

УДК 531.36:534.1

© 1995 г. М.И. Фейгин

**ОБ УСЛОЖНЯЮЩИХСЯ СТРУКТУРАХ БИФУРКАЦИОННОГО ДЕРЕВА
КУСОЧНО-ГЛАДКИХ СИСТЕМ**

Предлагается новый подход к исследованию динамики кусочно-гладкой системы, использующей априорное знание возможных бифуркационных структур пространства параметров. В разд. 1 рассматривается синтез структур бифуркационного дерева системы: локальных структур, бифуркационных слоев, источников и узлов. Показано, что узел, соответствующий бифуркации удвоения с переориентацией области существования, может порождать последовательность усложняющихся структур. При этом все возрастающее число неустойчивых орбит представляет один из механизмов хаотизации динамической системы. В разд. 2 предложенная в первой части работы процедура синтеза структур бифуркационного дерева кусочно-гладкой системы применена к задаче о вынужденных колебаниях линейного осциллятора с ударами об ограничитель. Обнаружены каскады удвоения периода, сопровождающиеся переориентацией расположения области существования решения по отношению к некоторой бифуркационной поверхности – стволу дерева. На бифуркационном стволе выделено множество интервалов частоты, внутри каждого из которых существует неограниченная последовательность усложняющихся локальных структур, рождающихся и умирающих в узлах. Этот своеобразный механизм хаотизации движений осциллятора имеет место в полукрестностях предельных узловых бифуркационных точек.

1. Синтез структур бифуркационного дерева. *Простейшие локальные бифуркационные структуры.* Будем рассматривать кусочно-гладкие динамические системы, описываемые уравнениями вида

$$dx/dt = f(x, t, \mu) \quad (1.1)$$

где x – n -мерный вектор координат, f – периодическая по t векторная функция, μ – вектор параметров.

Изменению состояний системы во времени $x(t)$ будет соответствовать некоторая фазовая траектория в $(n + 1)$ – мерном пространстве G . Область определения G разделяется на подобласти G_1, G_2, \dots, G_j , в которых определены различные подсистемы, описываемые своими уравнениями (1.1) с достаточно гладкими правыми частями. Фазовые траектории подсистем сшиваются тем или иным образом на границах подобластей.

Анализ кусочно-гладких систем целесообразно сводить к анализу отображения Пуанкаре $\Pi(x)$ границ подобластей G_1, \dots, G_j на себя ($x_{n+1} \equiv t$). При этом периодическому решению будет соответствовать неподвижная точка отображения $x_* = \Pi(x_*)$.

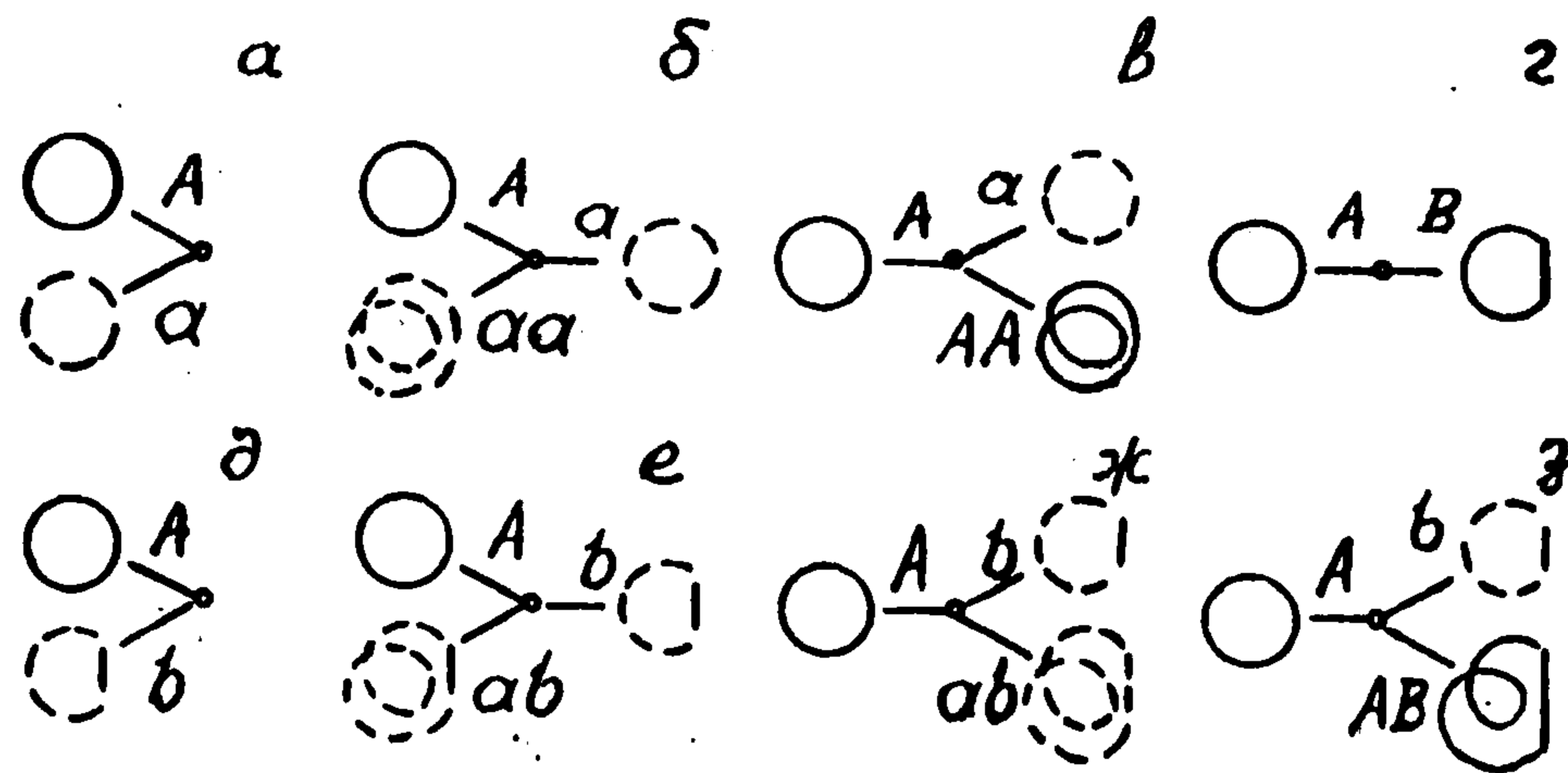
Исследуя далее зависимость решений кусочно-гладких систем от параметров, будем рассматривать два типа бифуркаций. Первый – точно такой же, как и в

аналитических системах. Он соответствует потере устойчивости и связан с выходом собственного числа матрицы Якоби $\Pi'(x_*)$ или корня характеристического уравнения

$$\chi(\lambda, \mu) = 0 \quad (1.2)$$

из единичного круга. Это случаи $\lambda = 1$, или $\lambda = -1$, или $\lambda = \exp(\pm i\varphi), i = \sqrt{-1}, 0 < \varphi < \pi$. Соответствующие бифуркационные поверхности будем обозначать N_+, N_-, N_φ .

В случае общего положения при пересечении изменяемым параметром бифуркационной границы характер бифуркации удобно описывать локальными структурами.



Фиг. 1

Из семи возможных простейших N -бифуркационных структур [1–4] ограничимся рассмотрением структуры слияния устойчивого и неустойчивого решений на N_+ (фиг. 1, а)

$$A, a \rightleftharpoons \phi \quad (1.3)$$

и двух структур потери устойчивости на N_- , сопровождающейся либо слиянием с неустойчивым двуоборотным решением (фиг. 1, б)

$$A, aa \rightleftharpoons a \quad (1.4)$$

либо рождением устойчивого двуоборотного решения (фиг. 1, в)

$$A \rightleftharpoons a, AA \quad (1.5)$$

Второй тип бифуркаций периодических решений кусочно-гладких систем – это S -бифуркации [3, 5, 6]. Они связаны с изменением числа участков, из которых сшивается замкнутая фазовая траектория (орбита), соответствующая рассматриваемому решению.

Полагаем, что в предельной S -бифуркационной ситуации орбиты двух решений A (или a) и B (или b) совпадают. При этом орбитам B, b соответствует большее число сшиваемых участков.

Пусть $\chi_a(\lambda, \mu)$, $\chi_b(\lambda, \mu)$ и $\chi(\lambda, \mu)$ – характеристические полиномы, корни которых $\lambda = \alpha_i$, $\lambda = \beta_i$, $\lambda = \lambda_i$ определяют устойчивость или неустойчивость указанных, а также двуоборотных орбит AB и ab соответственно. Можно показать, что характер простейших локальных S -бифуркационных структур определяется четностью или нечетностью трех показателей, равных числу соответствующих действительных корней [5, 6]:

σ^+ – корней α_i и β_i , превышающих +1;

σ^- – корней α_i и β_i , меньших -1;

σ^{++} – корней α_i^2 и λ_i , превышающих +1.

