

УДК 531.36

© 1995 г. А.С. Сумбатов

ОБ УСЛОВИЯХ ВОЗНИКНОВЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ В ПЛОСКОЙ СИСТЕМЕ С ТРЕНИЕМ

Рассматривается задача о плоском движении твердого тела по неподвижной поверхности при наличии сухого (кулонова) трения. Связь предполагается неударивающей. Получены условия, имеющие вид системы двух односторонних неравенств, которые гарантируют контакт поверхностей и сохранение качения тела без проскальзывания. Проведен анализ этих условий на конкретных примерах механических систем.

1. Условия сохранения чистого качения тела. Рассмотрим плоскопараллельное движение твердого тела, которое катится и скользит по неподвижной поверхности. Пусть в плоскости движения, проведенной через центр масс G тела, регулярная замкнутая выпуклая кривая PS представляет контур тела, а PS_1 – опорную кривую, причем в каждое мгновение контакт кривых точечный.

Введем подвижную систему координат Pxy с осью Py , направленной внутрь движущегося тела, и обозначим через (ξ, η) координаты центра G , через $m, \omega, \sigma^{1/2}$ – соответственно массу, мгновенную угловую скорость и центральный радиус инерции тела, через k_1 и k – кривизны (со знаком) соответственно кривых PS_1 и PS . Далее всюду координаты векторных величин указаны по отношению к системе Pxy .

Если мгновенная скорость точки P тела не равна нулю, то полная реакция $\mathbf{R}(F, N)$, действующая на тело со стороны опорной поверхности, имеет нормальную компоненту $N > 0$ и тангенциальную $F = fN$, где $0 < f < 1$ – коэффициент сухого трения. В случае чистого качения мгновенная скорость точки касания тела с кривой PS_1 постоянно равна нулю, а реакция \mathbf{R} лежит внутри двойного угла трения $M'PM$ (фиг. 1). Следовательно, справедливы неравенства

$$\text{mom}_A(\mathbf{R}) < 0, \quad \text{mom}_{A'}(\mathbf{R}) > 0 \quad (1.1)$$

где A, A' – произвольные точки соответственно на лучах PM и PM' . Точки A и A' выберем позднее подходящим образом.

Когда тело катится без скольжения, точка P является мгновенным центром скоростей, его ускорение $\mathbf{a}_P = (0, \omega^2(k - k_1)^{-1})$ [1, 2]. Главный вектор сил инерции равен $-m\mathbf{a}_G = m(\omega^2\xi, \omega^2(\eta - (k - k_1)^{-1}))$, главный момент сил инерции равен $-m\sigma\dot{\omega}$.

Согласно принципу Даламбера реакция \mathbf{R} , силы инерции и активные силы, приложенные к телу, постоянно образуют нулевую систему. В частности, это значит, что сумма моментов указанных сил, взятых относительно произвольной точки $A(x, y)$ плоскости, равна нулю:

$$m(x\xi + y\eta - \xi^2 - \eta^2 - \sigma)\dot{\omega} + m\omega^2\left(y\xi - x\eta + \frac{x - \xi}{k - k_1}\right) + \Sigma_A + \text{mom}_A(\mathbf{R}) = 0 \quad (1.2)$$

(Σ_A – главный момент относительно точки A активных сил, действующих на тело). Если точку A взять на прямой критических полюсов [3].

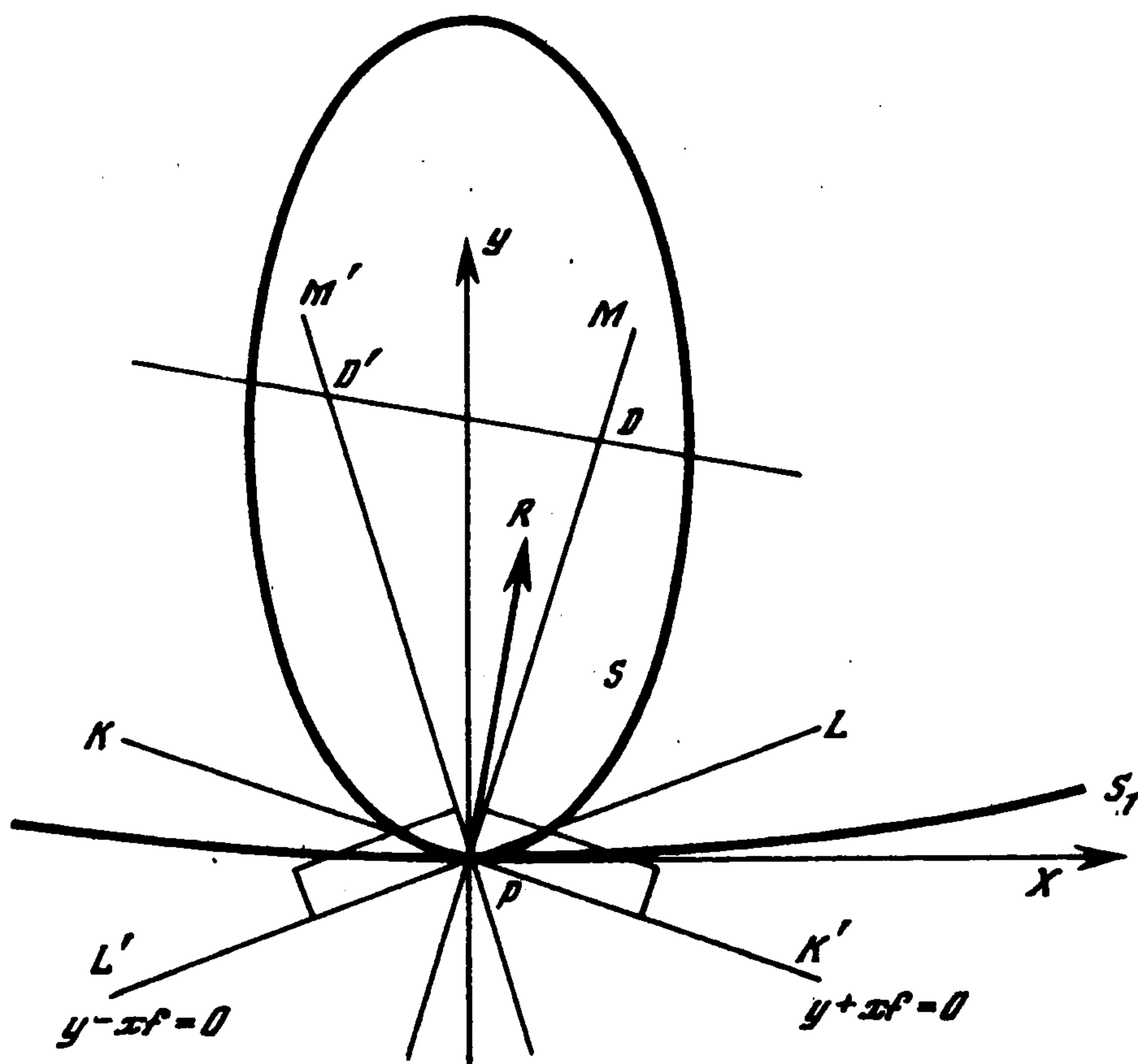
$$x\xi + y\eta = \xi^2 + \eta^2 + \sigma \quad (1.3)$$

