УДК 531.37

© 1995 г. В.М. Матросов, И.А. Финогенко

О ПРАВОСТОРОННИХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ СКОЛЬЖЕНИЯ

В развитие теории Пэнлеве [1] рассматриваются вопросы существования, продолжимости и единственности правосторонних решений дифференциальных уравнений динамики, а при дополнительном условии – и уравнений движения голономных механических систем с трением скольжения [2]. Ускорение в классической механике определяется по существу как правая производная скорости (см. [3, 4]). Поэтому содержательному смыслу задач динамики механических систем с трением скольжения наиболее всего соответствует определение решения дифференциальных уравнений, использующее понятие правой производной [5].

С математической точки зрения правосторонние решения дифференциальных уравнений движения механических систем с трением скольжения, в которых доопределение обобщенных сил трения производится в соответствии с законом Кулона, необходимо рассматривать в проблеме продолжения вправо локальных (классических) решений, поскольку обобщенные ускорения могут терпеть разрывы в точках, где обобщенные скорости обращаются в нуль (см. [6]). Для особых начальных состояний, в которых силы трения в покое и в движении совпадают, классических решений может и не существовать даже локально.

1. Уравнения динамики. Уравнения динамики исследуемой механической системы с трением скольжения для обобщенных координат $q = (q^1,\ldots, q^k)$ записываются в виде

$$\sum_{i=1}^{k} a_{si}(t,q)\ddot{q}^i = Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q}) + g_s(t,q,\dot{q}) + Q_s^A(t,q,\dot{q}), \quad s \in \mathcal{N}_0$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_{si}(t,q)\ddot{q}^i = f_s(t,q^s,0)|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})|\operatorname{sgn} Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q}) + g_s(t,q,\dot{q}) + Q_s^A(t,q,\dot{q}), \tag{1.1}$$

$$s \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_0$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_{si}(t,q)\ddot{q}^i = f_s(t,q^s,0)|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})|\operatorname{sgn} \dot{q}^s + g_s(t,q,\dot{q}) + Q_s^A(t,q,\dot{q}), \quad s \in (1,\ldots,k_*) \setminus \mathcal{N}$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_{si}(t,q)\ddot{q}^i = g_s(t,q,\dot{q}) + Q_s^A(t,q,\dot{q}), \quad s = k_* + 1,\ldots,k$$

где $A(t, q) = [a_{ij}(t, q)]_1^k$ – непрерывно-дифференцируемая, симметричная, положительно определенная матрица коэффициентов инерции, $Q^A(t, q, \dot{q})$, $g(t, q, \dot{q})$ – непрерывные вектор-функции, представляющие активные силы, обобщенные гироскопические и другие силы и члены; $Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q})$ – обобщенные силы трения при относительном покое, которые выражаются формулами

$$Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q})=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{k}a_{si}(t,q)\ddot{q}^i-[g_s(t,q,\dot{q})+Q_s^A(t,q,\dot{q})]_{\dot{q}^s=0}$$

$f_s(t,q^s,\dot{q}^s)$, $s=1,\ldots,k_*$, $1\leqslant k_*\leqslant k$ – коэффициенты трения (непрерывные функции); $|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})|$ – модули нормальных реакций (в точках соприкосновения трущихся тел), являющиеся непрерывными функциями вместе со своими частными производными по $\ddot{q}$ в области $\{(t,q,\dot{q},\ddot{q})\colon |N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})|\neq 0\}$;

$$\mathcal{N}=\mathcal{N}(\dot{q})\overset{\Delta}{=}\{s\in(1,\ldots,k_*)\colon \dot{q}^s=0\}$$

$$\mathcal{N}_0=\mathcal{N}_0(t,q,\dot{q},\ddot{q})\overset{\Delta}{=}\{s\in\mathcal{N}\colon |Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q})|\leqslant f_s(t,q^s,0)|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})|\}$$

Если выполняется неравенство

$$f_s(t,q^s,0)|\partial|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})|/\partial\ddot{q}^s|<a_{ss}(t,q) \tag{1.2}$$

для $s\in\mathcal{N}(\dot{q})\setminus\mathcal{N}_0(t,q,\dot{q},\ddot{q})$ и $(t,q,\dot{q},\ddot{q})$ из области определения $\Omega\times R^k$, таких, что $|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})|\neq 0$, то, как доказано в [2], уравнения (1.1) эквивалентны уравнениям движения механической системы с трением скольжения, описанным в [2], т.е. решения этих систем в том или ином смысле (классические, правосторонние) совпадают.

Вводятся обозначения

$$\mathcal{N}_1=\mathcal{N}_1(t,q,\dot{q},\ddot{q})\overset{\Delta}{=}\{s\in\mathcal{N}_0\colon |Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q})|=f_s(t,q^s,0)|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})|\}$$

$[A(t,q)]$ (k_*) – подматрица матрицы A, полученная из нее вычеркиванием первых k_* строк и столбцов. Как и $A(t,q)$, $[A(t,q)]$ (k_*) – положительно определенная и, следовательно, невырожденная матрица (см. [7]). Через $[\tilde{a}_{k_*+i,k_*+j}]_1^{k-k_*}$ – обозначим матрицу, обратную к $[A(t,q)](k_*)$.