Ограничимся рассмотрением пяти локальных C -бифуркационных структур, а именно:

$$A \rightleftharpoons B \quad (1.6)$$

если $\sigma^+ = \sigma^- = 0$ (фиг. 1, з);

$$A, b \rightleftharpoons \phi \quad (1.7)$$

если σ^+ – нечетное, а σ^- – четное (фиг. 1, д);

$$A, ab \rightleftharpoons b \quad (1.8)$$

если σ^+ – четное, а σ^-, σ^{++} – нечетные (фиг. 1, е);

$$A \rightleftharpoons b, ab \quad (1.9)$$

если σ^+, σ^{++} – четные, а σ^- – нечетное (фиг. 1, ж);

$$A \rightleftharpoons b, AB \quad (1.10)$$

если σ^+ – четное, σ^- – нечетное, а $\sigma^{++} = 0$ (фиг. 1, з).

Синтез сложной локальной структуры. Для конкретизации задачи синтеза наряду с исходным множеством простейших локальных структур необходимы дополнительные предположения. Будем полагать, например, что при C -бифуркациях разность между количеством устойчивых и количеством неустойчивых неподвижных точек отображения Пуанкаре остается неизменной. В этом случае структура (1.9) не удовлетворяет сделанному предположению (фиг. 1, ж). Противоречие может быть снято, если усложнить локальную структуру бифуркацией рождения устойчивой четырехоборотной орбиты

$$A \rightleftharpoons b, AAAB, ab \quad (1.11)$$

или слияния с неустойчивой четырехоборотной орбитой

$$A, aaab \rightleftharpoons b, ab \quad (1.12)$$

Описанная процедура позволяет синтезировать последовательности усложняющихся локальных структур. Алгоритм такого усложнения просматривается при сравнении структур (1.3), (1.4), а также (1.7), (1.8) и (1.12). Общим для двух сравниваемых групп структур является сочетание очередной бифуркации удвоения с переориентацией области существования неустойчивой "удваивающейся" орбиты относительно бифуркационной границы (ствола). Таким образом, последовательность усложняющихся локальных C -бифуркационных структур может быть записана в виде

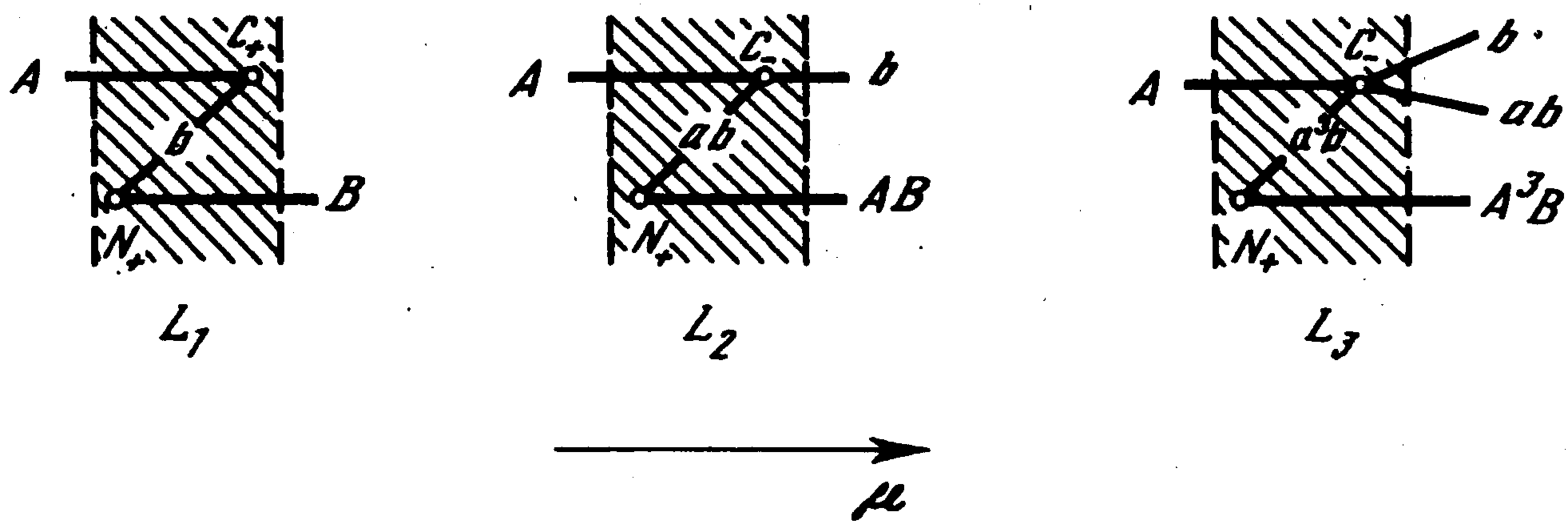
$$A, b \rightleftharpoons \phi; \quad A, ab \rightleftharpoons b; \quad A, a^3b \rightleftharpoons b, ab; \quad A, a^7b \rightleftharpoons b, ab, a^3b; \dots$$

Аналогичная последовательность может быть формально записана и для N -бифуркационных локальных структур

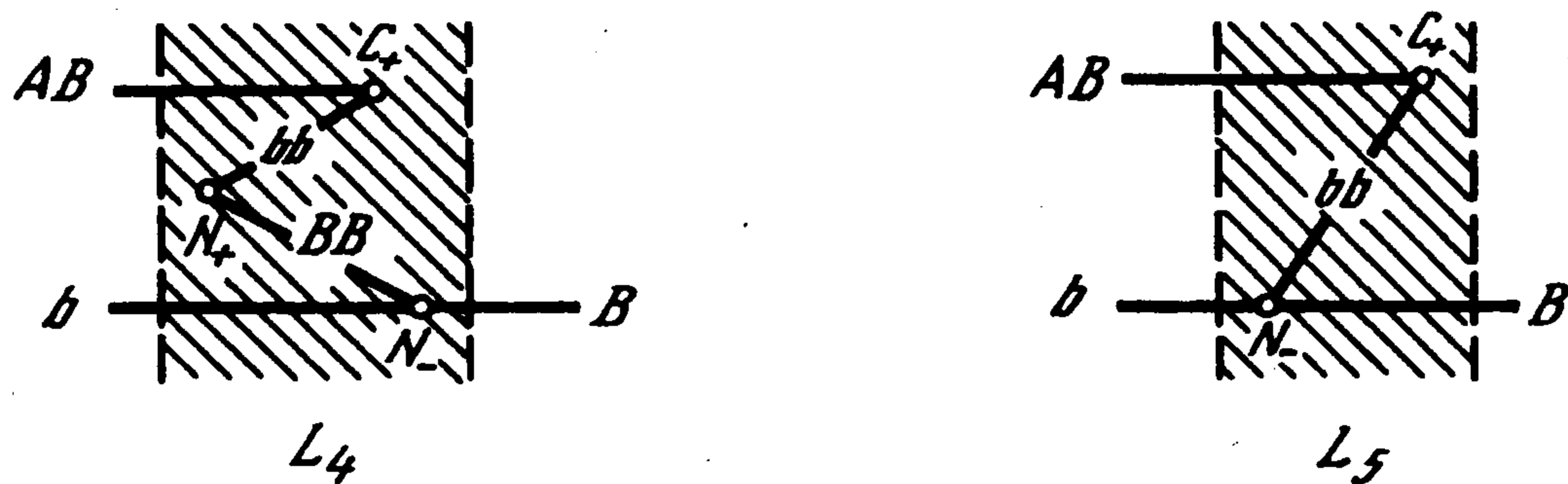
$$A, a \rightleftharpoons \phi; \quad A, aa \rightleftharpoons a; \quad A, a^4 \rightleftharpoons a, aa; \quad A, a^3 \rightleftharpoons a, aa, a^4; \dots$$

Синтез бифуркационного слоя. Задача синтеза бифуркационных переходов, содержащих более одной локальной структуры, решается простым перебором структур из исходного множества (1.3)–(1.10), если известны решения на входе и выходе слоя.