то в уравнение (1.2) не войдет угловое ускорение тела.

В неравенствах (1.1) в качестве A и A' возьмем точки пересечения прямой (1.3) с лучами PM и PM' . Обозначим эти точки через D и D' . Имеем

$$y_D = \frac{\xi^2 + \eta^2 + \sigma}{\eta + \xi f}, \quad x_D = y_D f$$

Соответствующие координаты точки D' получаются заменой f на $-f$ в этих формулах.



Фиг. 1.

Теорема. Качение тела без скольжения сохранится, если и только если для точек D и D' , расположенных в конечной части плоскости, выполняются условия

$$(\eta + \xi f) \operatorname{pot}_D(\mathbf{R}) < 0, \quad (\eta - \xi f) \operatorname{pot}_{D'}(\mathbf{R}) > 0 \quad (1.4)$$

Доказательство. Прямые $y + xf = 0$ (KK') и $y - xf = 0$ (LL') разбивают плоскость на четыре области (фиг. 1). Когда центр масс $G(\xi, \eta)$ лежит внутри угла LPK , неравенства (1.4) являются простым следствием условий (1.1).

Если центр масс попадает на луч PK , то прямая (1.3) критических полюсов становится параллельной прямой $x - yf = 0$, точка D уходит в бесконечность. При расположении центра масс внутри угла KPL' имеем $\eta - \xi f > 0$, $\eta + \xi f < 0$. Связь напряжена, и чистое качение продолжится тогда и только тогда, когда $\operatorname{pot}_D(\mathbf{R}) > 0$, $\operatorname{pot}_{D'}(\mathbf{R}) > 0$. Следовательно, неравенства (1.4) выполняются.

Аналогично можно проверить два оставшихся случая, в которых центр масс лежит внутри угла $L'PK'$ или угла LPK' .

Заметим, что, когда одно из соотношений (1.4) становится равенством, линия действия реакции \mathbf{R} совпадает с соответствующей стороной PM или PM' двойного

угла трения. В следующее мгновение тело начнет скользить, хотя теоретически иногда возможно и сохранение качения. Каждый раз вопрос требует дополнительного анализа. Однако, учитывая, что упомянутое предельное положение вектора \mathbf{R} дается значением коэффициента трения f , числовые значения которого определяются экспериментальным путем весьма приближенно, такой анализ для приложений не представляет большого интереса. Поэтому считаем, что при достижении силой \mathbf{R} предельного направления в следующее мгновение начинается скольжение тела.

Наконец, если оба соотношения (1.4) становятся равенствами, то реакция $\mathbf{R} = 0$, что означает ослабление связи. Теорема доказана.

Используя уравнение (1.2) для случаев, когда точка A поочередно совпадает с точкой D и D' , перепишем неравенства (1.4) в виде

$$m\omega^2(\eta + \xi f) \left(y_D \xi - x_D \eta + \frac{x_D - \xi}{k - k_1} \right) + (\eta + \xi f) \Sigma_D > 0 \quad (1.5)$$

$$m\omega^2(\eta - \xi f) \left(y_{D'} \xi - x_{D'} \eta + \frac{x_{D'} - \xi}{k - k_1} \right) + (\eta - \xi f) \Sigma_{D'} < 0$$

Представляет интерес анализ полученных условий на конкретных примерах механических систем.

Замечания. 1°. Условие сохранения качения тела в рассматриваемой задаче было получено Е.А. Болотовым [3] в виде

$$\left| \frac{L\eta + X_1(\xi^2 + \sigma) + Y_1\xi\eta}{-L\xi + X_1\xi\eta + Y_1(\sigma + \eta^2)} \right| < f \quad (1.6)$$

где $X_1 = X + m\omega^2\xi$, $Y_1 = Y + m\omega^2(\eta - (k - k_1)^{-1})$, $(X; Y)$ и L — соответственно главный вектор и главный момент активных сил при приведении к точке $G(\xi, \eta)$. Доказательство условия (1.6) у Е.А. Болотова основывается на других геометрических соображениях.

