

УДК 531.38

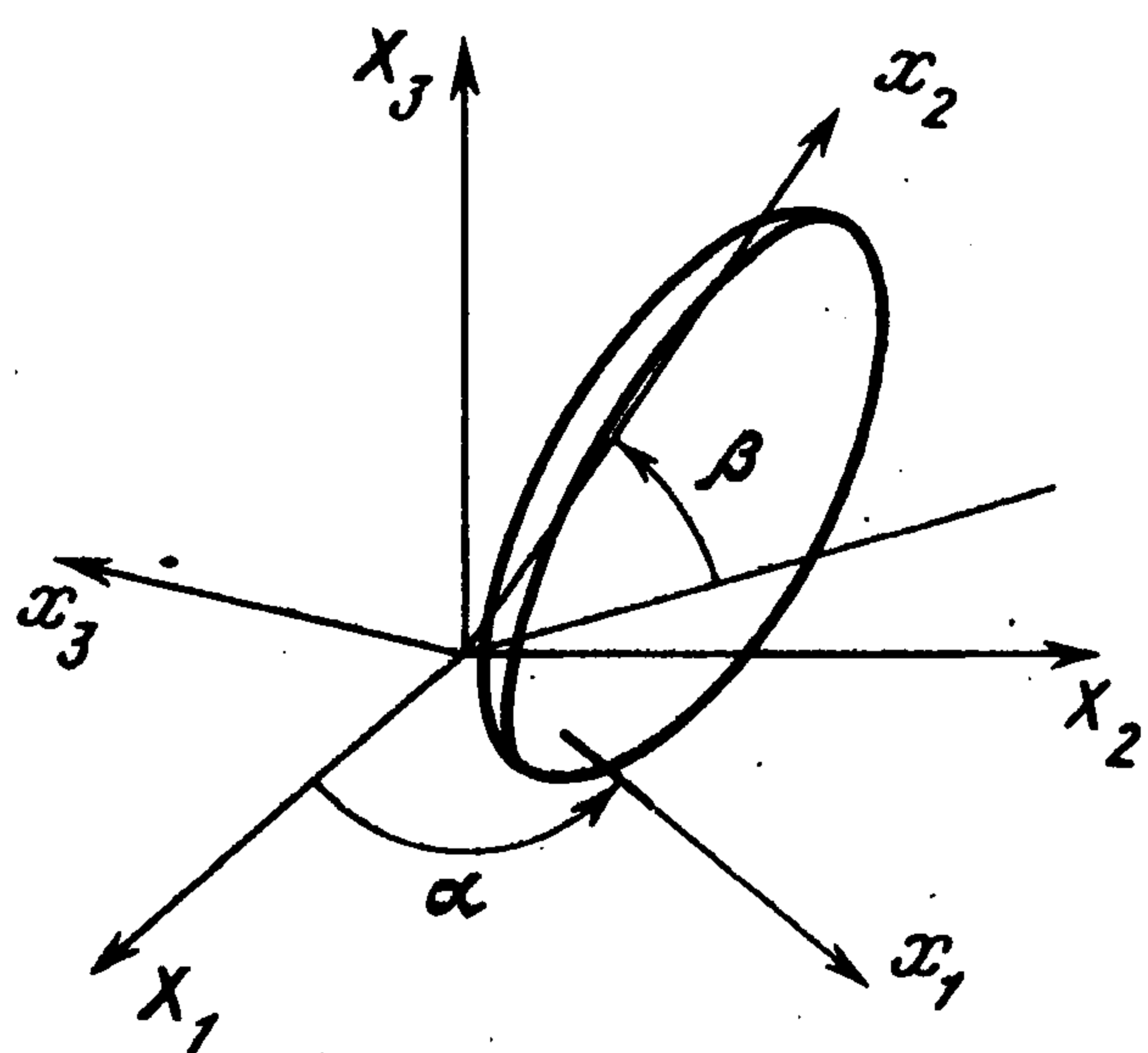
© 1995 г. Н.Н. Болотник

ДВИЖЕНИЕ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ДВУХСТЕПЕННОМ ШАРНИРЕ В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

Качественно исследуется движение абсолютно твердого тела, связанного с неподвижным основанием посредством двухстепенного шарнира, в однородном поле тяжести, действующем параллельно неподвижной оси шарнира. Описываются и анализируются различные типы движения, зависящие от значений полной механической энергии и проекции кинетического момента тела на неподвижную ось шарнира, а также от инерционных параметров системы.

Работа продолжает исследования, начатые в [1].

1. Уравнения движения. Рассматривается абсолютно твердое тело, связанное с неподвижным основанием посредством двухстепенного шарнира со взаимно перпендикулярными осями (фиг. 1). Шарнир считается идеальным, т.е. трение в его осях не



Фиг. 1

учитывается. Для описания движения введем две правые декартовы системы координат: неподвижную (инерциальную) систему $X_1X_2X_3$ и систему $x_1x_2x_3$, жестко связанную с твердым телом. Полюсы обеих систем координат поместим в точке O пересечения осей шарнира, оси X_3 и x_1 направим вдоль неподвижной и подвижной осей шарнира соответственно. Все кинематически возможные положения твердого тела (системы координат $x_1x_2x_3$) относительно системы координат $X_1X_2X_3$ можно описать при помощи двух углов: угла α между осями X_1 и x_1 и угла β между осью x_2 и плоскостью X_1X_2 . Эти углы в дальнейшем принимаются за обобщенные координаты рассматриваемой механической системы.

Матрица Γ перехода от системы координат $X_1X_2X_3$ к системе координат $x_1x_2x_3$ выражается через α и β следующим образом [1]:

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

Кинетическая энергия абсолютно твердого тела, закрепленного на двухстепенном подвесе, равна [1]

$$T = \frac{1}{2}K(\beta)\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}J_{11}\dot{\beta}^2 - b(\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} \quad (1.2)$$

$$K(\beta) = J_{22} \sin^2 \beta + J_{33} \cos^2 \beta - 2J_{23} \sin \beta \cos \beta, \quad b(\beta) = J_{12} \sin \beta + J_{13} \cos \beta$$

Здесь J_{ii} ($i = 1, 2, 3$) – осевые моменты инерции, а $J_{ij} = J_{ji}$ ($i \neq j, i, j = 1, 2, 3$) – центробежные моменты инерции твердого тела в системе координат $x_1x_2x_3$. В дальнейшем предполагается, что эллипсоид инерции твердого тела невырожденный и соответствующий тензор инерции $J = \|J_{ij}\|$ – положительно-определенный.

Пусть описанная механическая система находится в однородном гравитационном поле, вектор напряженности которого g . В этом случае потенциальная энергия твердого тела выражается скалярным произведением

$$U = -m(g, r_c) \quad (1.3)$$

где r_c – радиус-вектор центра масс тела относительно точки O , а m – масса тела.

