УДК 536.36

© 1995 г. В.В. Румянцев

СРАВНЕНИЕ ТРЕХ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

С 50-х годов широкое распространение в нашей стране получил эффективный метод Четаева [1] построения функций Ляпунова в виде связки первых интегралов уравнений возмущенного движения. В 80-е годы в США были разработаны метод энергии – Казимира [2] и метод энергии–момента [3], применимые для гамильтоновых систем. Сравнением этих методов для систем с конечным числом степеней свободы показано, что метод энергии–Казимира является усложненным вариантом метода Четаева, а метод энергии–момента представляет собою по сути метод Рауса–Ляпунова [4, 5], изложенный современным геометрическим языком. Рассмотрены примеры.

1. Пусть для уравнений возмущенного движения

$$\dot{x}_i = X_i(x_1,\ldots,x_n) \quad (i=1,\ldots,n) \tag{1.1}$$

известны некоторые независимые первые интегралы

$$V_s(x_1,\ldots,x_n) = \text{const}, \quad \dot{V}_s = 0 \quad (s=1,\ldots,m<n) \tag{1.2}$$

где $X_i(x)$, $V_s(x)$ – аналитические функции, причем $X_i(0) = V_s(0) = 0$.

По методу Четаева функция Ляпунова строится в виде [1]

$$V(x) = \sum_{s=1}^{m} \lambda_s V_s(x) + \sum_{r=1}^{k} \mu_r V_r^2(x), \quad 0 \leqslant k \leqslant m \tag{1.3}$$

где λ_s – постоянные ($\lambda_1 = 1$), выбираемые так, чтобы сумма $V^{(1)}$ линейных по x_i членов в правой части (1.3) тождественно равнялась нулю. Оставшиеся неопределенными постоянные λ_s, а также постоянные μ_r подбираются такими, чтобы квадратичная форма $V^{(2)}$ в правой части (1.3), принимающей вид

$$V(x) = V^{(2)}(x) + V_*(x) \tag{1.4}$$

где функция $V_*(x)$ имеет порядок малости более высокий, чем 2, была знакоопределенной. Тогда в области достаточно малых по абсолютным величинам значений x_i будет знакоопределенной и функция V, причем $\dot{V} \equiv 0$, и согласно теореме Ляпунова об устойчивости невозмущенное движение $x = 0$ будет устойчивым.

Полученные таким способом достаточные условия устойчивости в ряде случаев оказываются совпадающими (с точностью до знака равенства) с необходимыми условиями. Интересно, что для получения таких условий иногда достаточно использовать лишь часть известных первых интегралов [6].

Замечания. 1°. Может оказаться, что функция $V^{(2)}$ является только знакопостоянной, функция $V^{(3)} \equiv 0$, а $V^{(2)} + V^{(4)}$ – знакоопределенная функция.

2°. Метод Четаева применим и в случае, когда $\dot{V}_1 \leq 0$; такой случай представляется, в частности, при действии на систему диссипативных сил.

3°. Метод Четаева имеет тесную связь [7] с теоремой Рауса–Ляпунова [5]. Доказано [8], что при достаточно общих предположениях условия устойчивости, получаемые по методу Четаева, совпадают с условиями, получаемыми по теореме Рауса–Ляпунова.

Пример 1. Рассмотрим задачу об устойчивости вращения вокруг вертикали волчка Лагранжа, на примере решения которой Четаев [1] предложил свой метод, записав уравнения Эйлера–Пуассона в переменных ω_i, γ_i (i = 1, 2, 3), где ω_i – проекции угловой скорости, γ_i – косинусы углов с вертикалью главных осей инерции. Для разнообразия и сравнения с примером 2 мы используем переменные $m_i = J_i\omega_i$ и γ_i (i = 1, 2, 3), $J_i > 0$ ($J_1 = J_2$). Известные первые интегралы уравнений Эйлера–Пуассона

$$H(\mathbf{m},\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2}\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\omega} + \mathrm{M}gl\gamma_3 = \mathrm{const}, \quad \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\gamma} = \mathrm{const}, \quad \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad m_3 = m = const$$