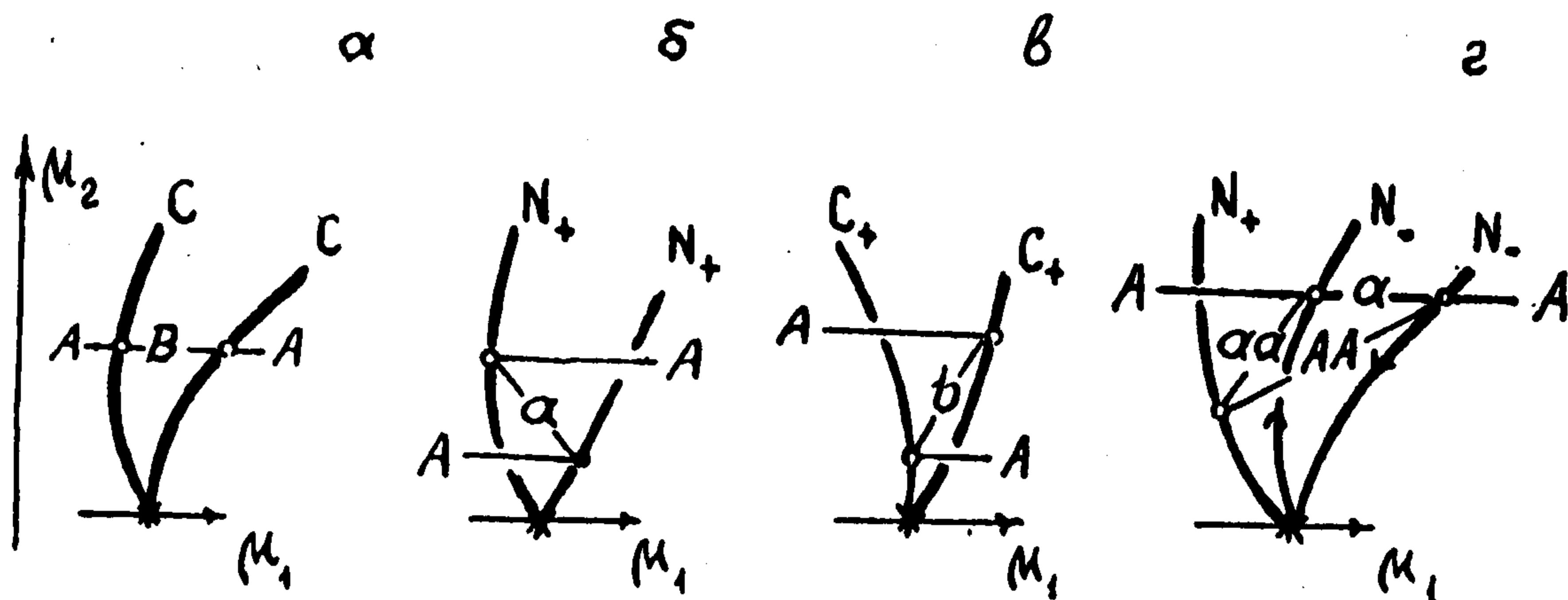
Пусть, например, при $\mu = \mu_0$ в диссипативной неавтономной системе существует единственное решение A , а конечное значение μ соответствует прохождению C -границы с одной из локальных структур (1.7), (1.8) или (1.12). Перебором структур (1.3)–(1.10) получаем структуры бифуркационных слоев L_1, L_2 и L_3 , удовлетворяющие всем условиям (фиг. 2).



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Рассмотрим еще один пример синтеза бифуркационного слоя – бифуркационную состыковку орбит AB , b и орбиты B , расположенных в разных областях пространства параметров. Очевидно, что возможны два решения в зависимости от вносимой внутрь слоя локальной структуры: слияние с устойчивой орбитой удвоенного периода или рождение неустойчивой двуоборотной орбиты (фиг. 3). В первом случае бифуркационный слой L_4 включает три локальные структуры, во втором – слой L_5 синтезирован из двух структур.

Синтез бифуркационного источника. Бифуркационным источником будем называть структуру, соответствующую зарождению или исчезновению бифуркационного дерева. Рассмотрим семейство параметрических траекторий $\mu_{10} < \mu_1 < \mu_{11}$, $\mu_2 = \text{const}$. Полагаем, что при $\mu_2 < 0$ никаких бифуркаций не происходит, а при $\mu_2 > 0$ прямая $\mu_2 = \text{const}$ пересекает бифуркационные границы, образующие бифуркационный слой. Очевидно, что его структура должна обеспечить совпадение решений на входе или выходе слоя.

В приведенных на фиг. 4 примерах параметрическая особая точка (источник) помечена звездочкой. Можно говорить об источнике зарождения мягких бифуркационных переходов или безопасных границ (фиг. 4, а), жестких переходов или опасных границ (фиг. 4, б, в) и источнике зарождения смешанных границ (фиг. 4, з) [7].

Замечания. 1°. В трехмерном пространстве параметров бифуркационные источники образуют складки (простые или многолистные).

2°. Для наглядности происходящие в системе изменения при жестких переходах можно изображать в некотором "гибридном" пространстве. Если в качестве координат наряду с физическими (управляющими) параметрами принять и некоторые показатели поведения системы (внутренние параметры), являющиеся функциями управляющих параметров, то простейшая бифуркационная складка будет соответствовать сборке Уитни [8, 9].

Синтез структуры ствола бифуркационного дерева. Бифуркационные узлы. Рассмотрим далее синтез непрерывного перехода между различными локальными структурами при изменении параметров вдоль некоторой границы или ствола бифуркационного дерева. Покажем, что такие структуры разделяются расположенным на стволе узлом.

Ограничимся случаем двух управляющих параметров, в плоскости которых удалось выделить границу C . Введем в рассмотрение семейство замкнутых параметрических траекторий, например окружностей, с центром на C в точке, разграничивающей отличающиеся локальные структуры. Тогда в точках пересечений любой окружности с C будут разные локальные структуры.

В качестве новых управляющих параметров примем длину дуги μ_1 и радиус μ_2 введенного семейства окружностей. Полагая далее $\mu_2 = \text{const}$, выбираем начальное и конечное значения изменяемого параметра $\mu_{10} = \mu_{11}$ в области с известными решениями. В результате приходим к рассмотренной выше задаче синтеза бифуркационного слоя. Естественно, что теперь в качестве синтезируемых элементов наряду с локальными структурами могут быть использованы также и синтезированные ранее слои — L_i (фиг. 5).

Предположим, что задачу синтеза при $\mu_2 > 0$ удалось решить и при $0 < \mu_1 < 2\pi$ установлены бифуркационные переходы между всеми решениями системы. Тогда, опираясь на уже известную бифуркационную картину вдоль окружности, остается выяснить, как она будет деформироваться при $\mu_2 \rightarrow 0$. Ширина расположенных на окружности различных бифуркационных слоев при $\mu_2 \rightarrow 0$ также стремится к нулю. Это следует из невозможности пересечения отдельных слоев в силу принятого предположения о различии локальных структур по обе стороны от центра окружности.

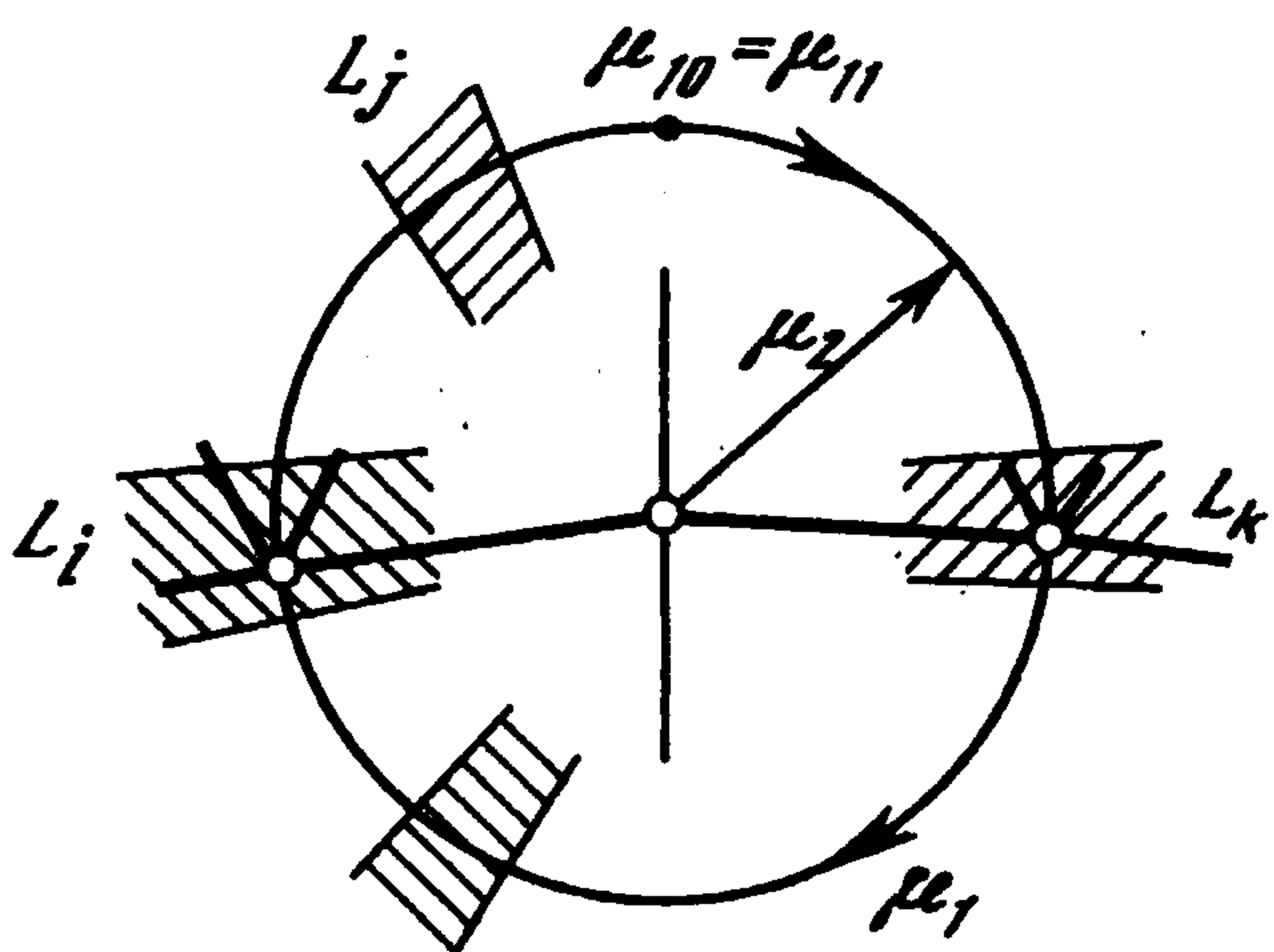
Поэтому переход от одной локальной структуры к другой при продвижении вдоль ствола должен происходить через их рождение и умирание в точке, которая и является бифуркационным узлом.