Обозначим через g_1, g_2, g_3 компоненты вектора g в неподвижной системе координат $X_1X_2X_3$, а через ρ_1, ρ_2, ρ_3 – компоненты вектора r_c в подвижной системе координат $x_1x_2x_3$. Спроектировав вектор g на оси системы координат $x_1x_2x_3$, используя матрицу (1.1), и раскрыв скалярное произведение (1.3), получим

$$U = -m[\rho_1(g_1 \cos \alpha + g_2 \sin \alpha) + \rho_2(-g_1 \sin \alpha \cos \beta + g_2 \cos \alpha \cos \beta + g_3 \sin \beta) + \rho_3(g_1 \sin \alpha \sin \beta - g_2 \cos \alpha \sin \beta + g_3 \cos \beta)] \quad (1.4)$$

Уравнения Лагранжа механической системы с кинетической энергией (1.2) и потенциальной энергией (1.4) имеют вид

$$K(\beta) \ddot{\alpha} - b(\beta) \ddot{\beta} + [(J_{22} - J_{33}) \sin 2\beta - 2J_{23} \cos 2\beta] \dot{\alpha} \dot{\beta} - (J_{12} \cos \beta - J_{13} \sin \beta) \dot{\beta}^2 = \quad (1.5)$$

$$= m[\rho_1(-g_1 \sin \alpha + g_2 \cos \alpha) + (\rho_3 \sin \beta - \rho_2 \cos \beta)(g_1 \cos \alpha + g_2 \sin \alpha)]$$

$$-b(\beta) \ddot{\beta} + J_{11} \ddot{\beta} - \frac{1}{2}[(J_{22} - J_{33}) \sin 2\beta - 2J_{23} \cos 2\beta] \dot{\alpha}^2 =$$

$$= m[\rho_2(g_1 \sin \alpha \sin \beta - g_2 \cos \alpha \sin \beta + g_3 \cos \beta) + \rho_3(g_1 \sin \alpha \cos \beta - g_2 \cos \alpha \cos \beta - g_3 \sin \beta)]$$

Абсолютно твердое тело, закрепленное на идеальном двухстепенном шарнире и находящееся в однородном гравитационном поле, – консервативная механическая система и, следовательно, полная механическая энергия $E = T + U$ есть первый интеграл уравнений движения (1.5).

Уравнения движения (1.5) представляют собой систему четвертого порядка нелинейных дифференциальных уравнений, которые содержат большое число параметров, что делает практически невозможным исследование системы в общем случае. Однако в ряде частных случаев, которые рассматриваются в последующих разделах, система существенно упрощается и допускает эффективный качественный анализ.

2. Случай гравитационного поля, направленного вдоль неподвижной оси шарнира. Если гравитационное поле направлено вдоль неподвижной оси X_3 шарнира, то выражение (1.4) упрощается и принимает вид

$$U = mg(\rho_2 \sin \beta + \rho_3 \cos \beta) \quad (g = -g_3) \quad (2.1)$$

В дальнейшем считается, что $g > 0$. Это не ограничивает общности, поскольку если гравитационное поле действует параллельно неподвижной оси шарнира, всегда можно так ориентировать систему координат $X_1X_2X_3$, чтобы ось X_3 была направлена противоположно вектору g и, следовательно, выполнялось неравенство $g > 0$.

Потенциальная энергия (2.1) не зависит от угла α . Поскольку и кинетическая энергия (1.2) не зависит от α , при $g_1 = g_2 = 0$ обобщенная координата α – циклическая и, следовательно, величина

$$L = \partial T / \partial \dot{\alpha} = K(\beta) \dot{\alpha} - b(\beta) \dot{\beta} \quad (2.2)$$

есть первый интеграл рассматриваемой системы. Величина L – проекция кинетического момента на неподвижную ось X_3 .

Наличие двух первых интегралов, $E = T + U$ и L , позволяет разделить переменные α и β и свести интегрирование системы (1.5) к квадратурам. Выражая $\dot{\alpha}$ через β и $\dot{\beta}$, используя (2.2), имеем

$$\dot{\alpha} = [L + b(\beta) \dot{\beta}] / K(\beta) \quad (2.3)$$

После подстановки (2.3) в (1.2) интеграл энергии представляется в следующем виде:

$$\frac{1}{2}a(\beta) \dot{\beta}^2 + \Pi(\beta, L) = E, \quad a(\beta) = [J_{11}K(\beta) - b^2(\beta)] / K(\beta) \quad (2.4)$$

$$\Pi(\beta, L) = L^2 / (2K(\beta)) + mg(\rho_2 \sin \beta + \rho_3 \cos \beta)$$

Отметим, что величины $K(\beta)$ и $a(\beta)$, входящие в (2.3) и (2.4), положительны. Это вытекает из положительной определенности тензора инерции твердого тела [1].

Уравнение (2.4) описывает изменение угла β и сводится к квадратуре

$$I(\beta_0, \beta) = \pm(t - t_0), \quad I(x, y) = \int_x^y \left\{ \frac{a(\xi)}{2[E - \Pi(\xi, L)]} \right\}^{1/2} d\xi \quad (2.5)$$

где $\beta_0 = \beta(t_0)$, а t_0 – некоторый момент времени, принятый за начальный. Знак в правой части (2.5) совпадает со знаком $\dot{\beta}$ при $\dot{\beta} \neq 0$ или со знаком $-\partial\Pi/\partial\beta$ при $\dot{\beta} = 0$, $\partial\Pi/\partial\beta \neq 0$. Если $\dot{\beta} = 0$ и $\partial\Pi/\partial\beta = 0$, то система находится в стационарном состоянии по координате β .

Квадратура (2.5) в неявной форме задает зависимость $\beta = \beta(t)$. Подставив эту зависимость в (2.3), можно затем интегрированием правой части (2.3) по t найти $\alpha = \alpha(t)$.

Исследуем качественно возможные типы движения системы (2.3), (2.4). Изучим сначала движение по переменной β , которое описывается уравнением (2.4). Это уравнение формально совпадает с уравнением движения механической системы с одной степенью свободы, кинетическая и потенциальная энергии которой $-a(\beta) \dot{\beta}^2/2$ и $\Pi(\beta, L)$ соответственно. Наиболее удобным и наглядным методом исследования таких систем служит метод фазовой плоскости, заключающийся в построении по уравнению (2.4) графиков зависимости $\dot{\beta}(\beta)$ для различных значений E и определений по этим графикам характерных особенностей движения, которые зависят от вида функции $\Pi(\beta, L)$.

3. Движение по углу β при $g_1 = g_2 = 0$. Частные случаи.

3.1. $\rho_2 = \rho_3 = 0$. Это означает, что центр масс твердого тела лежит на подвижной оси x_1 шарнира. В этом случае действие силы тяжести никак не сказывается на движении системы и ее поведение не отличается от изученного в [1] движения твердого тела на двухстепенном подвесе по инерции.