для решения $m_1 = m_2 = 0$, $m_3 = m$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$ принимают в возмущенном движении вид

$$V_1 = 2(H - m^2/(2J_3) - \mathrm{M}gl) = \mathrm{const}, \quad V_2 = (\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m) = \mathrm{const}$$

$$V_3 = \boldsymbol{\gamma}^2 - 1 = 0, \qquad V_4 = m_3 - m = \mathrm{const}$$

Полагая для возмущенного движения $m_3 = m + x$, $\gamma_3 = 1 + y$ и сохраняя обозначения для остальных переменных, построим функцию Ляпунова вида (1.3)

$$V = V_1 + 2\lambda V_2 - (\mathrm{M}gl + \lambda m)V_3 - 2\left(\lambda + \frac{m}{J_3}\right)V_4 + \frac{J_3 - J_1}{J_1 J_3}V_4^2 = \frac{1}{J_1}(m_1^2 + m_2^2 + x^2) +$$

$$+\ 2\lambda(m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + xy) - (\mathrm{M}gl + \lambda m)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + y^2) \tag{1.5}$$

представляющую собою сумму трех однотипных квадратичных форм от двух переменных каждая. Для их определенной положительности необходимо и достаточно выбрать λ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\lambda^2 + \frac{1}{J_1}m\lambda + \frac{1}{J_1}\mathrm{M}gl < 0 \tag{1.6}$$

Последнее неравенство возможно, если полином имеет два различных вещественных корня, т.е. если

$$m^2 > 4J_1\mathrm{M}gl \tag{1.7}$$

Неравенство (1.7) является достаточным условием устойчивости невозмущенного движения по отношению к переменным ω_i, γ_i (i = 1, 2, 3). Но это движение всегда устойчиво по отношению к m_3 в силу существования интеграла m_3 = const, и оно будет устойчиво также по отношению к γ_3, если оно устойчиво по отношению к γ_i (i = 1, 2). Поэтому вместо (1.5) можно рассмотреть функцию $V = V_1 + 2\lambda V_2$, полагая в ней $m_3 = m$ и заменяя γ_3 с помощью интеграла V_3 = 0, т.е.

$$\gamma_3 = 1 - \tfrac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - \tfrac{1}{8}(\gamma_1^4 + \gamma_2^4) + \ldots$$

Тогда квадратичная часть функции

$$V = V_1 + 2\lambda V_2 = \frac{1}{J_1}(m_1^2 + m_2^2) + 2\lambda(m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2) - (\mathrm{M}gl + \lambda m)[\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \tfrac{1}{4}(\gamma_1^4 + \gamma_2^4) + \ldots] \tag{1.8}$$

будет определенно-положительной по m_i, γ_i (i = 1, 2) при условии (1.7).

В предельном случае

$$m^2 = 4J_1\mathrm{M}g\,l \tag{1.9}$$

когда $\lambda = -m/(2J_1)$, функция (1.8), принимая вид

$$V = \frac{1}{J_1}[(m_1 - \sqrt{J_1 \mathrm{Mg}l}\,\gamma_1)^2 + (m_2 - \sqrt{J_1 \mathrm{Mg}l}\,\gamma_2)^2 + \tfrac{1}{4}\mathrm{Mg}l(\gamma_1^4 + \gamma_2^4) + \ldots$$

является определенно-положительной, что доказывает достаточность и условия (1.9) для устойчивости вертикального вращения волчка Лагранжа [1].