На фиг. 6 приведен результат синтеза бифуркационного узла перехода между локальными структурами $A, b \rightleftharpoons \phi$ и $A, ab \rightleftharpoons b$ при изменении параметра вдоль C -границы, рассматриваемой в качестве ствола бифуркационного дерева. Структура узла построена с использованием трех бифуркационных слоев L_1, L_2 и L_3 , синтезированных ранее и изображенных соответственно на фиг. 2.

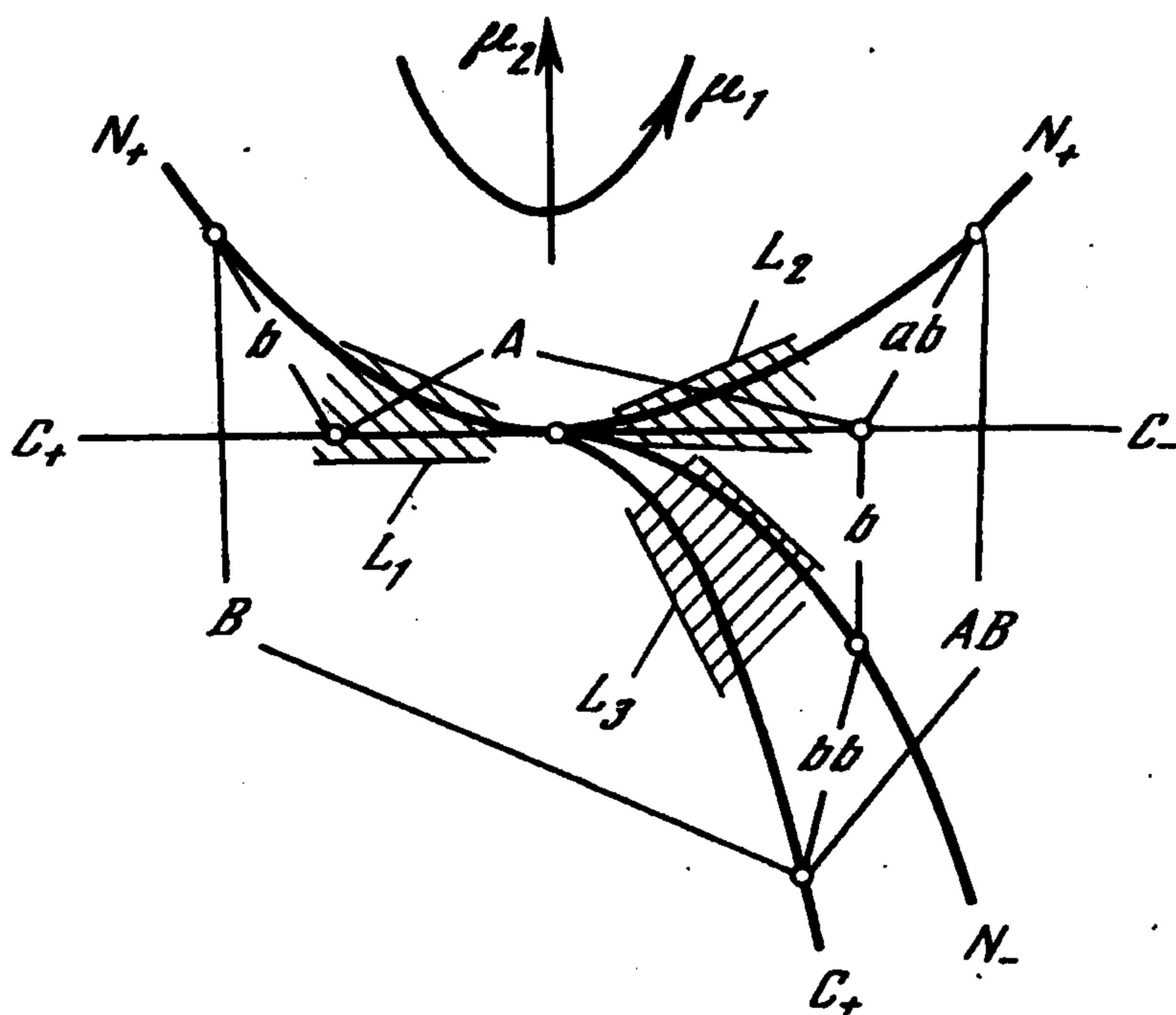
В рассмотренном случае происходит переориентация области существования орбиты b относительно C -границы. Таким образом, при продвижении вдоль ствола непрерывное изменение локальных структур должно происходить через их рождение или умирание в бифуркационных узлах.

Замечание. Специальным выбором управляющих параметров бифуркационные структуры узла и источника могут быть деформированы одна в другую. Так для такой деформации узла, приведенного на фиг. 6, достаточно перейти к управляющим параметрам с использованием семейства парабол: μ_1 — вдоль параболы и μ_2 — вдоль геометрического места вершин парабол.

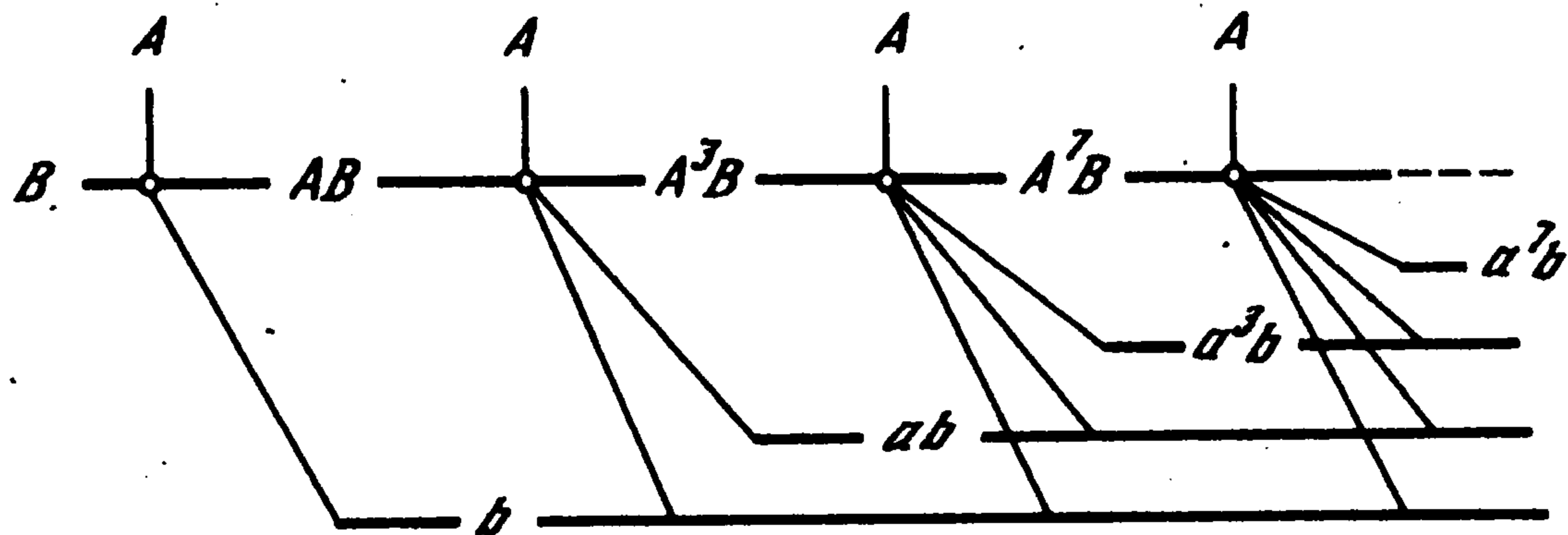
Синтез неограниченно усложняющейся структуры ствола бифуркационного дерева. Структура узла, порождающая бифуркацию удвоения с переориентацией области существования (фиг. 6), обладает замечательной особенностью — допускает