3.2. $J_{22} = J_{33}$, $J_{23} = 0$. В этом случае $K(\beta) = J_{22} = \text{const}$ и функция $\Pi(\beta, L)$ представляет собой 2π -периодическую синусоиду $mg(\rho_2 \sin \beta + \rho_3 \cos \beta)$, сдвинутую по оси ординат на величину $\Lambda = L^2/(2J_{22})$. На промежутке $[0, 2\pi)$ эта функция имеет два экстремума: максимум $\Pi_{\text{max}} = \Lambda + \mu$ ($\mu = mg(\rho_2^2 + \rho_3^2)^{1/2}$), который достигается в точке

$$\beta = \beta_1 = \begin{cases} \beta_*, & \text{если } \rho_2 \geq 0 \\ 2\pi - \beta_*, & \text{если } \rho_2 < 0 \end{cases}, \quad \beta_* = \arccos \frac{\rho_3}{(\rho_2^2 + \rho_3^2)^{1/2}} \quad (3.1)$$

и минимум $\Pi_{\text{min}} = \Lambda - \mu$, который достигается в точке

$$\beta = \beta_2 = \begin{cases} \beta_* + \pi, & \text{если } \rho_2 \geq 0 \\ \pi - \beta_*, & \text{если } \rho_2 < 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Фазовая плоскость системы (2.4) в рассматриваемом случае качественно совпадает с фазовой плоскостью математического или физического маятника. Тот факт, что "момент инерции" маятника $a(\beta)$ зависит от β , для качественного анализа несуществен.

Отсюда вытекают следующие возможности движения по углу β .

1) Если $E < \Pi_{\min}$, то движение невозможно.

2) Если $\Pi_{\min} < E < \Pi_{\max}$, то система совершает периодические колебания относительно устойчивого стационарного положения $\beta = \beta_2$, отвечающего минимуму функции $\Pi(\beta, L)$. Угол β при этом изменяется в промежутке $\beta_- \leq \beta \leq \beta_+$, где

$$\beta_{\pm} = \beta_2 \pm A, \quad A = \arccos\{[L^2 / (2J_{22}) - E] / [mg(\rho_2^2 + \rho_3^2)^{1/2}]\} \quad (3.3)$$

Амплитуда и период этих колебаний равны соответственно A и

$$\tau_0 = 2I(\beta_-, \beta_+) \quad (3.4)$$

Формула (3.3) получается из решения уравнения $\Lambda + mg(\rho_2 \sin \beta + \rho_3 \cos \beta) = E$.

3) Если $E > \Pi_{\max}$, то система совершает периодическое вращение с периодом

$$\tau_r = I(0, 2\pi) \quad (3.5)$$

4) Если $E = \Pi_{\min}$, то система находится в устойчивом положении равновесия $\beta = \beta_2$.

5) Если $E = \Pi_{\max}$, то система либо находится в неустойчивом положении равновесия $\beta = \beta_1$, либо тело совершает вращательное движение вокруг оси x_1 подвижного шарнира с бесконечным периодом. На фазовой плоскости это отвечает движению по сепаратрисе.

4. Движение по углу β при $g_1 = g_2 = 0$. Общий случай. В общем случае функция $\Pi(\beta, L)$ из (2.4) представляется в виде (см. также [1])

$$\Pi(\beta, L) = L^2 / [J_{22} + J_{33} + R \cos(2\beta + \nu_1)] + \mu \cos(\beta + \nu_2) \quad (4.1)$$

$$R = [(J_{33} - J_{22})^2 + 4J_{23}^2]^{1/2}$$

$$\cos \nu_1 = (J_{33} - J_{22}) / R, \quad \sin \nu_1 = 2J_{23} / R$$

$$\cos \nu_2 = mg\rho_3 / \mu, \quad \sin \nu_2 = -mg\rho_2 / \mu$$

Для анализа функции (4.1) ее удобно переписать следующим образом:

$$\Pi(\beta, L) = \mu f(x), \quad f(x) = \varepsilon / (1 + \lambda \cos 2x) + \cos(x + \nu) \quad (4.2)$$

$$\varepsilon = L^2 / [\mu(J_{22} + J_{33})], \quad \lambda = R / (J_{22} + J_{33})$$

$$x = \beta + \nu_1 / 2, \quad \nu = \nu_2 - \nu_1 / 2$$

Из положительной определенности тензора инерции $J = \|J_{ij}\|$ ($i, j = 1, 2, 3$) следуют неравенства $J_{22} > 0$, $J_{22}J_{33} - J_{23}^2 > 0$, из которых вытекает оценка для параметра λ : $0 \leq \lambda < 1$. Случай $\lambda = 0$ отвечает $J_{22} = J_{33}$, $J_{23} = 0$ и был рассмотрен в разд. 3. Поэтому в разд. 4 считается, что $0 < \lambda < 1$.

Качественный характер движения системы по переменной β зависит от вида функции $\Pi(\beta, L)$. Каждая стационарная точка этой функции соответствует положению равновесия по переменной β , тип которого определяется характером стационарной точки. Минимум $\Pi(\beta, L)$ отвечает устойчивому положению равновесия типа "центр", максимум — неустойчивому положению равновесия типа "седло", а

точка перегиба – неустойчивому положению равновесия, сколь угодно малые начальные отклонения от которого вызывают конечные отклонения только в одном определенном направлении.

Из (4.2) видно, что форма зависимости функции $\Pi(\beta, L)$ от угла β определяется функцией $f(x)$, которая 2π -периодична по x и v . В дальнейшем без ограничения общности считаем, что $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

Выясним количество стационарных точек функции (4.2) в зависимости от параметров ϵ , v , λ . Дифференцируя $f(x)$, получим уравнение

$$2\epsilon\lambda \sin 2x / (1 + \lambda \cos 2x)^2 - \sin(x + v) = 0 \quad (4.3)$$

корни которого – искомые стационарные точки. Это уравнение не допускает в общем случае простого аналитического решения, выражающего все корни в виде функции от ϵ , v , λ . Поэтому выразим ϵ из (4.3) через x , λ , v :

$$\epsilon = \epsilon(x; v, \lambda) = (1 + \lambda \cos 2x)^2 \sin(x + v) / (2\lambda \sin 2x) \quad (4.4)$$

$$x \neq \pi i / 2 \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

и исследуем зависимость (4.4) как функцию переменной x при различных λ и v . Отвечающий функции (4.4) полный прообраз фиксированного значения ϵ , взятый на интервале $[0, 2\pi)$, есть множество стационарных точек функции $f(x)$ для данного ϵ , если $x = \pi i / 2$ ($i = 0, 1, 2, 3$) – не корни уравнения (4.3). Указанные значения являются корнями уравнения (4.3) только при $v = \pi i / 2$ ($i = 0, 1, 2, 3$). В этом случае соответствующие числа вида $x = \pi i / 2$ должны быть добавлены к множеству стационарных точек, найденных при помощи функции (4.4).

