2](\alpha+\beta\cos\tau)d\tau$$

$$y_{40} = \frac{1}{96\pi\kappa^2}\int_0^{2\pi}\mu_1\nu_1(\mu_1^2-\nu_1^2)(\alpha+\beta\cos\tau)d\tau$$

Ввиду нечетности подынтегральной функции во втором из этих равенств имеем $y_{40} = 0$. Выражение же для x_{40} можно еще преобразовать, если воспользоваться тем, что функции $\mu_1(\tau)$ и $\nu_1(\tau)$ – решения уравнения Матье (2.2). Получим

$$x_{40} = \frac{1}{128\pi\kappa^2}\int_0^{2\pi}\left[(\dot\mu_1\nu_1+\mu_1\dot\nu_1)^2-(\mu_1\dot\mu_1-\nu_1\dot\nu_1)^2\right]d\tau \qquad (4.5)$$

При учете равенства $y_{40} = 0$ условие устойчивости записывается в виде неравенства $|c_2| > 4\,|x_{40}|$. Из (4.2) и (4.5) следует, что это условие выполняется на всех кривых резонансов четвертого порядка.

5. Исследование устойчивости для значений параметров, принадлежащих граничным кривым. Для граничных значений параметров α, β функция Гамильтона (3.4) при помощи нелинейного нормализующего преобразования $q_*, p_* \to x, y$ может быть приведена к виду [13]

$$H = \tfrac{1}{2}\delta y^2 + a_4x^4 + O_6 \qquad (5.1)$$

где a_4 – постоянная величина. Если $a_4\delta > 0$, то решение $q=p=0$ системы (1.2) устойчиво, если же $a_4\delta < 0$, то имеет место неустойчивость [13].

Нормализующее каноническое преобразование гамильтониана (3.4) к форме (5.1) имеет период $2\pi s$ по τ, где $s = 1$ в случаях 1°, 2° и $s = 2$ в случаях 3°, 4°. Коэффициент a_4 в (5.1) вычисляется по формуле

$$a_4 = -\frac{1}{48\pi s}\int_0^{2\pi s}(\alpha+\beta\cos\tau)n_{11}^4d\tau \qquad (5.2)$$

Входящая сюда функция $n_{11}(\tau)$ определяется равенствами (3.9) и (3.12) в случаях 1° и 2° и аналогичными (см. разд. 3) равенствами в случаях 3° и 4°. Замечая, что эта функция – решение уравнения Матье (2.2), выражение (5.2) можно преобразовать к виду

$$a_4 = -\frac{1}{16\pi s}\int_0^{2\pi s} n_{11}^2 \dot{n}_{11}^2 d\tau$$

Отсюда следует, что во всех возможных рассмотренных в разд. 3 случаях граничных кривых величина a_4 отрицательна.

Учитывая, что $\delta = 1$ в случаях 1°, 3° и $\delta = -1$ в случаях 2°, 4°, получаем отсюда, что на граничных кривых $\gamma_c^{(0)}, \gamma_c^{(2k)}, \gamma_s^{(2k-1)} (k = 1, 2, ...)$ решение $q = p = 0$ уравнений (1.2) неустойчиво, а на граничных кривых $\gamma_c^{(2k-1)}, \gamma_s^{(2k)} (k = 1, 2, ...)$ имеет место устойчивость.

Результаты разд. 3–5 показывают справедливость сформулированной в разд. 2 теоремы. Вместе с приведенными в разд. 2 известными результатами исследования неустойчивости по первому приближению она дает исчерпывающий ответ на вопрос об устойчивости по Ляпунову нормального и перевернутого положений маятника при вертикальных гармонических колебаниях его точки подвеса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16257) и Международного научного фонда (MFG.300).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стретт М.Д.О.* Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков; Киев: Гостехиздат, 1935. 238с.
2. *Мак-Лахлан Н.В.* Теория и приложения функций Матье. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 475с.
3. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 256с.
4. *Маркеев А.П.* О поведении нелинейной гамильтоновой системы с одной степенью свободы на границе области параметрического резонанса // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 569–580.
5. *Болотин С.В., Козлов В.В.* Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вестник Моск. ун-та. 1980. № 4. С. 84–89.
6. *Боголюбов Н.Н.* Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. тр. Ин-та строит. механики АН УССР. 1950. № 14. С. 9–34.
7. *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–598.
8. *Капица П.Л.* Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физ. наук. 1951. Т. 44. Вып. 1. С. 7–20.
9. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530с.
10. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. Вып. 6. С. 91–192.
11. *Мозер Ю.* Лекци о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167с.
12. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312с.
13. *Иванов А.П., Сокольский А.Г.* Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при параметрическом резонансе основного типа // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 963–970.

Москва

Поступила в редакцию
7.XII.1994