Нетрудно, однако, убедиться, что условие (1.6) можно записать в виде системы неравенств (1.5). Для этого достаточно заметить, что, если связь напряжена, то $N > 0$, что равносильно условию

$$-L\xi + X_1\xi\eta + Y_1(\sigma + \eta^2) < 0 \quad (1.7)$$

Таким образом, условие Болотова эквивалентно трем неравенствам (1.5), (1.7). В вышеприведенной теореме утверждается большее: условие сохранения контакта тела с опорой является логическим следствием неравенств (1.5).

2°. Большинство немногочисленных теоретических работ по сухому трению [3–5] посвящено проблеме неоднозначности решений уравнений движения (парадокс Пэнлеве в системах с удерживающими связями, явление самоторможения). Есть несколько простых примеров систем (однородный диск, однородный шар на плоскости с трением), в которых чередование качения и скольжения исследуется непосредственно по легко интегрируемым уравнениям движения [6].

2. Качение неоднородного колеса по горизонтальному рельсу. Пусть опорная кривая — горизонтальная прямая линия ($k_1 = 0$), а тело — тяжелый неоднородный круговой диск ($k = 1/r$). Обозначим через φ угол между нисходящей вертикалью и отрезком OG (O — геометрический центр диска).

В безразмерной форме условия (1.5) записываются в виде

$$a_+ \Omega + b_+ > 0, \quad a_- \Omega + b_- < 0; \quad \Omega = \omega^2 r g^{-1} \quad (2.1)$$

где

$$a_{\pm} = (\xi^2 + \eta^2 - \eta + \sigma)(\xi \mp \eta f) + \sigma f, \quad b_{\pm} = -\xi\eta \pm (\eta^2 + \sigma)f$$

$\xi = \rho \sin \varphi$, $\eta = 1 - \rho \cos \varphi$, g – ускорение свободного падения, ρ – отношение длины OG к r , σ – центральный момент инерции тела, поделенный на mr^2 .

В поступательно движущейся системе координат Pxy (P – точка контакта, ось Pu направлена вертикально вверх) траекторией центра масс G диска является окружность C

$$\xi^2 + (\eta - 1)^2 = \rho^2 \quad (2.2)$$

В зависимости от положения точки G на этой окружности, а также числовых значений параметров f , σ , ρ и значения мгновенной угловой скорости вращения диск в следующий момент времени будет продолжать катиться или начнет скользить, или оторвется от опорной прямой. Точный результат определяется условиями (2.1).

При этом значения параметров f , ρ , σ выбираются так, чтобы удовлетворить неравенству $\sigma > \xi\eta f - \xi^2$, $(\xi, \eta) \in C$.

Как показано в [3], при нарушении этого неравенства в системе в режиме скольжения возможны возникновение ударных реакций и в случае удерживающей связи неоднозначность решений (парадокс Пэнлеве).

Исследуя кривую

$$(x^2 + y^2 - y + \sigma)(x - yf) + \sigma f = 0 \quad (2.3)$$

методом Ньютона – Пюизе [7], находим асимптотическое разложение

$$y = \frac{x}{f} + \frac{\sigma f^2}{1 + f^2} \frac{1}{x^2} + \dots$$

откуда следует, что при достаточно больших значениях $|x|$ кривая (2.3) расположена выше своей асимптоты $x - yf = 0$. Отметим также, что при любых значениях параметров кривая всегда пересекает ось Oy в точке $y = 1$ и ось Ox – в единственной точке $-f < x_0 < 0$.

Вид кривой (2.3) при $f = 0,4$ и некоторых значениях σ показан на фиг. 2. При малых значениях σ возможно появление дополнительно замкнутой ветви (этот случай не рассматривается). Кривая