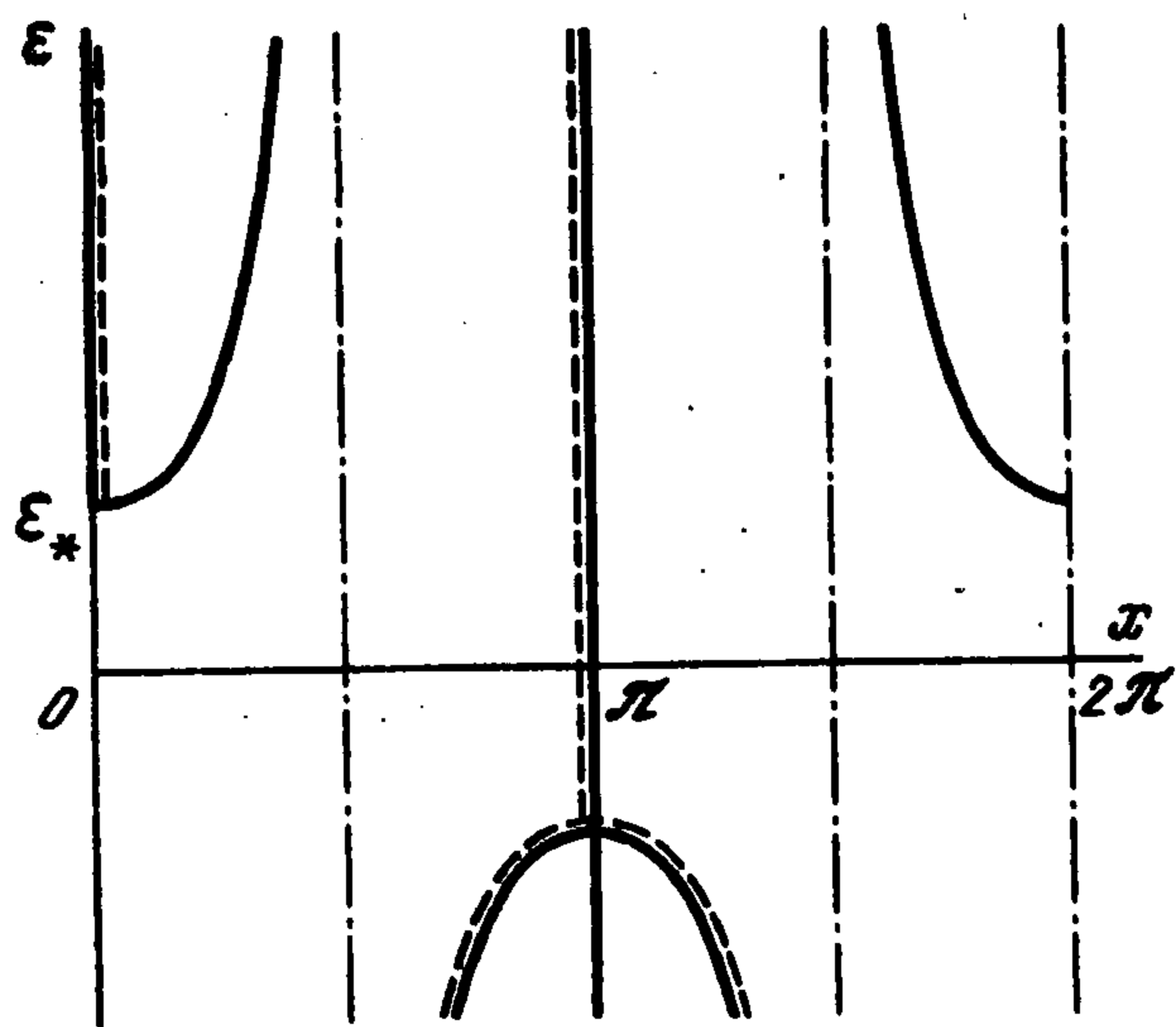
Из (4.4) следует, что $\epsilon(x; v, \lambda) = -\epsilon(x + \pi; v, \lambda)$, $\epsilon(x; v, \lambda) = -\epsilon(x; v + \pi, \lambda)$. Это свойство позволяет, не уменьшая полноты исследования, проводить вычисления не на всем множестве $0 \leq x < 2\pi$, $0 \leq v < 2\pi$, а лишь на его части: $0 \leq x < \pi$, $0 \leq v \leq \pi$.

При произвольных $v \in [0, 2\pi)$ аналитическое исследование функции (4.4) затруднительно. Ниже подробно излагаются результаты, относящиеся к частным случаям ($v = 0$ и $v = \pi/2$), допускающим такое исследование, и приводятся графики функции (4.4), построенные для ряда других значений v и λ .

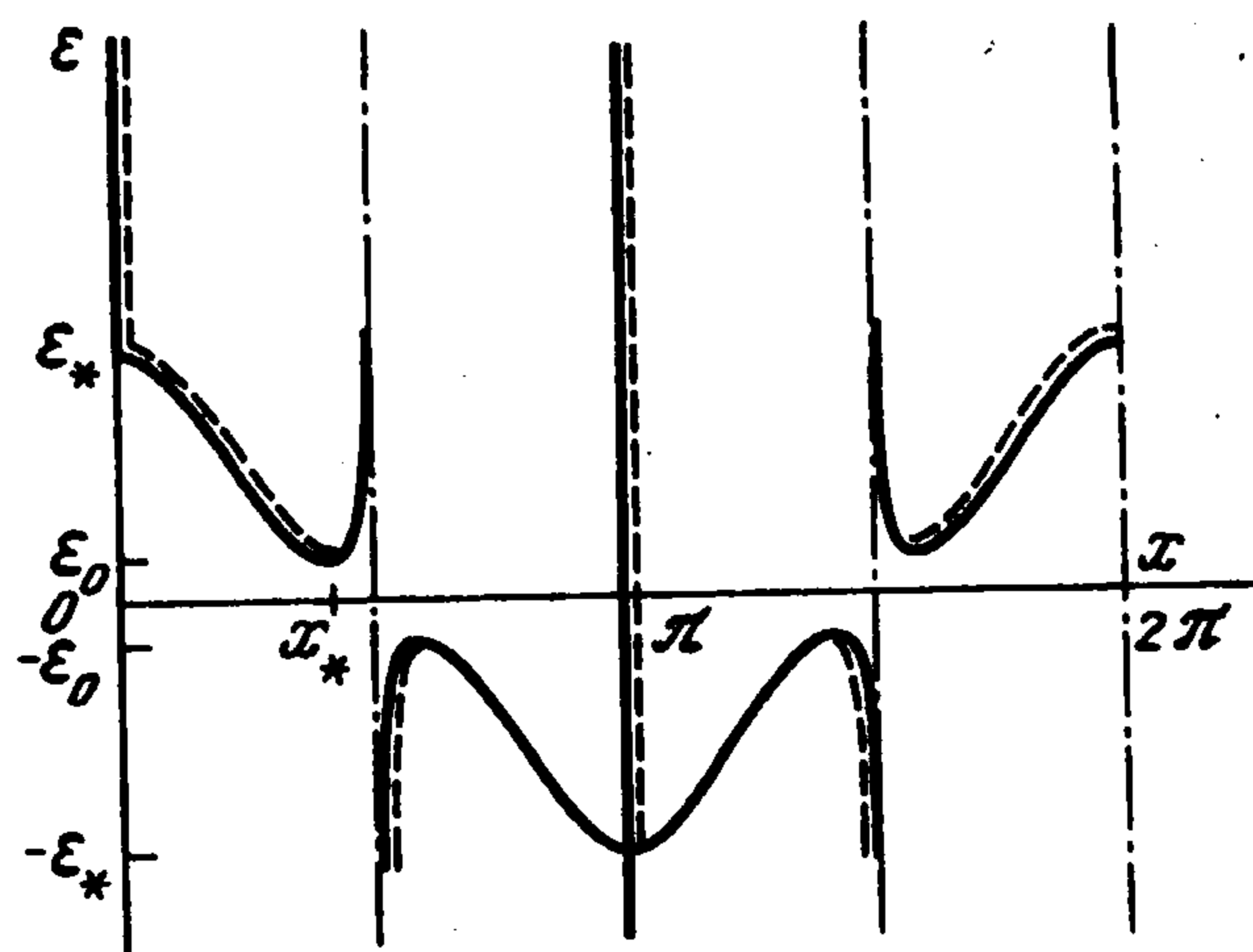
4.1. $v = 0$. В этом случае уравнение (4.3) при любом ϵ имеет корни $x = 0$ и $x = \pi$, которые не могут быть найдены при помощи функции (4.4). Анализ показывает, что точка $x = 0$ отвечает максимуму функции $f(x)$ из (4.2), если $\epsilon < \epsilon_* = (1 + \lambda)^2 / (4\lambda)$, и минимуму, если $\epsilon > \epsilon_*$. Если $\epsilon = \epsilon_*$, то $x = 0$ – точка максимума функции $f(x)$ при $\lambda \leq 1/7$ и точка минимума при $\lambda > 1/7$. Поскольку значение функции $f(x)$ изменяется на $-f(x)$ при одновременной замене x на $x + \pi$ и ϵ на $-\epsilon$, из свойств стационарной точки $x = 0$ вытекает, что при $x = \pi$ функция $f(x)$ имеет максимум, если $\epsilon < -\epsilon_*$ и минимум, если $\epsilon > -\epsilon_*$. Если $\epsilon = -\epsilon_*$, то $x = \pi$ – точка минимума функции $f(x)$ при $\lambda \leq 1/7$ и точка максимума при $\lambda > 1/7$.