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

последовательную "состыковку" друг с другом. При этом все возрастающее количество неустойчивых орбит, компенсирующее удваивающееся всякий раз число оборотов устойчивой орбиты, представляет один из механизмов хаотизации динамической системы. Если изображать бифуркационную структуру узлов в бесконечно малой его окрестности, когда толщиной слоев $L_1 - L_3$ можно пренебречь, то ствол бифуркационного дерева будет иметь структуру, представленную на фиг. 7.

2. Параметрический портрет осциллятора, ударяющегося об ограничитель: О расположении ствола бифуркационного дерева. Построение всех бифуркационных границ для большинства сильно нелинейных систем остается задачей невыполнимой. Вместе с тем в отдельных случаях в разбиении пространства параметров просматривается определенная закономерность, позволяющая говорить о характерном бифуркационном дереве или параметрическом портрете динамической системы. Существует некоторый класс нелинейных характеристик, который порождает типичную для него бифуркационную картину. Колебательная система оказывается грубой по отношению к этому классу характеристик [6, 10].

В указанном смысле весьма эффективной базовой моделью является осциллятор с ударами о неподвижный ограничитель. Дело в том, что при расположении ограничителя на расстоянии d , превышающем амплитуду X вынужденных колебаний $P(t)$, система остается линейной. Это позволяет элементарно и вместе с тем точно записать уравнение ствола бифуркационного дерева в виде

$$d = P(t)_{\max} = X \quad (2.1)$$

При $x < d$ существование безударных решений становится невозможным. Уравнение (2.1) соответствует S -бифуркационной границе, определяющей взаимные переходы между линейной и нелинейной системами. Таким образом, уже при постановке задачи оказывается известным расположение в пространстве параметров той "сцены" в окрестности которой разворачиваются основные "бифуркационные представления". Заметим, что даже для осциллятора Дуффинга решение этой задачи представляется возможным лишь путем машинного моделирования исходных уравнений.

Области существования и устойчивость субпериодических решений. Рассмотрим вынужденные колебания линейного осциллятора с ударами об ограничитель, описываемые уравнениями

$$x'' + 2\nu x' + x = \cos \omega t, \quad x < d \quad (2.2)$$

$$x'^+ = -R x'^-, \quad x = d \quad (2.3)$$

где d – расстояние до ограничителя, ν – коэффициент вязкого трения, x^- и x'^+ – до- и послеударные скорости, $R \in (0, 1)$ – ньютоновский коэффициент восстановления.

Решение уравнений (2.2), (2.3) в форме отображения Пуанкаре $M_1 = \Pi(M_0)$ полуплоскости $x = d, x' < 0$ на себя сшивается из двух участков: $M_0 M^-$ – решения линейной системы (2.2) и $M^- M_1$ – участка ударного взаимодействия (2.3) (фиг. 8).

Рассмотрим субпериодические решения порядка n с m ударами за период $\theta = 2\pi n/\omega$. Обозначим их $\Gamma_{m,n}$, различая при необходимости устойчивые $S_{m,n}$ и неустойчивые $U_{m,n}$ решения. При этом полагаем вначале $\nu = 0$, т.е. учитываем диссипативность системы только за счет не вполне упругих соударений, пока такая идеализация не приводит к "необычному" увеличению некоторых характеристик решения.

Зависимость между координатами начальной $t_0, x_0 = d, x'_0 < 0$ и конечной $t_1, x_1 = d, x'_1 < 0$ точек записываются в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= P_1 + (d - P_0) \cos t_{01} + (x'_0 - P'_0) \sin t_{01} \\ -x'_1 / R &= P'_1 - (d - P_0) \sin t_{01} + (x'_0 - P'_0) \cos t_{01} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$P_i = \cos \omega t_i / (1 - \omega^2), \quad t_{01} = t_1 - t_0$$

Для нахождения субпериодических решений $\Gamma_{n,1}$ с одним ударом за период полагаем

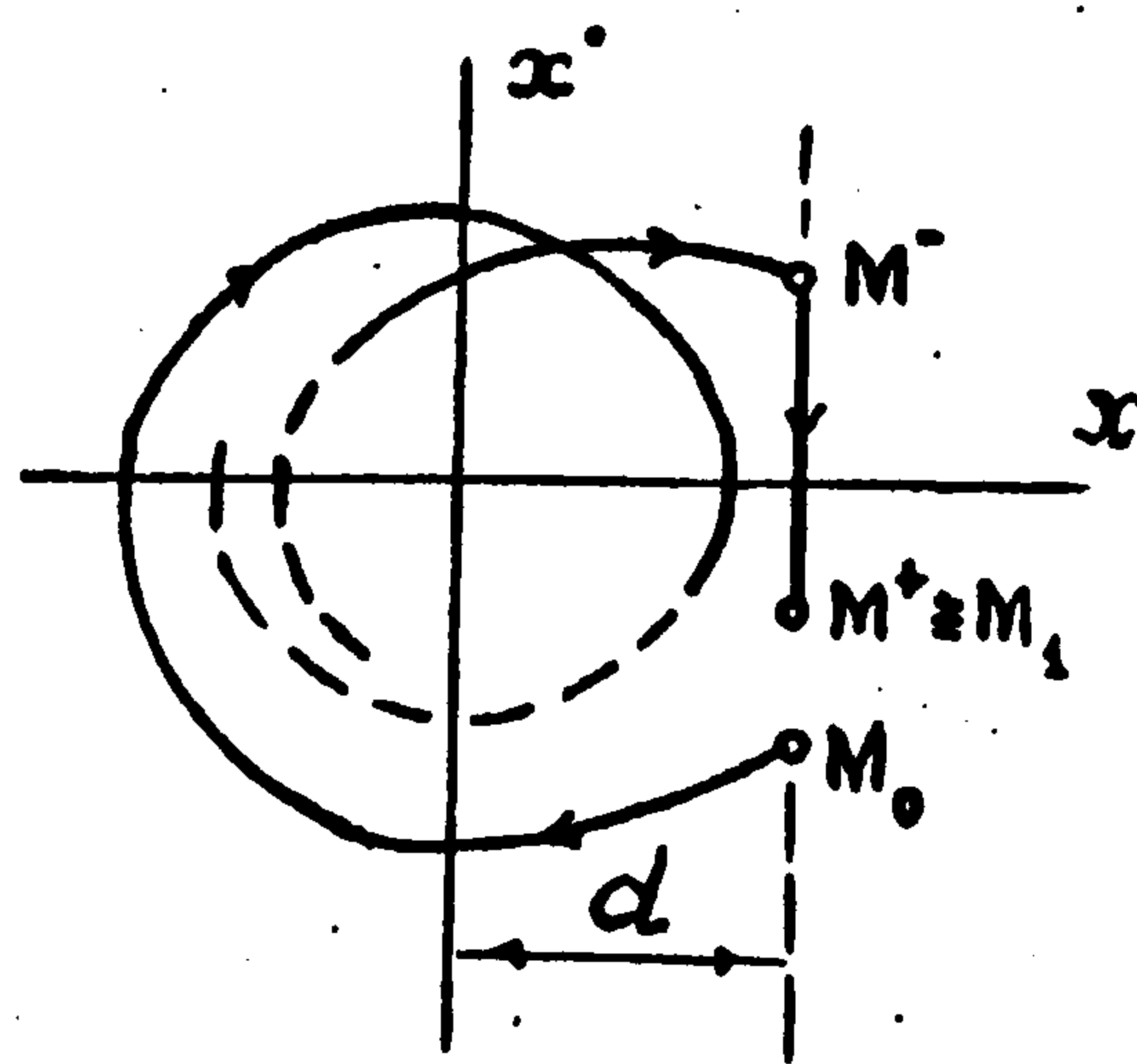
$$x'_1 = x'_0, \quad t_1 - t_0 = 2\pi n / \omega = \theta \quad (2.5)$$