Неустойчивость вращения по отношению к m_i, γ_i $(i = 1, 2)$ при

$$m^2 < 4J_1 \mathrm{Mg}\, l \tag{1.10}$$

доказывается рассмотрением функции $W = m_1\gamma_2 - m_2\gamma_1$ и ее производной во времени

$$\dot{W} = \mathrm{Mg}l(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - \frac{m}{J_1}(m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2) + \frac{1}{J_1}(m_1^2 + m_2^2)[1 - \tfrac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - \tfrac{1}{8}(\gamma_1^4 + \gamma_2^4) + \ldots]$$

в силу уравнений движения при $m_3 = m$, удовлетворяющих всем условиям теоремы Четаева о неустойчивости [1].

2. Алгоритм исследований устойчивости метода энергии Казимира состоит из следующих шагов [2].

A) В фазовом пространстве P переменных $x \in \mathbb{R}^n$ уравнения движения вида (1.1) пусть имеют первый интеграл $H(x) = \mathrm{const}$, обычно представляющий полную энергию. Часто P есть пространство Пуассона, т.е. линейное пространство, допускающее операцию скобки Пуассона $\{,\}$ для вещественных функций на P. Уравнения (1.1) тогда выражаются в гамильтоновой форме $\dot{F} = \{F, H\}$, где $H(x)$ – гамильтониан, $\dot{F}$ – производная по времени от функции $F(x)$.

B) Для уравнений (1.1) разыскивается достаточно большое семейство постоянных движения, т.е. коллекция $C(x)$, такая, что $dC(x)/dt = 0$ для любого гладкого решения уравнений (1.1). Хороший путь для этого – использование гамильтонова формализма для нахождения функций Казимира, т.е. функций $C(x)$, пуассоново коммутирующих с любой функцией G, определенной на фазовом пространстве гамильтоновой системы: $\{C, G\} = 0$. Можно найти также дополнительные функции, связанные с симметриями данного гамильтониана.

C) Пусть x_e – точка равновесия системы (1.1), т.е. $X(x_e) = 0$, устойчивость которой нас интересует. Находим все функции Казимира C со свойствами, что функция $H_c = H + C$ имеет критическую точку в x_e:

$$\delta H_c(x_e) = 0 \tag{2.1}$$

Д) Вычисление второй вариации $\delta^2 H_c(x_e)$ и требование ее знакоопределенности для некоторой функции Казимира, удовлетворяющей шагу C), приводит к заключению об устойчивости решения x_e согласно теореме Ляпунова об устойчивости в силу сохранения H_c.

Сравнение метода Четаева с методом энергии–Казимира показывает, что последний является усложненным вариантом первого. Действительно, роль функции Ляпунова в методе энергии–Казимира играет функция $V = H_c(x) - H_c(x_e)$, т.е. функция, построенная из постоянных движений, первая вариация которой $\delta H_c = 0$, а $\delta^2 H_c$ – знакоопределенна. Но если в методе Четаева равенство $V^{(1)} = 0$ служит для определения постоянных λ_s, то в методе энергии–Казимира равенство (2.1) служит для определения значений функций Казимира при $x = x_e$, по которым можно было бы построить сами функции Казимира, а эта задача, очевидно, сложнее, чем определение λ_s. Соответственно установление условий знакоопределенности $\delta^2 H_c$ оказывается сложнее установления таковых для $V^{(2)}$.

Область применения метода энергии–Казимира у́же, так как он применим только к гамильтоновым системам, для которых существуют функции Казимира. В ряде важных примеров функции Казимира не найдены и могут даже не существовать [3].

Пример 2. Приведем решение [2] задачи об устойчивости волчка Лагранжа методом энергии – Казимира.

Уравнения Эйлера–Пуассона являются гамильтоновыми с функцией Гамильтона $H(\mathbf{m}, \gamma) = {}^1\!/_2\, \mathbf{m} \cdot \omega + \mathrm{Mg}\, l\gamma_3$ в структуре Ли–Пуассона $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ со скобкой Пуассона

$$\{F,G\}(\mathbf{m},\gamma) = -\mathbf{m}(\nabla_m F \times \nabla_\gamma G) - \gamma(\nabla_m F \times \nabla_\gamma G + \nabla_\gamma F \times \nabla_m G) \tag{2.2}$$

Для любой гладкой функции Φ сохраняющаяся величина $C(\mathbf{m}, \gamma) = \Phi(\mathbf{m} \cdot \gamma, |\gamma|^2)$ является функцией Казимира в пуассоновой структуре (2.2).