$$-xy + (y^2 + \sigma)f = 0 \quad (2.4)$$

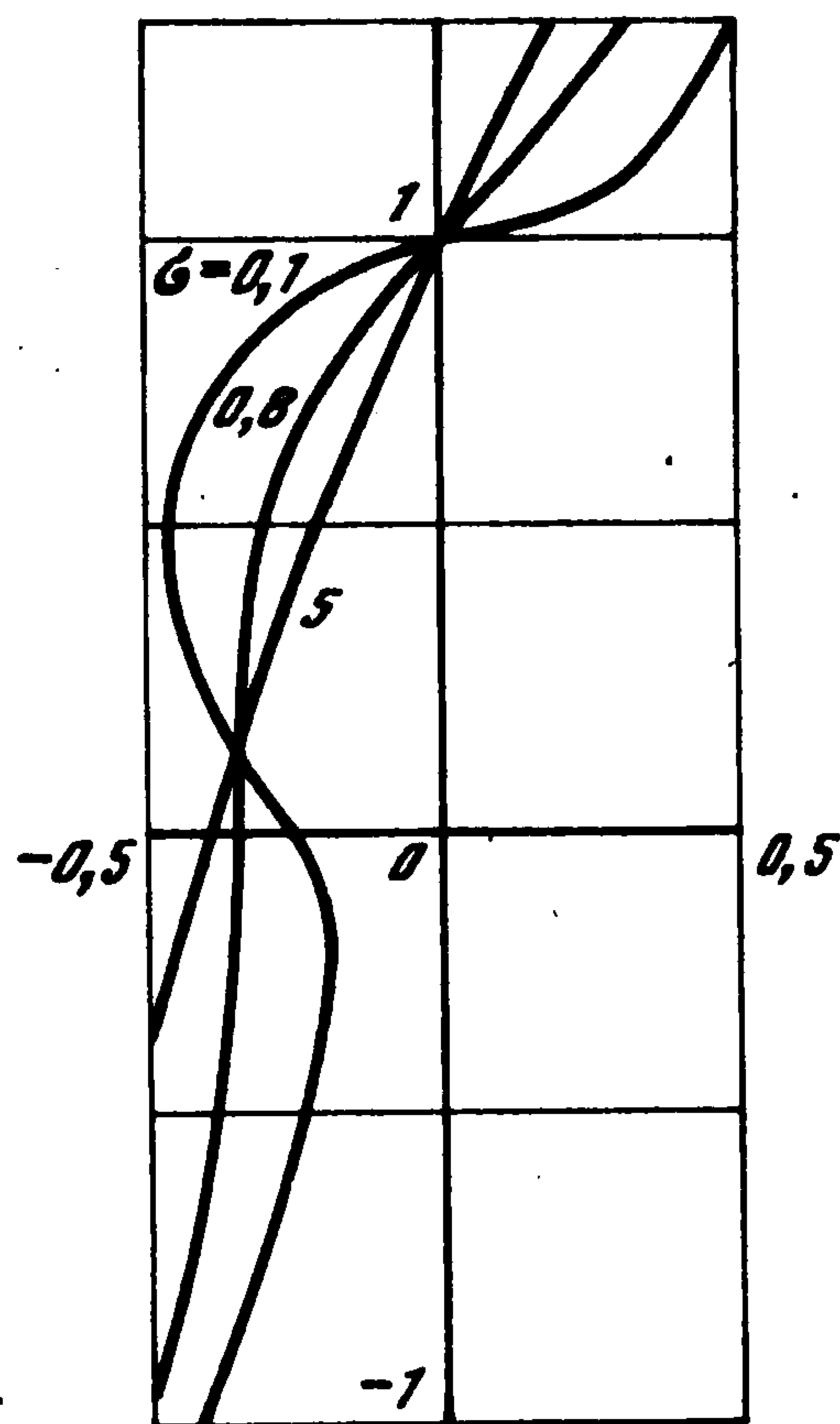
является гиперболой, ветви которой центрально-симметричны относительно начала координат P и имеют асимптоты $y = 0$ и $x - yf = 0$, причем, при всех значениях параметров кривые (2.3) и (2.4) не пересекаются, поскольку левая часть равенства (2.3) равна $(x^2 + y^2 + \sigma - y)\sigma f y^{-1} + \sigma f = (x^2 + y^2 + \sigma)\sigma f y^{-1} \neq 0$.

Заметим, что условия (2.1) инвариантны относительно замены ξ на $-\xi$. Поэтому достаточно провести их анализ при $\xi \geq 0$.

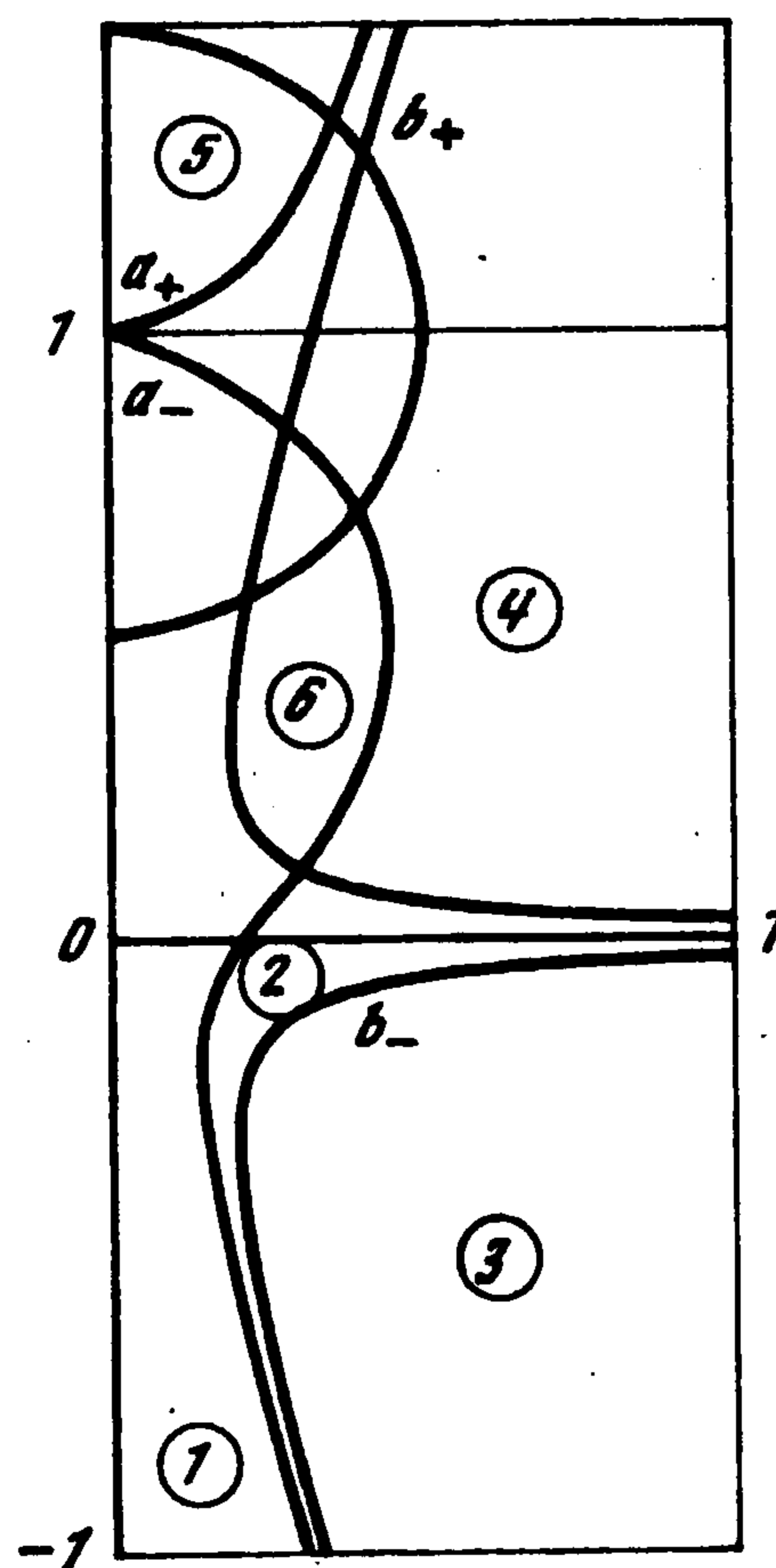
В правой полуплоскости $x > 0$ линия $a_+(x) = 0$ представляется кривой (2.3), а линия $b_+(x) = 0$ – правой ветвью гиперболы (2.4), крайняя левая точка которой имеет абсциссу $2f\sigma^{1/2}$. Линия $a_-(x) = 0$ получается симметричным отражением относительно оси Pu участка кривой (2.3), расположенного в левой полуплоскости. Наконец, линия $b_-(x) = 0$ получается таким же отражением левой ветви гиперболы (2.4).