На фиг. 2 и 3 сплошными жирными линиями изображены графики функции $\epsilon(x; 0, \lambda)$, качественно характеризующие поведение функции $\epsilon(x; 0, \lambda)$ при $\lambda \leq 1/7$ и $\lambda > 1/7$ соответственно, а также вертикальные прямые $x = 0$ и $x = \pi$, отвечающие стационарным точкам функции $f(x)$ из (4.2) при $v = 0$ и любом ϵ . Отметим, что при $\lambda > 1/7$ функция $\epsilon(x; 0, \lambda)$ имеет в точках $x = x_* = \arccos[(1 - \lambda)/(6\lambda)]$ и $x = 2\pi - x_*$ локальные минимумы со значением $\epsilon = \epsilon_0 = 2[2(1 - \lambda)/3]^{3/2} \lambda^{-1/2}$, а при $x = \pi \pm x_*$ – локальные максимумы со значением $\epsilon = -\epsilon_0$. Некоторые участки сплошных линий сопровождаются штриховыми. В стационарных точках, соответствующих таким участкам, функция $f(x)$ имеет минимум, а в остальных случаях при $\epsilon \neq \epsilon_0$ – максимум. В точках, отвечающих $\epsilon = \epsilon_0$ функция $f(x)$ имеет перегиб.

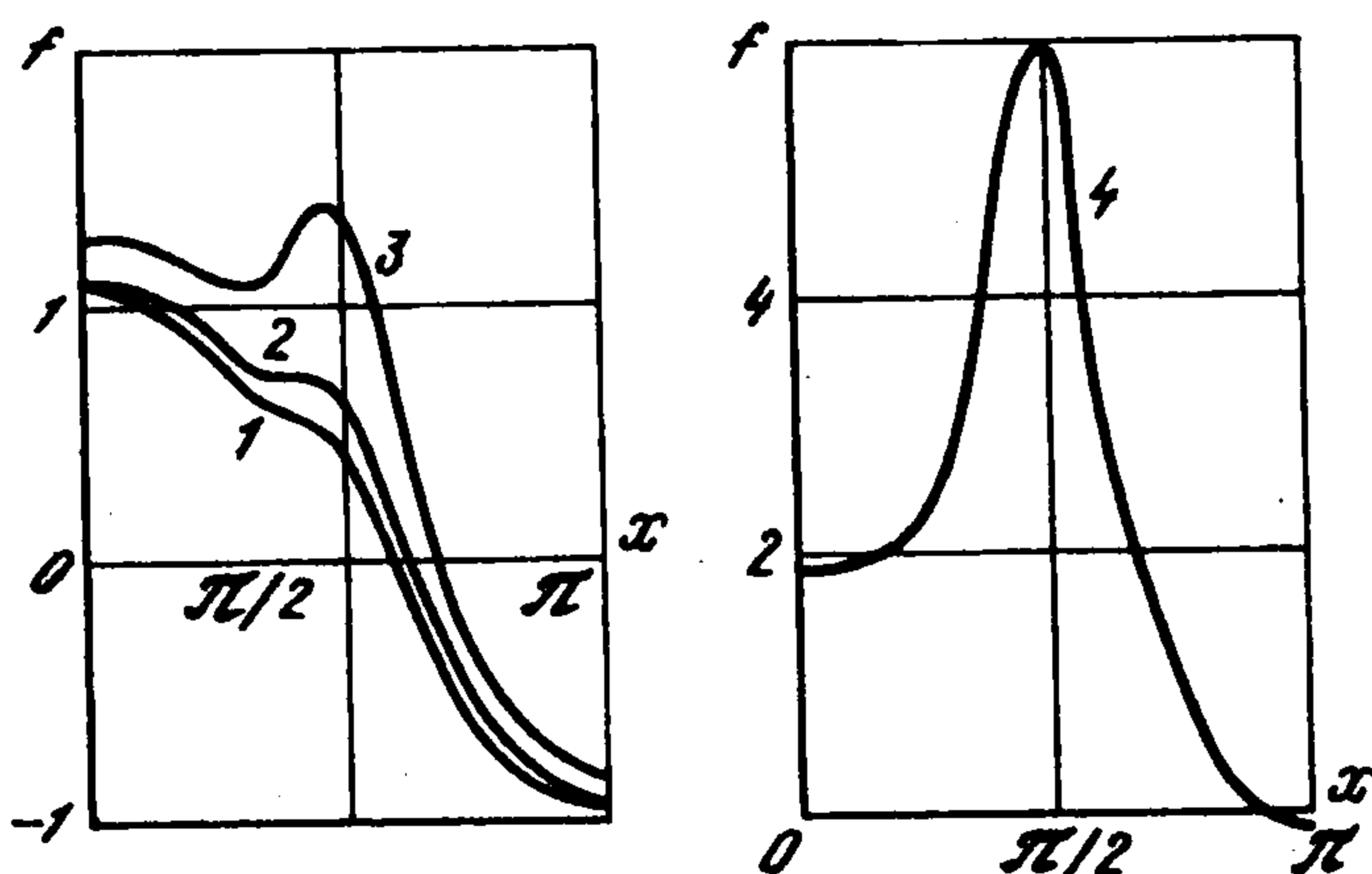
Диаграммы, аналогичные фиг. 2, 3, позволяют для заданного ϵ определить количество и тип стационарных точек функции $f(x)$ и, тем самым, количество и тип соответствующих положений равновесия рассматриваемой механической системы по координате β . Для этого надо провести прямую $\epsilon = \text{const}$. Каждая точка пересечения этой прямой со сплошными жирными линиями