Первая вариация функции $H_c = H + \Phi(\mathbf{m} \cdot \gamma, |\gamma^2|) + \phi(m_3)$, где $\phi(m_3)$ – гладкая функция, равна

$$\delta H_c = (\omega + \dot\Phi\gamma)\cdot\delta\mathbf{m} + (\mathrm{Mg}\, l\chi + \dot\Phi\mathbf{m} + 2\Phi'\gamma)\cdot\delta\gamma + \phi'\delta m_3$$

Точка и штрих означают дифференцирование соответственно по первому и второму аргументам функции $\Phi(\mathbf{m} \cdot \gamma, |\gamma|^2)$.

Из уравнения (2.1) для решения $\mathbf{m}_e = (0, 0, m)$, $\gamma_e = (0, 0, 1)$ получаем равенства

$$\omega_3 + \dot\Phi(m,1) + \phi' = 0, \quad \mathrm{Mg}\, l + \dot\Phi(m,1)m + 2\Phi'(m,1) = 0, \quad (\omega_3 = m/J_3)$$

откуда находим (исправляя опечатки в (3.202) [2]) условия

$$\dot\Phi(m,1) = -\left(\frac{m}{J_3} + \phi'(m)\right), \qquad 2\Phi'(m,1) = \left(\frac{m}{J_3} + \phi'(m)\right)m - \mathrm{Mg}\, l \tag{2.3}$$

связывающие Φ, ϕ и равновесие $\mathbf{m}_e$, γ_e.

Принимая обозначения

$$a = \phi''(m), \quad b = 4\Phi''(m,1), \quad c = \ddot\Phi(m,1), \quad d = 2\dot\Phi'(m,1) \tag{2.4}$$

вторую вариацию можно представить в виде суммы трех квадратичных форм от двух вариаций каждая

$$\delta^2 H_c = \frac{1}{J_1}(\delta m_1^2 + \delta m_2^2) + 2\dot\Phi(m,1)(\delta m_1\delta\gamma_1 + \delta m_2\delta\gamma_2) + 2\Phi'(m,1)(\delta\gamma_1^2 + \delta\gamma_2^2) +$$

$$+\left(\frac{1}{J_3} + a + c\right)\delta m_3^2 + 2(\dot\Phi(m,1) + 2mc + d)\delta m_3\delta\gamma_3 + (2\Phi'(m,1) + b + m^2c + 2md)\delta\gamma_3^2 \tag{2.5}$$

которые будут определенно положительными, если и только если

$$\frac{2}{J_1}\Phi'(m,1) - \dot\Phi^2(m,1) > 0, \qquad \frac{1}{J_3} + a + c > 0$$

$$\left(\frac{1}{J_3} + a + c\right)(2\Phi'(m,1) + b + m^2c + 2md) - (\dot\Phi(m,1) + 2mc + d)^2 > 0 \tag{2.6}$$

Последние два неравенства всегда будут выполняться, если выбрать надлежащим образом числа (2.4), а первое при учете (2.3) принимает вид (исправляем опечатку в (3.2, Д5) [2])

$$1/J_1(me - \mathrm{Mg}\, l) - e^2 > 0 \tag{2.7}$$

где $e = m/J_3 + \phi'(m)$ выбором $\phi'(m)$ может иметь любую величину. Для выполнения условия (2.7) необходимо и достаточно условие (1.7)

Сравнивая квадратичную форму (1.5) и условие (1.6) ее определенной положительности с $\delta^2 H_c$ и условиями (2.6), убеждаемся, что последние сложнее первых.