В зависимости от того, пересекаются линии $b_+(x) = 0$ и $a_-(x) = 0$ или нет, полуплоскость $x > 0$ разбивается указанными четырьмя линиями соответственно на пять или шесть областей (фиг. 3, где $f = 0,3$, $\sigma = 0,1$, $\rho = 0,5$). Обозначим

$$\Omega_1 = -b_+ / a_+, \quad \Omega_2 = -b_- / a_- \quad (2.5)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Пусть мгновенная скорость точки P диска равна нулю. Если центр масс лежит в области 1, то $a_+ > 0$, $b_+ > 0$, $a_- < 0$, $b_- < 0$. Следовательно, условия (2.1) выполняются и скольжение возникнуть не может ни при каком значении угловой скорости вращения диска.

В области 2 выполняются неравенства $a_+ > 0$, $b_+ > 0$, $a_- > 0$, $b_- < 0$. Чистое качение сохранится, если угловая скорость диска не очень велика: $\Omega < \Omega_2$.

В области 3 $a_+ > 0$, $b_+ > 0$, $a_- > 0$, $b_- > 0$. Первое неравенство в (2.1) выполняется, а второе нет. При попадании центра масс в область 3 диск обязательно начнет скользить.

Когда центр масс находится в области 4, чистое качение сохранится при условии, что $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$ (можно непосредственно проверить, что неравенство $\Omega_1 < \Omega_2$ всегда выполнено). В области 6 условие сохранения качения выражается одним неравенством $\Omega > \Omega_1$.

Наконец, в области 5, т.е. когда центр масс диска расположен достаточно высоко, имеем, $a_+ < 0$, $b_+ > 0$, $a_- > 0$, $b_- < 0$. Условия (2.1) принимают вид $\Omega < \Omega_1$ и $\Omega < \Omega_2$. При этом в рассматриваемой области справедливо неравенство $\Omega_1 > \Omega_2$, т.е.

$$\frac{\xi\eta - (\eta^2 + \sigma)f}{(\xi^2 + \eta^2 - \eta + \sigma)(\xi - \eta f) + \sigma f} > \frac{\xi\eta + (\eta^2 + \sigma)f}{(\xi^2 + \eta^2 - \eta + \sigma)(\xi + \eta f) - \sigma f}$$

(оно действительно выполняется, так как эквивалентными преобразованиями приводится к очевидному $(\sigma + \xi^2 + \eta^2)2\xi\eta\sigma f > 0$). Следовательно, качение сохраняется, если $\Omega < \Omega_2$. Напротив, при большой угловой скорости $\Omega > \Omega_1$ оба условия (2.1) нарушаются и связь ослабевает. А в промежутке $\Omega_2 < \Omega < \Omega_1$ диск начнет скользить, не отрываясь от опоры.

При $\xi < 0$ картина смены качения скольжением совершенно симметрична.

Условия сохранения качения можно было бы выразить не с помощью величины Ω ,

являющейся квадратом безразмерной угловой скорости диска, а через постоянную h интеграла энергии $(\xi^2 + \eta^2 + \sigma)\Omega = 2(h - \eta)$.

Такая задача для рассматриваемой системы при $\rho > 1$ ставилась в [8], но из-за аналитических трудностей была решена только в частном случае, когда маятник (диск), совершая колебания со все возрастающей амплитудой, начинает скользить, достигнув положения наибольшего отклонения от равновесия. В принятых здесь обозначениях это положение соответствует точке пересечения окружности (2.2) с границей области 3.