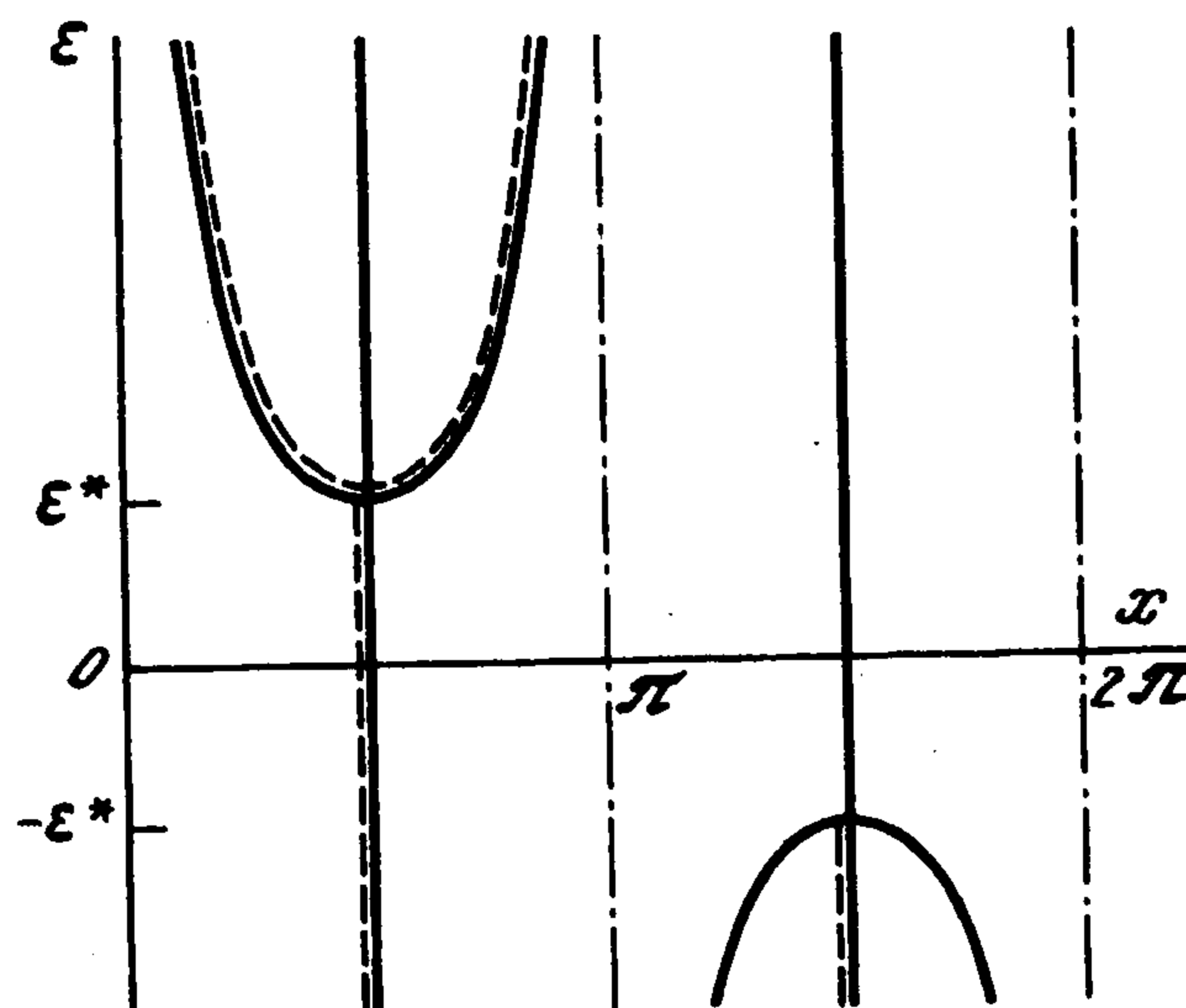
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

диаграммы отвечает стационарной точке, тип которой определяется по наличию или отсутствию штриховой линии, сопровождающей сплошную, в окрестности точки пересечения. Из этих диаграмм, в частности, следует, что число стационарных точек может равняться двум, четырем или шести, в зависимости от λ и ϵ .

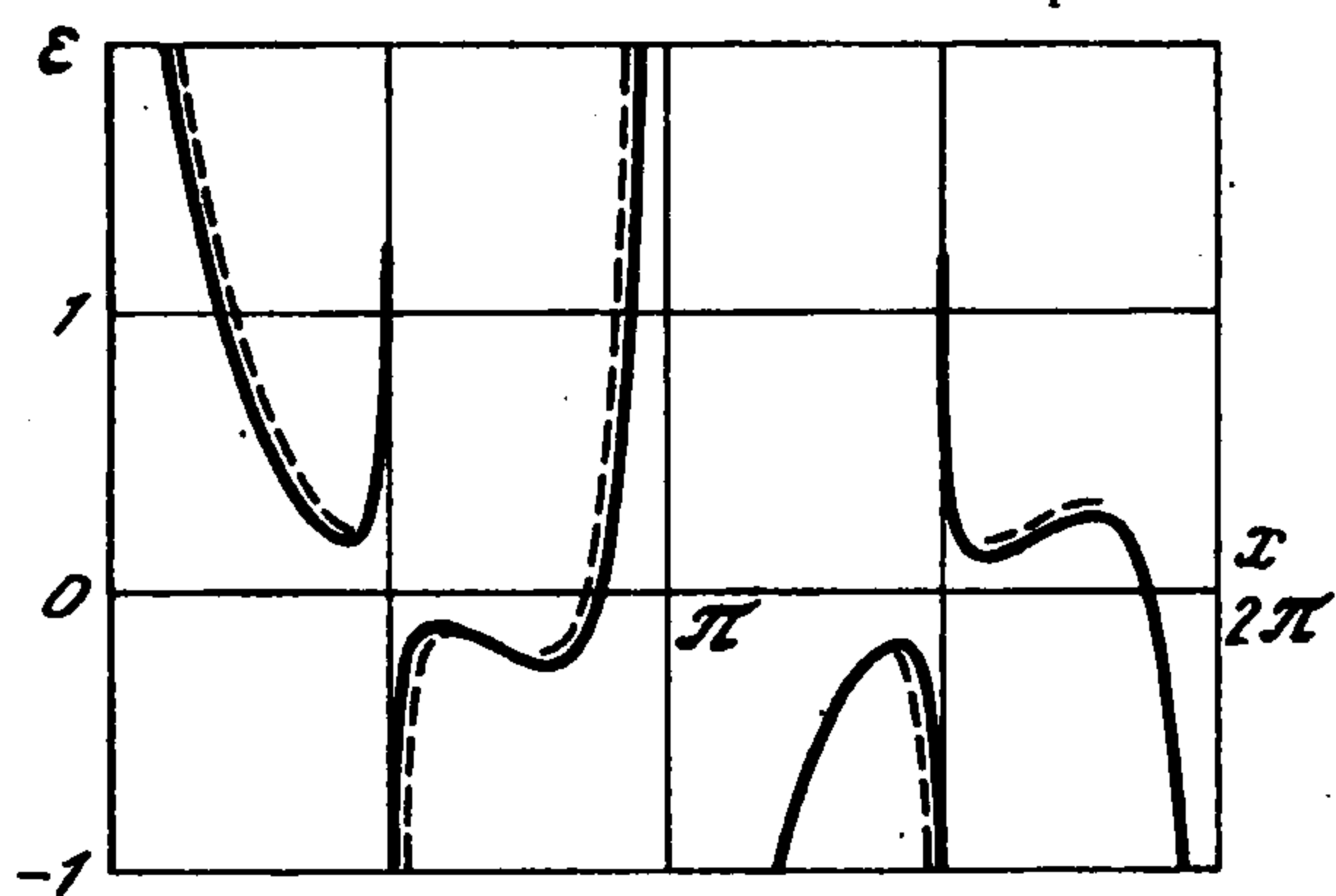
На фиг. 4 для иллюстрации даны графики функции $f(x)$ на отрезке $0 \leq x \leq \pi$ при $\nu = 0$, $\lambda = 3/4$ и различных значениях ϵ : 1 — $\epsilon = 0,1$ ($\epsilon < \epsilon_0 = \sqrt{2/9}$); 2 — $\epsilon = \epsilon_0$; 3 — $\epsilon = 1/3$ ($\epsilon_0 < \epsilon < \epsilon_* = 49/48$); 4 — $\epsilon = 1,5$ ($\epsilon > \epsilon_*$). Графики, соответствующие интервалу $\pi < x < 2\pi$ получаются зеркальным отражением кривых фиг. 4 относительно прямой $x = \pi$.