Из (2.4), (2.5) получаем уравнения относительно координат неподвижной точки отображения t_0, x'_0 в виде

$$\begin{aligned} (1 - z \operatorname{ctg}(\theta/2))^2 + (r-1)^2 z^2 / (r\omega)^2 &= X^2 / d^2 \\ \sin \omega t_0 &= z(1 - r^{-1})(1 - \omega^2)d / \omega \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$X = 1 - \omega^2 r^{-1}, \quad r = (1 + R) / (2R), \quad z = r x'_0 / d < 0$$

Для исследования устойчивости варьируем уравнения (2.4) по всем фазовым переменным в окрестности решения уравнений (2.4)–(2.6). Полагая



Фиг. 8

$\delta x'_1 = \lambda \delta x'_0$, $\delta t_1 = \lambda \delta t_0$, приходим к характеристическому уравнению

$$2\lambda^2 - \lambda\{(1+R)^2(\omega^2 s / z + (1-\omega^2)(1+c)) - R(1+c)^2\} + 2R^2 = 0 \quad (2.7)$$

$$s = \sin \theta, \quad c = \cos \theta$$

В случае комплексных корней уравнения (2.7) искомое решение всегда устойчиво, так как $\lambda_1 \lambda_2 = R^2 < 1$. Поэтому при изменении параметров системы потеря устойчивости возможна лишь при $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$, т.е. на бифуркационных границах N_+ или N_- .

Для исследования условий существования решения кусочно-гладкой системы требуется анализ C -бифуркационных границ. В рассматриваемом случае ненарушаемость условий сшивания решения сводится к проверке отсутствия дополнительных соударений на периоде. В окрестности C -границы (2.1) для решений $\Gamma_{n,1}$, близких к $P(t)$, дополнительных ударов не будет, если из n максимальных значений $x(t)$ на периоде $n-1$ значений будут меньше параметра d . Иными словами, должны выполняться неравенства

$$x(t_j) < d, \quad x'(t_j) = 0, \quad x''(t_j) < 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.8)$$

Описанная процедура приводит к системе неравенств [11]

$$\mu \sin(2\pi n / \omega) < 0, \quad \mu \sin((n-j)\pi / \omega) \sin(j\pi / \omega) \cos(\pi n / \omega) < 0, \quad (2.9)$$

$$\mu = d / X - 1, \quad |\mu| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

Бифуркационные узлы удвоения с переориентацией области существования. Обозначим через $G_{n,m}$ область пространства параметров, в которой выполняются условия существования решения $\Gamma_{n,m}$. Введем в рассмотрение множество интервалов частоты

$$k < 1/\omega < k + 1/n, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.10)$$

Для решений типа $\Gamma_{n,1}$, сливающихся при $\mu = 0$ с решением линейной системы $P(t)$, справедливо следующее утверждение: в каждом из интервалов (2.10) на C -границе $\mu = 0$ существует последовательность узловых точек

$$1/\omega_i = k + 1/n_{i+1}, \quad n_{i+1} = 2^i n, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

соответствующих бифуркации удвоения с зарождением при уменьшении $1/\omega$ областей $G_{2n,1}, G_{4n,1}, \dots$ в полуплоскости $\mu > 0$. При этом одновременно происходит переориентация областей существования $G_{n,1}, G_{2n,1}, \dots$ из полуплоскости $\mu > 0$ в полуплоскость $\mu < 0$.

Для доказательства вводим в окрестности каждой узловой точки (2.11) локальный параметр ε_i

$$\varepsilon_i = 1/\omega - 1/\omega_i, \quad -1/n_{i+1} < \varepsilon_i < 1/n_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Тогда для решения $\Gamma_{n_i,1}$ с периодом θ_i

$$\theta_i = 2\pi n_i / \omega, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

и тригонометрические функции в неравенствах (2.9) примут вид

$$\sin(2\pi n_i / \omega) = -\sin(2\pi n_i \varepsilon_i), \quad \cos(\pi n_i / \omega) = (-1)^{1+n_i k} \sin(\pi n_i \varepsilon_i)$$

$$\sin(\pi(n_i - j) / \omega) = (-1)^{(n_i - j)k} \sin((n_i - j)(\varepsilon_i + 1/n_{i+1})\pi)$$

$$\sin(j\pi / \omega) = (-1)^{jk} \sin(j\pi(\varepsilon_i + 1/n_{i+1}))$$

В рассматриваемых интервалах (2.12) изменения ϵ_i

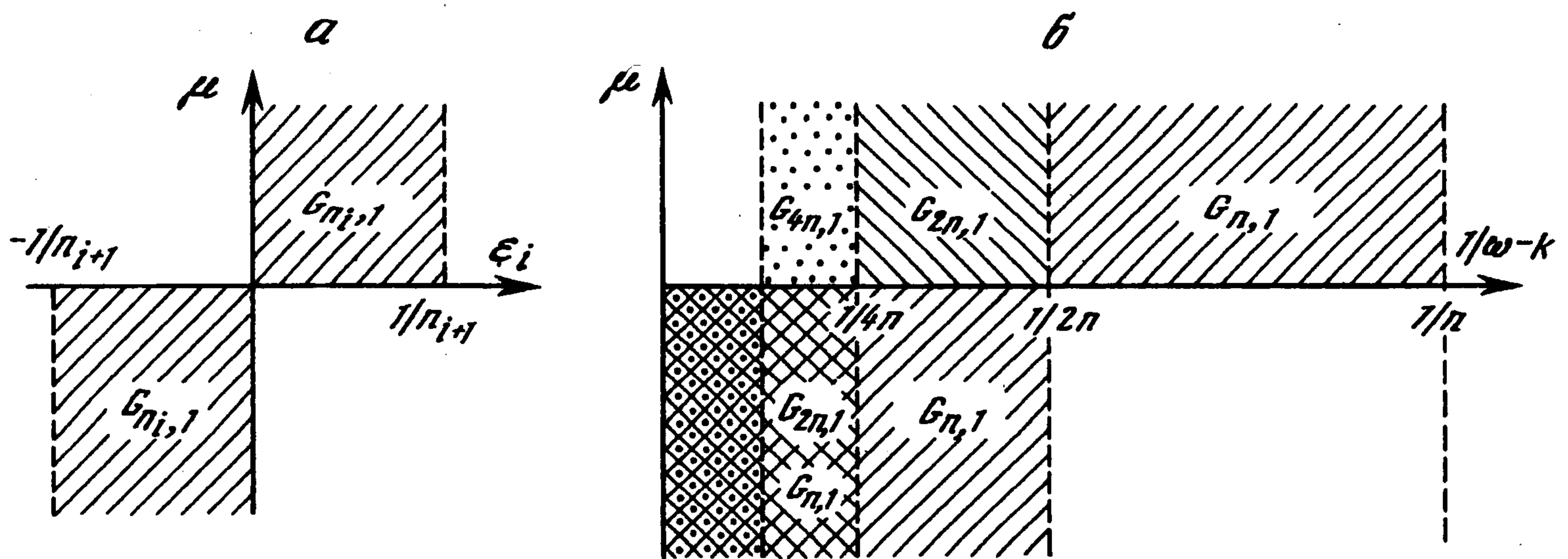
$$2n_i|\epsilon_i| \leq 1, \quad (n_i - j)(\epsilon_i + 1/n_{i+1}) < 1, \quad j(\epsilon_i + 1/n_{i+1}) < 1$$

В результате условия (2.9) сводятся к выполнению неравенства

$$\mu \epsilon_i > 0 \quad (2.14)$$

Следовательно, при $\epsilon_i = 0$ происходит переориентация расположения области существования $G_{n_i,1}$ относительно оси μ (фиг. 9, а).

Полную картину расположения областей $G_{n,1}, G_{2n,1}, \dots$ на рассматриваемом интервале получим наложением локальных картин (фиг. 9, б). При $\mu < 0$ с приближением к левому краю каждого из интервалов (2.10) количество возможных решений с ударами неограниченно возрастает. Заменяя в (2.11) n на $4n, 8n, \dots$, можно убедиться, что в каждой из узловых точек (2.11) происходит переориентация областей $G_{4n,1}, G_{8n,1}, \dots$ соответственно.