3. Вращение тела с цилиндрическими опорами вокруг вертикали при действии постоянного вращающего момента. Пусть опора – расположенный вертикально неподвижный круговой цилиндр радиуса r_1 , на который твердое тело надето своим цилиндрическим отверстием радиуса $r > r_1$. Такое тело назовем "шайбой". А тело с цапфами радиуса r , вставленными в два неподвижных и вертикально расположенных соосных цилиндрических отверстия радиуса $r_1 > r$, назовем "валом". Центр опоры обозначим через O_1 , а центр отверстия (цапфы) тела – через O . На тело действует пара сил с постоянным по величине моментом M , направленным вертикально.

В безразмерной форме условия (1.5) записываются в виде (2.1), где

$$a_{\pm} = (\xi^2 + \eta^2 - \eta l + \sigma)(\xi \mp \eta f) \pm \sigma l f, \quad b_{\pm} = M(\eta \pm \xi f)$$

Выражения для a_+ и a_- содержат еще один безразмерный параметр $l = jr_1(r_1 - r)^{-1}$ ($j = 1$ для "вала", $j = -1$ для "шайбы"), который характеризует зазор в соединении. Для "вала" $1 < l < +\infty$, для "шайбы" $0 < l < +\infty$. Когда зазор стремится к нулю, параметр l в обоих случаях стремится к $+\infty$.

Положение тела, когда связь напряжена, а тело может скользить, определяют два угла φ и θ . Если P – точка касания тела с опорой, то, как указывалось выше, положительная полуось Pu подвижной системы координат Pxu направлена внутрь движущегося тела. Угол θ отсчитывается от произвольно выбранного в плоскости движения неподвижного луча O_1H против часовой стрелки до отрицательной полуоси Pu , угол φ – от отрицательной полуоси Pu до направления OG , фиксированного в теле.

В случае чистого качения из условия $r_1 d\theta = -r d\varphi$ имеем $\theta = r(c - \varphi)/r_1$ где постоянная интегрирования c (дополнительный параметр) является угловой координатой φ центра масс тела в момент, когда отрицательная полуось Pu сонаправлена с неподвижным лучом O_1H .

Текущие координаты центра масс G тела в подвижных осях Pxu задаются формулами $\xi = \rho \sin \varphi$, $\eta = j - \rho \cos \varphi$. Таким образом, неравенства (2.1) не содержат θ . Это обстоятельство упрощает анализ. В осях Pxu уравнение траектории точки G

$$\xi^2 + (\eta - j)^2 = \rho^2 \tag{3.1}$$

Исследуем условия (2.1) в зависимости от положения точки G на этой окружности и значений параметров f , σ , ρ и мгновенной угловой скорости вращения тела в практически наиболее интересном случае, когда величина зазора мала, т.е. $l \gg 1$.

Кривая

$$(x^2 + y^2 - yl + \sigma)(x - yf) + \sigma lf = 0 \tag{3.2}$$

имеет асимптотическое представление

$$y = \frac{x}{f} + \frac{\sigma(lf)^2}{1 + (lf)^2} \frac{1}{x^2} + \dots,$$

и при любых значениях параметров содержит точку $(0, l)$.

Можно показать, учитывая положительность значений параметров $0 < f < 1$, σ, l , что рассматриваемая кривая (точнее, ее ветви, расположенные в конечной области)

не имеет особых точек. Вид кривой (3.2) при $f = 0,4$, $\sigma = 1$ и значениях параметра $l = 4, 7, 9, 11$ приведены на фиг. 4. Любопытно появление в первой четверти замкнутой ветви при уменьшении зазора в соединении.

Этот факт нетрудно доказать аналитически. Перепишав уравнение (3.2) в виде

$$y^3 - (l + xf^{-1})y^2 + (\sigma + x^2 + xlf^{-1})y - (x^3 + \sigma x)f^{-1} - \sigma l = 0$$

и выполнив стандартную замену $y = z + (l + xf^{-1})/3$, получим уравнение $z^3 + pz + q = 0$. Известно, что это уравнение имеет единственный вещественный корень, если дискриминант $-4p^3 - 27q^2 < 0$ и три корня при выполнении противоположного строгого неравенства. Имеем

$$\begin{aligned} (4p^3 + 27q^2)f^4 = & 4(f^2 + 1)^2 x^6 - 8fl(f^2 + \\ & + 1)x^5 + [(12\sigma - l^2)f^4 + 2(8\sigma + l^2)f^2 + 4\sigma - \\ & - l^2]x^4 + 2lf[(10\sigma + l^2)f^2 - 2\sigma + l^2]x^3 + \\ & + f^2[4\sigma(3\sigma - 5l^2)f^2 + 8\sigma^2 - 4\sigma l^2 - \\ & - l^4]x^2 + 4f^3\sigma l(7\sigma - l^2)x + 4f^4\sigma(\sigma + l^2)^2 \end{aligned}$$

Следовательно, при фиксированных значениях параметров σ, f и неограниченном возрастании l появляется дополнительная ветвь в конечной по x части плоскости, в которой $x^2 > 4\sigma f^2$. Более того, при достаточно больших, но конечных значениях l эта ветвь является замкнутой. Она лежит в первой четверти, так как, если переписать (3.2) как многочлен по степеням x и вычислить дискриминант соответствующего приведенного уравнения, то он оказывается равным $4y^3l^3 + O(l^2)$. Поэтому при $l \geq 1$ уравнение (3.2) имеет три корня $x(y)$, только если $y > 0$. Причем, два из них больше $yf < lf$, поскольку при фиксированных значениях $y < l$ и параметров левая часть равенства (3.2) дважды меняет знак, когда x возрастает от значения yf до бесконечности.