4.2. $\nu = \pi/2$. В этом случае уравнение (4.3) при любом ϵ имеет корни $x = \pi/2$ и $x = 3\pi/2$, которые не находятся из уравнения (4.4). В точке $x = \pi/2$ функция $f(x)$ из (4.2) имеет минимум, если $\epsilon \leq \epsilon^* = (1 - \lambda)^2 / (4\lambda)$ и максимум, если $\epsilon > \epsilon^*$. Точка $x = 3\pi/2$ — точка максимума при $\epsilon \geq -\epsilon^*$ и точка минимума при $\epsilon < -\epsilon^*$.

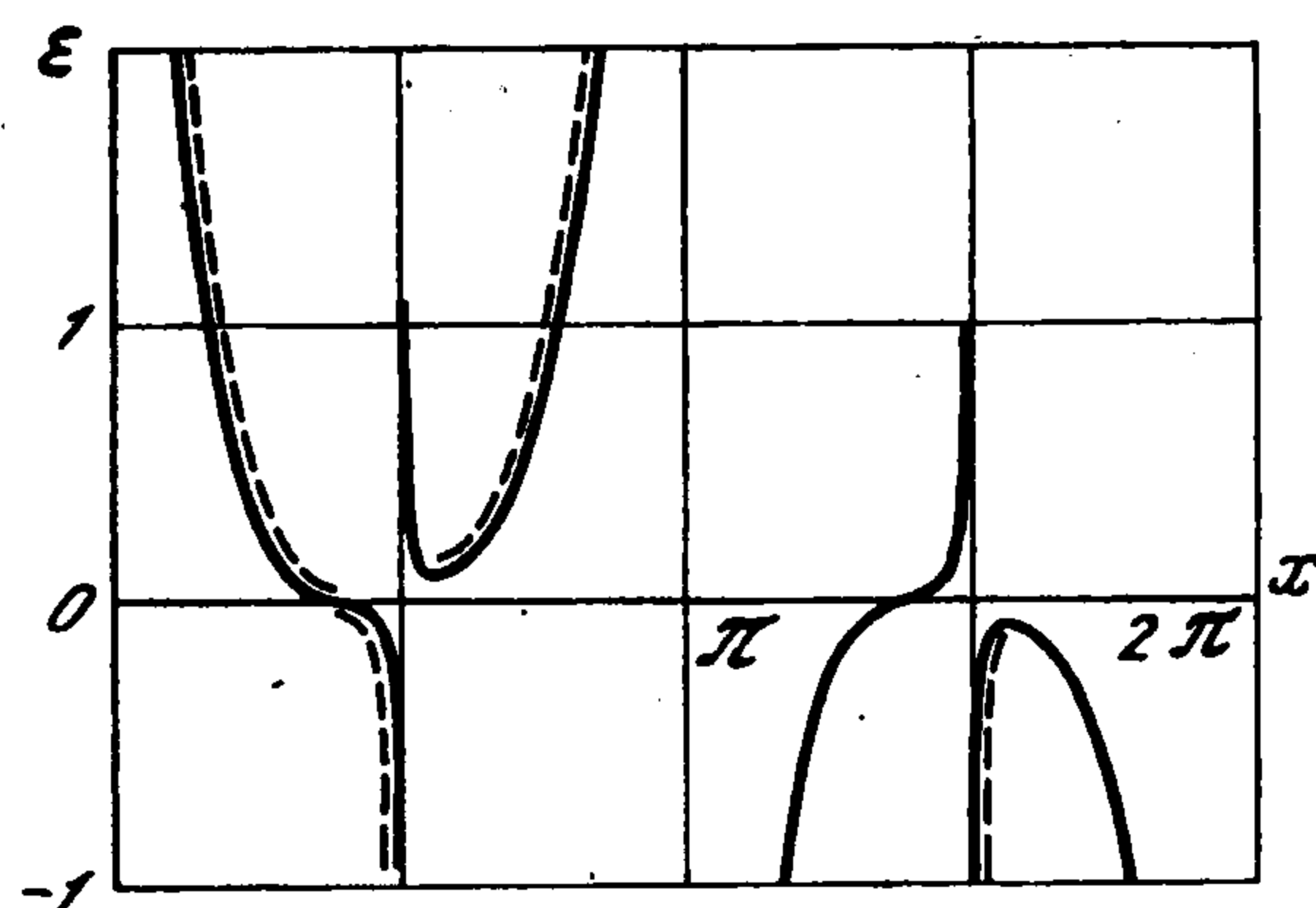
Диаграмма для анализа стационарных точек функции (4.2) при $\nu = \pi/2$ изображена на фиг. 5, откуда видно, что в этом случае функция $f(x)$ имеет либо две, либо четыре стационарные точки.

4.3. Произвольное $\nu \neq \pi/2$. В этом случае функция $\epsilon(x; \nu, \lambda)$, определенная в (4.4), обращается в нуль при $x = \pi - \nu$ и $x = 2\pi - \nu$, если $\nu \in (0, \pi)$, и при $x = 2\pi - \nu$ и $x = 3\pi - \nu$, если $\nu \in (\pi, 2\pi)$. При $x \rightarrow +0$, $x \rightarrow \pi/2 \pm 0$, $x \rightarrow \pi \pm 0$, $x \rightarrow 3\pi/2 \pm 0$, $x \rightarrow 2\pi - 0$, функция (4.4) стремится к $-\infty$ или $+\infty$, в зависимости от ν .