3. Метод энергии–момента [3] тесно связан с методом редукции симплектических многообразий динамических систем с симметриями.

Рассмотрим динамическую систему с функцией Гамильтона $H(q, p)$. Пусть P – данное фазовое пространство системы. Предположим, что существует группа G симметрии канонических преобразований P в себя, зависящая от нескольких параметров. Группа G определяет несколько первых интегралов, образующих векторнозначную сохраняющуюся величину $\mathbf{J}(q, p)$, называемую отображением момента.

Рассматривается множество всех точек фазового пространства P, в которых $\mathbf{J}(q, p)$ имеет данную величину $\boldsymbol{\mu}$. Такие совместные многообразия уровня интегралов в фазовом пространстве будут инвариантными многообразиями фазового потока, на которых действует подгруппа группы симметрий, оставляющая инвариантные многообразия на месте. Фактор-многообразие инвариантного многообразия по этой подгруппе называется приведенным фазовым пространством P_μ.

Приведенное фазовое пространство P_μ наследует симплектическую структуру исходного пространства P, так что P_μ можно трактовать как новое фазовое пространство. Динамические траектории гамильтониана H на P определяют соответствующие траектории на приведенном пространстве P_μ. Такая новая динамическая система называется приведенной системой. Неподвижные точки приведенной системы на P_μ называются относительными равновесиями (или, точнее, стационарными вращениями) исходной системы. В общем, чем шире группа симметрий G, тем богаче набор относительных равновесий.

Относительные равновесия q_e, p_e представляются стационарными точками измененного гамильтониана

$$H_\xi(q, p) = H(q, p) - \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{J}(q, p) \tag{3.1}$$

определяемыми уравнением

$$\delta H_\xi(q, p) = 0 \tag{3.2}$$

где $\boldsymbol{\xi}$ может трактоваться как множитель Лагранжа.

Для установления устойчивости относительных равновесий q_e, p_e вычисляется вторая вариация $\delta^2 H_\xi$ и выясняются условия ее знакоопределенности, которые и будут достаточными условиями устойчивости.

При вычислении второй вариации измененного гамильтониана предлагается использовать только такие вариации q и p, которые удовлетворяют линеаризованным уравнениям связи $\mathbf{J} = \mathbf{const}$, т.е. $(\delta q, \delta p) \in \ker[D\mathbf{J}(q_e, p_e)]$, и не должны лежать на направлениях симметрии. Они определяют пространство ν допустимых вариаций. Показано также, что если пространство ν можно расщепить на два специально выбранных подпространства ν_{TB} и ν_{BH}, то матрица $\delta^2 H_\xi$ блок – диагонализируется, т.е. $\delta^2 H_\xi$ и симплектическая структура могут быть приведены к нормальной форме одновременно [3].

Очевидно, с математической точки зрения равенство (3.2) означает разыскание экстремума функции $H(q, p)$ при данной величине интегралов $\mathbf{J}(q, p) = \boldsymbol{\mu}$, а условия знакоопределенности $\delta^2 H_\xi$ – что экстремум будет минимумом или максимумом. Следовательно, метод энергии-момента представляет собою, по сути, метод Рауса – Ляпунова, изложенный современным геометрическим языком.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16 242) и Международного научного фонда (MAK – 000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
2. *Holm D.D., Marsden J.E., Ratiu T.S., Weinstein A.* Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria // Phys. Rep. 1985. V. 123. № 1–2. 116 p.
3. *Marsden J.E.* Lectures on Mechanics. Cambridge: Univ. Press, 1992. 272 p.
4. *Routh E.J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London: MacMillian, 1884. 343 p.
5. *Ляпунов А.М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 1. С. 276–319.
6. *Румянцев В.В.* Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С.В. Ковалевской // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 4. С. 457–458.
7. *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.
8. *Рубановский В.Н., Степанов С.Я.* О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнений движения // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 904–912.

Москва

Поступила в редакцию
7.IV.1995