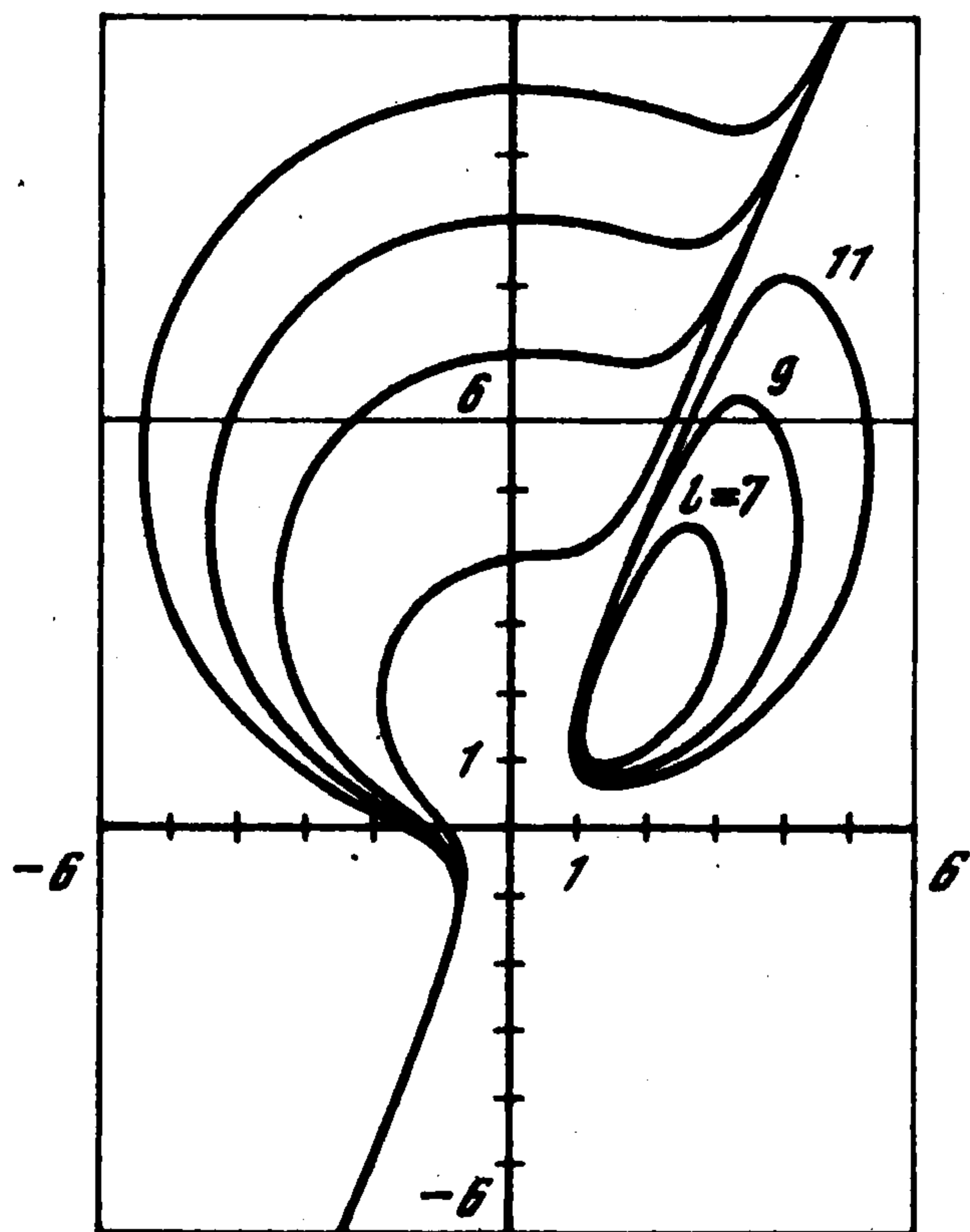
При $l \geq 1$ уравнение (3.2) дает две ветви