Численный анализ функции $\epsilon(x; \nu, \lambda)$ показывает, что в общем случае, в зависимости от λ , ν , и величины ϵ , график этой функции может иметь на промежутке $[0, 2\pi)$ от двух до шести точек пересечения с прямой $\epsilon = \text{const}$. Соответственно, исследуемая механическая система может иметь от двух до шести положений относительного (по координате β) равновесия.



Фиг. 6



Фиг. 7

На фиг. 6 и 7 приведены диаграммы (аналогичные фиг. 2, 3 и 5) для определения числа и типа стационарных точек функции (4.2). Фиг. 6 отвечает $\lambda = 0,75$, $\nu = \pi/8$, а фиг. 7 — $\lambda = 0,75$, $\nu = 5\pi/8$.

В заключение этого раздела резюмируем результаты, относящиеся к движению твердого тела на двухстепенном подвесе в однородном поле тяжести, ориентированном вдоль неподвижной оси шарнира, по переменной β . Обозначим через Π_{\min} и Π_{\max} соответственно абсолютные минимум и максимум функции $\Pi(\beta, L)$ по переменной β .

1°. Функция $\Pi(\beta, L)$ 2π -периодична по β и, в зависимости от соотношений между значениями проекции кинетического момента (L) на неподвижную ось шарнира и инерционных параметров твердого тела, может иметь на интервале $0 \leq \beta < 2\pi$ от двух до шести стационарных точек, отвечающих различным положениям равновесия системы по переменной β . Стационарные точки функции $\Pi(\beta, L)$ могут быть точками максимума, минимума или перегиба. Точки минимума отвечают устойчивым положениям равновесия, а точки максимума и перегиба — неустойчивым.

2°. Движение системы возможно только тогда, когда соотношение между значениями первых интегралов (E и L) и инерционных параметров тела таково, что выполняется неравенство $E \geq \Pi_{\min}$.

3°. Если $E > \Pi_{\max}$, то твердое тело совершает периодическое вращение по переменной β с периодом, вычисляемым по формуле (3.5).

4°. Если $\Pi_{\min} \leq E \leq \Pi_{\max}$ и величина E не совпадает со значением $\Pi(\beta, L)$ в одной из стационарных точек, то твердое тело совершает периодические колебания в пределах от β_- до β_+ , где β_- и β_+ — два последовательных решения уравнения $\Pi(\beta, L) = E$ такие, что $\Pi(\beta, L) < E$ при $\beta_- < \beta < \beta_+$. Период таких колебаний конечен и вычисляется по формуле (3.4). Отметим, что одним и тем же значениям E и L могут соответствовать несколько различных интервалов колебаний (β_- , β_+).

5°. Если $\Pi_{\min} \leq E \leq \Pi_{\max}$ и хотя бы одна из точек β_- или β_+ , определенных в случае 4°, совпадает с точкой локального максимума или перегиба функции $\Pi(\beta, L)$, то период соответствующих колебаний тела ($\beta_- < \beta < \beta_+$) стремится к бесконечности. Точка локального максимума или перегиба функции $\Pi(\beta, L)$ определяет положение неустойчивого равновесия по переменной β . Таким образом, в рассматриваемом случае возможно стационарное движение, при котором $\beta = \beta_+$ или $\beta = \beta_-$.

6°. Если $\Pi_{\min} \leq E \leq \Pi_{\max}$ и величина E совпадает со значением одного из локальных минимумов функции $\Pi(\beta, L)$, то возможно стационарное движение системы, при котором твердое тело находится в одном из устойчивых положений равновесия по переменной β , соответствующем данному локальному минимуму.

Выводы 2°–6° следуют из анализа движений твердого тела по переменной β , как консервативной механической системы с одной степенью свободы, для которой уравнение сохранения энергии имеет вид (2.4). Поскольку методика такого анализа подробно изложена (см., например, [2, 3]), здесь приведены только окончательные

результаты. Движения $2^\circ-6^\circ$ исчерпывают множество качественно различных движений системы по переменной β .

Фазовые портреты системы на плоскости $\beta, \dot{\beta}$ при различных L можно построить, разрешая уравнения (2.4) относительно β при всех допустимых E .

5. Движение по углу α при $g_1 = g_2 = 0$. В рассматриваемом случае движение по углу α качественно не отличается от движения по этой координате при движении твердого тела на двухстепенном шарнире по инерции [1]. Все соответствующие рассуждения и выкладки, содержащиеся в [1], почти дословно переносятся на рассматриваемый случай. Поэтому здесь приводятся только окончательные выводы.

За каждый период вращений (колебаний) тела по углу β угол α изменяется на одну и ту же величину $\Delta\alpha$. В случае вращений

$$\Delta\alpha = L\Omega_r, \quad \Omega_r = \int_0^{2\pi} F(E, L, \beta) d\beta \quad (5.1)$$

$$F = \frac{1}{K(\beta)} \left[\frac{K(\beta) J_{11} - b^2(\beta)}{2EK(\beta) - L^2 - 2mgK(\beta)(\rho_2 \sin \beta + \rho_3 \cos \beta)} \right]^{1/2}$$

а в случае колебаний

$$\Delta\alpha = L\Omega_v, \quad \Omega_v = 2 \int_{\beta_-}^{\beta_+} F(E, L, \beta) d\beta \quad (5.2)$$

Здесь β_- и β_+ – значения угла β , отвечающие крайним положениям тела при колебаниях ($\beta_- < \beta_+$). Из (5.1) и (5.2) вытекает, что если число $\mu_r = |L| \Omega_r / (2\pi)$ ($\mu_v = |L| \Omega_v / (2\pi)$) рационально, то соответствующее движение системы в целом периодически, и наименьший период равен $n_r \tau_r$ ($n_v \tau_v$), где n_r (n_v) – наименьший натуральный знаменатель рационального числа μ_r (μ_v), а τ_r (τ_v) – период вращений (колебаний) тела по переменной β . Если число μ_r (μ_v) иррационально, то движение системы непериодично.

Из (2.3) следует, что пребывание тела в состоянии равновесия $\beta = \tilde{\beta}$ по переменной β отвечает его вращению вокруг неподвижной оси X_3 шарнира с постоянной угловой скоростью $\dot{\alpha} = L / K(\tilde{\beta})$.

Формулы (5.1) и (5.2) получаются в результате интегрирования уравнения (2.3) по времени в пределах от t_0 до $t_0 + \tau_r$ (соответственно до $t_0 + \tau_v$) с заменой переменной интегрирования на β в силу уравнения (2.5). Здесь t_0 – произвольный момент времени, принимаемый за начальный. Детальный вывод соотношений, аналогичных (5.1) и (5.2), приведен в [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-01368).

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотник Н.Н. О движении по инерции абсолютно твердого тела на двухстепенном шарнире // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 83–90.
2. Парс Л.А. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.