Фиг. 9

Структура бифуркационного узла. Перейдем к исследованию решений $\Gamma_{n_i,1}$ в окрестности узловых точек (2.11). Для $|\mu|, |\epsilon_i| \ll 1$ уравнения (2.6), (2.7) принимают вид

$$z^2((\pi n_i \epsilon_i)^2 + (1 - 1/r)^2 / \omega^2) + 2z\pi n_i \epsilon_i + 2\mu = 0 \quad (2.15)$$

$$\lambda^2 - \lambda(2R - \pi n_i \epsilon_i (1 + R)^2 \omega^2 / z) + R^2 = 0 \quad (2.16)$$

В окрестности узла при $\epsilon_i \neq 0$ на S -бифуркационной границе $\mu = 0$ имеем из уравнения (2.15) две неподвижные точки

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -2\pi n_i \epsilon_i \omega^2 r^2 / (r - 1)^2 < 0$$

Следовательно, при $\epsilon_i > 0$ существуют два решения. Первое из них $U_{n_i,1}$, рождающееся при S -бифуркации, неустойчиво, так как из характеристического уравнения для $z_1 \rightarrow 0, \epsilon_i > 0$ следует $\lambda \rightarrow \infty$. Второе решение $S_{n_i,1}$, не претерпевающее S -бифуркацию при $\mu = 0$, устойчиво и исчезает с увеличением μ , сливаясь с неустойчивым решением $U_{n_i,1}$ на бифуркационной границе N_{i+} . Уравнение N_{i+} получим из (2.15), (2.16) при $\lambda = 1$. Оно имеет вид

$$\mu \approx \frac{(\pi n_i \epsilon_i)^2 r^2}{2(k + 1/n_{i+1})^2 (r - 1)^2} \quad (2.17)$$

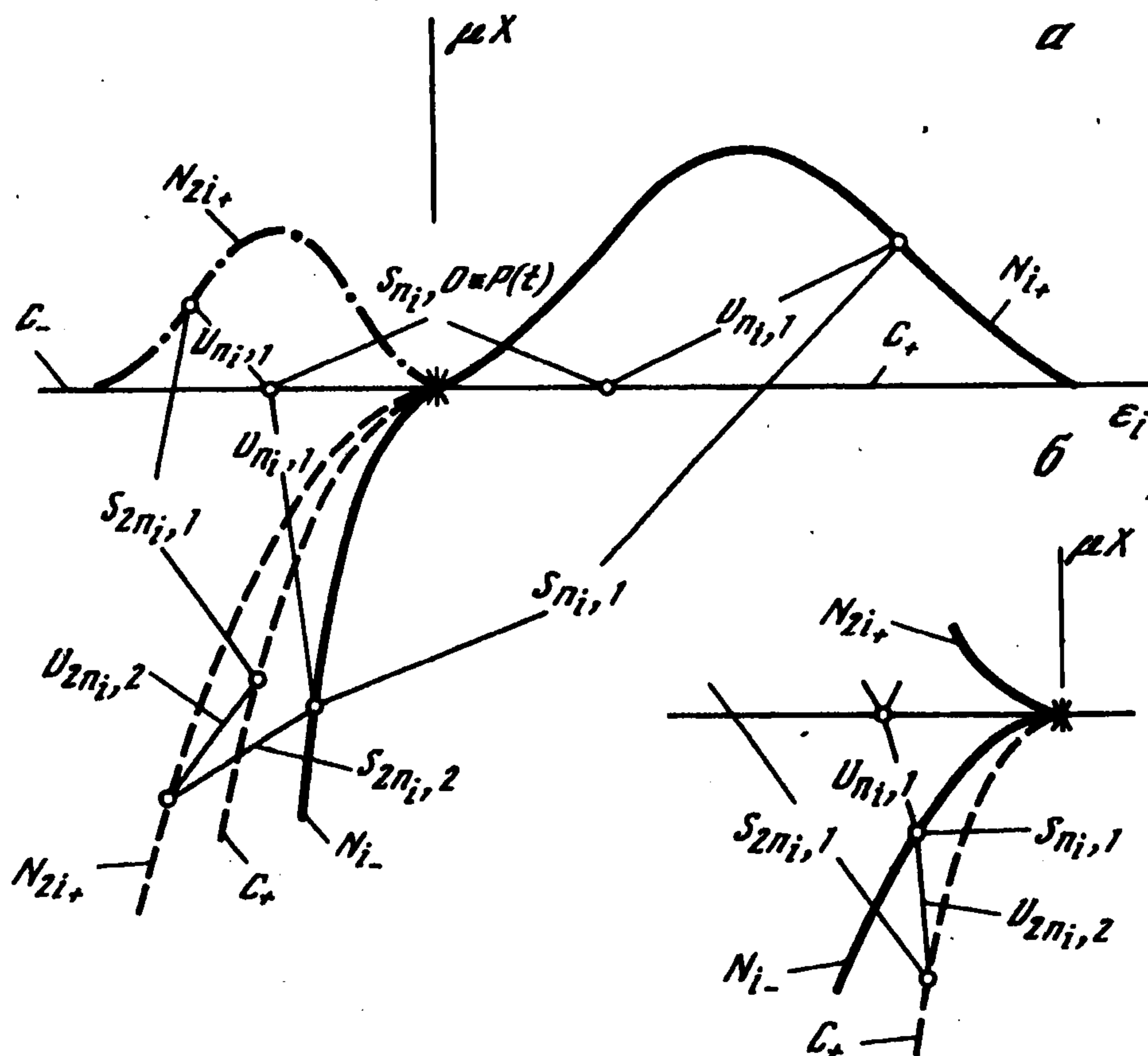
Заметим, что соотношение (2.17) можно также получить без привлечения характеристического уравнения (2.16), если приравнять нулю дискриминант квадратного уравнения (2.15).

В области $\epsilon_i > 0, \mu < 0$ решение $S_{n_i,1}$ единственное. Потеря его устойчивости происходит при $\lambda = -1$ и сопровождается рождением решения $\Gamma_{2n,2}$ с удвоенным периодом.

Подстановка $\lambda = -1$ в уравнение (2.16) дает бифуркационное значение $z_{-1} = \pi n_i \epsilon_i \omega^2 < 0$ в области $\epsilon_i < 0, \mu < 0$, где и расположена искомая граница N_{i-} . Из уравнения (2.15) при подстановке $z = z_-$ имеем

$$\mu \approx -\frac{(\pi n_i \epsilon_i)^2}{(k+1/n_{i+1})^2} \left[1 + \frac{(r-1)^2}{2r^2} \right] \quad (2.18)$$

Найденные в окрестности бифуркационного узла S - и N -границы изображены на фиг. 10, a сплошными кривыми. Для виброударных систем известно [12], что в



Фиг. 10

общем случае исходное решение теряет устойчивость при возникновении дополнительного удара. Из фигуры видно, что рождающееся на S -границе $\mu = 0$ решение с ударами $\Gamma_{n_i,1}$ неустойчиво везде, кроме как в узловом значении частоты, выделенном звездочкой. Вместе с тем было показано [13], что при выполнении необходимых условий рождающееся решение с ударом будет устойчивым. В случае осциллятора с ударами указанное условие соответствует именно узловому значению частоты. В этом легко убедиться непосредственно из характеристического уравнения (2.16). Полагая $\epsilon_i = 0$, получим уравнение $\lambda^2 - 2\lambda R + R^2 = 0$, оба корня которого $\lambda_1 = \lambda_2 = R < 1$.

Перейдем к рассмотрению решения $\Gamma_{2n_i,1}$ удвоенного периода при $\epsilon_i < 0$ и отметим необходимость учета в этом случае вязкого трения. Повторение процедуры решения

исходных уравнений (2.2), (2.3) для $v \ll 1$ приводит к следующему уравнению относительно координаты неподвижной точки x'_0 [11]:

$$\left(\frac{x'_0}{\omega d}\right)^2 \left[r \frac{\exp(-v\theta_{i+1}) - \cos\theta_{i+1} - v\sin\theta_{i+1}}{\operatorname{ch}(v\theta_{i+1}) - \cos\theta_{i+1}} - 1 \right]^2 + \left[1 + \mu - \frac{x'_0 r \sin\theta_{i+1}}{d(\operatorname{ch}(v\theta_{i+1}) - \cos\theta_{i+1})} \right]^2 = 1 \quad (2.19)$$

На C -границе $\mu = 0$ уравнение (2.19) имеет кроме корня $x'_0 = 0$ еще отрицательный корень в интервале $-1/4n_i < \varepsilon_i < 0$, так как $\operatorname{sgn}(x'_0) = \operatorname{sgn}(\sin\theta_{i+1})$. Эти корни соответствуют двум решениям: неустойчивому $U_{2n_i,1}$, рождающемуся при C -бифуркации, и устойчивому $S_{2n_i,1}$. Оба решения сливаются и исчезают на границе N_{2i+} . Уравнение последней, найденное из условия равенства нулю дискриминанта квадратного уравнения (2.19), имеет вид

$$2\mu \approx \left[\frac{\omega \sin\theta_{i+1}}{(1 - \cos\theta_{i+1})(1 - 1/r) - v(\sin\theta_{i+1} + \theta_{i+1})} \right]^2 \quad (2.20)$$

Граница (2.20) расположена выше оси $\mu = 0$, начинаясь и заканчиваясь в узлах $\varepsilon_i = -1/4n_i$, $\mu = 0$. На фиг. 10, *a* она изображена штрихпунктирной кривой.