$$-y^2 + xyf^{-1} - \sigma + O(1/l) = 0$$

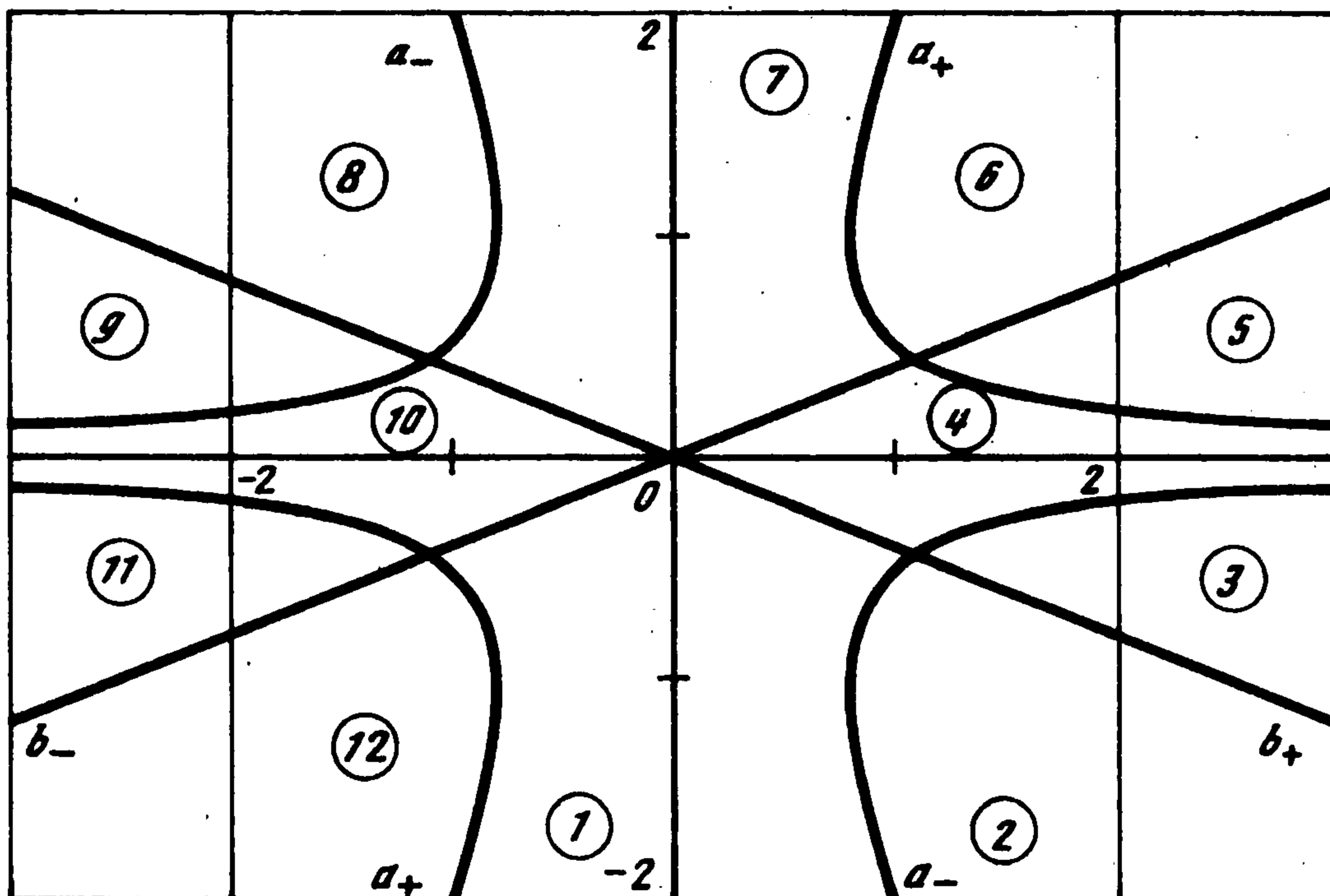
изучаемой кривой. Ветвь в первой четверти образуется из замкнутой петли, описанной выше. Ветвь в третьей четверти представляет часть кривой $a_+(x, y) = 0$, расположенную ниже оси Px . Другая ее часть удаляется в бесконечность.

Кривая $-y^2 + xyf^{-1} - \sigma = 0$ обладает двумя асимптотами $y = 0$ и $y = xf^{-1}$. Ее ближайшие к оси Pu точки имеют абсциссы $x = \pm 2f\sigma^{1/2}$.

На фиг. 5 для случая $l = 1000$, $f = 0,4$, $\sigma = 1$ нарисованы кривые $a_+(x, y) = 0$, $a_-(x, y) = 0$ и прямые линии $b_+(x, y) = 0$, $b_-(x, y) = 0$, которые разбивают плоскость Pxy на 12 областей. По аналогии со сказанным в разд. 2 нетрудно сформулировать условия сохранения чистого качения тела. Приведем окончательный результат.



Фиг. 4



Фиг. 5

Используя обозначения (2.5), при $l \rightarrow +\infty$ находим, что $\Omega_1 \rightarrow 0$, $\Omega_2 \rightarrow 0$. Поэтому, когда величина зазора очень мала, условия вида $\Omega > \Omega_1$ или $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$ практически не реализуемы. По этой причине, если центр масс тела лежит внутри областей, ограниченных ветвями гипербол, и $\Omega \neq 0$, то тело скользит. Пусть $M > 0$. Тогда в области 1 значение сохранится при $\Omega > \Omega_1$, а в области 2 – при $\Omega > \Omega_2$. Если $M < 0$, неравенства меняются местами.

Таким образом, в рамках рассматриваемой механической модели в случае малого зазора достаточно хорошо сбалансированное тело (например, при $\rho < 2f\sigma^{1/2}$) как "вал", так и "шайбу" можно разогнать (или затормозить) до требуемого значения угловой скорости без потерь механической энергии на преодоление трения скольжения, возникающего в опорах. Более того, в отсутствие внешнего активного момента тело будет продолжать катиться без скольжения. Главная техническая трудность заключается в реализации условия отсутствия скольжения в какой-либо произвольный момент времени, когда $\omega \neq 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (МАК000).

ЛИТЕРАТУРА

1. Валле Пуссен Ш.-Ж. Лекции по теоретической механике. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 340 с.
2. Сумбатов А.С. О движении систем с сухим трением // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1986. С. 63–76.
3. Болотов Е.А. О движении материальной плоской фигуры, стесненной связями с трением // Матем. сб. 1906. Т. 25. № 4. С. 562–708.
4. Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: ГИТТЛ, 1954, 316 с.
5. Pollak H. Les liaisons non holonomes et la paradoxe de Painlevé // Bull. Cl. Sc. Acad. Roy. Belgique, sér. 5. 1961. V. 47. № 7. P. 763–771.
6. Анпель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960, 487 с.
7. Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике. Т. 1. М.: ГИФМЛ, 1958. 284 с.
8. Мак-Миллан В.Д. Динамика твердого тела. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 468 с.