Для завершения анализа структуры i -го узла в рамках рассматриваемых n_i и $2n_i$ субпериодических решений необходимо выполнить "бифуркационную стыковку" в области $\mu < 0$ между решениями $S_{2n_i,1}$ и $U_{n_i,1}$, существующими при $\varepsilon_i < 0$ и решением $S_{n_i,1}$, существующим при $\varepsilon_i > 0$ и имеющим бифуркационную границу N_- (2.18). Синтез соответствующего бифуркационного слоя рассматривался в разд. 1 (структуры L_4, L_5 на фиг. 3). Полная картина двух вариантов структуры бифуркационного узла представлена на фиг. 10. Границы, введенные для стыковки, изображены штриховыми линиями.

Представляет интерес определение универсальной постоянной [4, 14] последовательности бифуркаций при прохождении параметра ω_i или $(1/\omega_i)$ через бифуркационные узлы для некоторого стартового значения n . В соответствии с (2.11) имеем

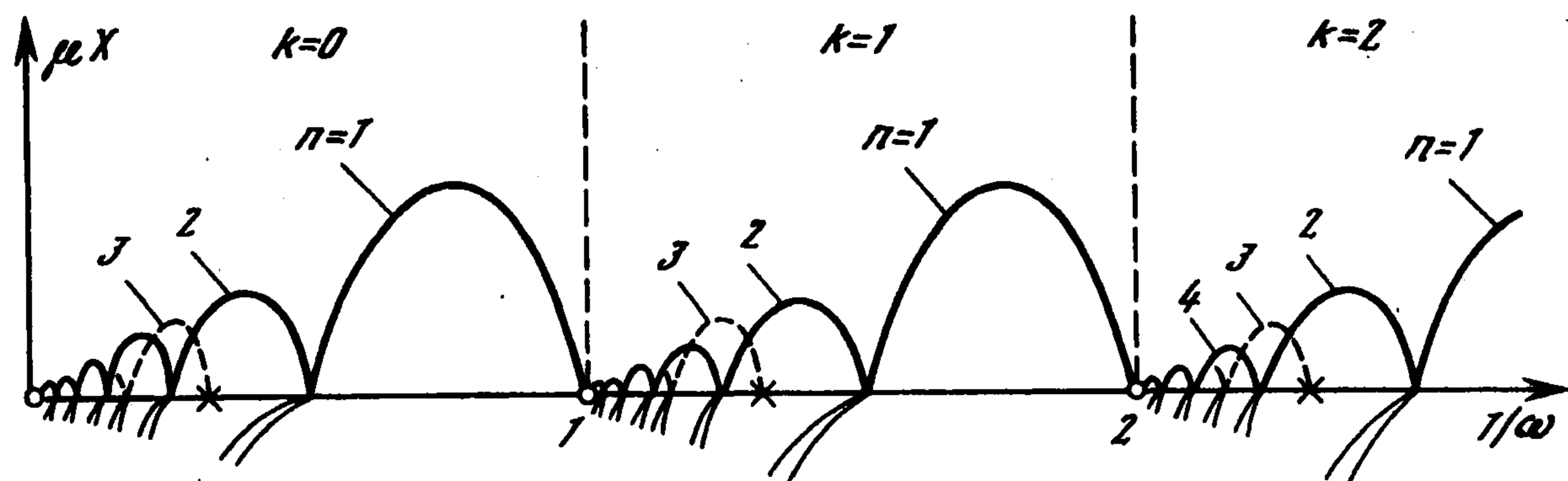
$$\lim_{i \rightarrow \infty} (\omega_{i+1} - \omega_i) / (\omega_{i+2} - \omega_{i+1}) = 2$$

Каскады удвоения с переориентацией. Описанные каскады удвоения с переориентацией при изменении параметров d и ω вдоль C -границы $\mu = 0$ (или $d = X$) развертываются в интервалах (2.10) $1/\omega \in (k, k+1/n)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Значение n соответствует порядку стартового субпериодического решения, которое следует выбирать нечетным, чтобы исключить повторное рассмотрение подинтервалов, уже вошедших в интервалы $n/2$.

Для каждого значения k множеству нечетных n соответствует множество интервалов (2.10), в которых развертываются описанные каскады удвоения. Эти интервалы все более перекрываются с ростом n . Сгущение перекрываемых интервалов происходит с уменьшением $1/\omega$ по мере приближения к значениям $1/\omega = k$, т.е.

$$1/\omega_* = 0, 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

При этом структура ствола $\mu = 0$ бифуркационного дерева неограниченно усложняется, что позволяет говорить о хаотизации движений осциллятора в полукрестности предельных узловых бифуркационных точек (2.21). Параметрический



Фиг. 11

портрет осциллятора в плоскости $1/\omega$ и μ изображен на фиг. 11. Соответствующие стартовому значению $n = 3$ начала каскадов отмечены звездочкой, а бифуркационные границы изображены штрихами.

Сравнение с результатами машинного моделирования. Наблюдение усложняющейся картины возможных движений, получаемой методами машинного моделирования исходной системы, должно быть тем доступнее, чем ближе к резонансной частоте расположен исследуемый частотный интервал. Дело в том, что размеры области параметров вдоль оси изменения зазора d будут в абсолютных единицах определяться значениями μX . Поэтому по степени простоты наблюдения хаотических движений предельные узлы следует расположить в следующем порядке: $1/\omega_* = 1, 2, 3, \dots$

Полученный теоретически параметрический портрет согласуется с известными результатами машинного моделирования вынужденных колебаний осциллятора с ударами об ограничитель. Так, например, очень четко различаются полуокрестности узлов $1/\omega_* = 1, 2, 3, 4$ по сложности структуры плоскости параметров: простая двухрежимность с одной стороны и предельная сложность с другой ([15], фиг. 216а).

Значения параметров, при которых были получены [15] многочисленные фотографии замкнутых фазовых траекторий решений типа $S_{n,1}$ (F18, F21–F24, F34, F37–F40, F45, F46, F49–F53) попадают в соответствующие области, изображенные на фиг. 11.

В заключение отметим, что приведенные результаты получены в рамках рассмотрения стартовых одноударных движений $\Gamma_{n,1}$. Рассмотрение в качестве стартовых решений $\Gamma_{n,2}, \Gamma_{n,3}, \dots$ может выявить дальнейшее усложнение структуры ствола. Оказалось, например, что в определенных интервалах частоты области существования $\Gamma_{n,2}$ меняют свою ориентацию относительно S -границы $\mu = 0$ совершенно аналогично рассмотренному выше случаю решений $\Gamma_{n,1}$ [11].

Автор посвящает эту работу памяти профессора Н.Н. Баутина (1908–1993), незаурядного человека и ученого.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-01-16253).

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний // Тр. Междунар. симпоз. по нелинейным колебаниям. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. Т. 2. С. 268–307.
2. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
3. Фейгин М.И. Некоторые случаи потери управления движением симметричных систем. // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 931–939.

4. *Holodniok M., Klič A., Kubiček M., Marek M.* Metody analýzy nelineárních dynamických modelů. Praha: Academia, 1986. 417 s. *Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М.* Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991. 365 с.
5. *Фейгин М.И.* О структуре C -бифуркационных границ кусочно-непрерывных систем // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 820–829.
6. *Фейгин М.И.* Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994. 285 с.
7. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.
8. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Изд-во МГУ, 1983. 80 с.
9. *Poston T., Stewart I.* Catastrophe Theory and its Applications. London: Pitman Publ., 1978. 491 p.; *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 607 с.
10. *Баутин Н.Н.* Об аппроксимациях и грубости пространства параметров динамической системы // ПММ. 1963. Т. 33. Вып. 6. С. 969–988.
11. *Фейгин М.И.* О рождении семейств субгармонических режимов в кусочно-непрерывной системе // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 5. С. 810–818.
12. *Фейгин М.И.* О поведении динамических систем вблизи границ области существования периодических движений // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 628–636.
13. *Иванов А.П.* Аналитические методы в теории виброударных систем // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 5–21.
14. *Feigenbaum M.J.* Universal behaviour in nonlinear systems // Los Alamos Sci. 1980. V. 1. N 1. P. 4–27; *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физ. наук. 1983. Т. 141. Вып. 2. С. 343–374.
15. *Peterka F.* Uvod do kmitání mechanických soustav s vnitřními rázy. Praha: Academia, 1981. 269 s.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
4.II.1994