Разрешая четвертую группу уравнений (1.1) относительно $\ddot{q}^s$, $s=k_*+1,\ldots,k$, перепишем (1.1) в эквивалентном полуявном виде:

$$\begin{aligned}
&\ddot{q}^s=0,\quad s\in\mathcal{N}_0\\
&\ddot{q}^s=a_{ss}^{-1}(t,q)[f_s(t,q^s,0)|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})|\operatorname{sgn}Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q})-Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q})],\quad s\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{N}_0\\
&\ddot{q}^s=a_{ss}^{-1}(t,q)[-f_s(t,q^s,0)|N_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})|\operatorname{sgn}\dot{q}^s-Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q})],\quad s\in(1,\ldots,k_*)\setminus\mathcal{N}\\
&\ddot{q}^s=\sum_{i=k_*+1}^{k}\tilde{a}_{si}(t,q)[g_i(t,q,\dot{q})+Q_i^A(t,q,\dot{q})]-\sum_{\nu=1}^{k_*}\sum_{i=k_*+1}^{k}\tilde{a}_{si}(t,q)a_{i\nu}(t,q)\ddot{q}^\nu,\quad s=k_*+1,\ldots,k
\end{aligned} \tag{1.3}$$

2. Разрешимость уравнений динамики относительно ускорений. Обозначим $F_s(t,q,\dot{q},\ddot{q})$ $(s=1,\ldots,k)$ правые части уравнений (1.3). Для $s=k_*+1,\ldots,k$ функции F_s не зависят от переменных $\ddot{q}^{k_*+1},\ldots,\ddot{q}^k$. Поэтому можем положить $\ddot{q}^s=F_s(t,q,\dot{q},\ddot{q}^1,\ldots,\ddot{q}^{k_*})$ для $s=k_*+1,\ldots,k$ и с учетом этого перейти от первых трех групп уравнений (1.3) к новой системе уравнений относительно $\ddot{q}^1,\ldots,\ddot{q}^{k_*}$. В результате получим уравнения

$$\ddot{q}^s=F_s(t,q,\dot{q},\ddot{q}^1,\ldots,\ddot{q}^{k_*},\ F_{k_*+1},\ldots,F_k),\quad s=1,\ldots,k_* \tag{2.1}$$

Определив из (2.1) неявно заданные функции $\ddot{q}^s=G_s(t,q,\dot{q})$ $(s=1,\ldots,k_*)$ (если они существуют), сможем получить векторную функцию $\ddot{q}=G(t,q,\dot{q})$, удовлетворяющую

(1.3) или эквивалентно, (1.1), положив $G_s = F_s(t,q,\dot q,G_1,\dots,G_{k_*})$ для $s = k_* + 1,\dots, k$. Так как F_s ($s = k_* + 1,\dots, k$) – непрерывные по совокупности аргументов функции, то свойства непрерывности функции $G(t,q,\dot q)$ будут определяться соответствующими свойствами функций $G_s(t, q, \dot q)$ ($s = 1,\dots, k_*$).

Пусть $(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$ – точка, такая, что $|N_s(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)|\neq 0$ ($s \in (1,\dots, k_*)\setminus(\mathcal{N}_0\setminus\mathcal{N}_1)$), удовлетворяет системе уравнений (1.1). Тогда для $s \in \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_1(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$ выполняется условие $Q_s^{T0}(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)\neq 0$. Определим множество индексов

$$\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_2(t,q,\dot q,G,t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)\overset{\Delta}{=}(\mathcal{N}_0(t,q,\dot q,G)\setminus \mathcal{N}_1(t,q,\dot q,G))\cap \mathcal{N}_1(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$$

множество направлений в пространстве

$$\Gamma(t,q,\dot q,\ddot q)=\{\upsilon\in R^k:\upsilon_s=0, s\in\mathcal{N}_0\setminus\mathcal{N}_1;\ -\operatorname{sgn}Q_s^{T0}(t,q,\dot q,\ddot q)\upsilon_s\geqslant 0,\quad s\in\mathcal{N}_1\cup(\mathcal{N}\setminus\mathcal{N}_0)\} \tag{2.2}$$

и положим $\Gamma_0=\Gamma(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$. Для произвольного $\delta>0$ положим

$$S_\delta = S_\delta(\ddot q_0)\overset{\Delta}{=}\{\ddot q:\|\ddot q-\ddot q_0\|<\delta\}$$

$$D_\delta = D_\delta(t_0,q_0,\ddot q_0)\overset{\Delta}{=}\{(t,q,\dot q):t_0\leqslant t<\delta$$
$$\|q-q_0\|<\delta,\ \ \|\dot q-\dot q_0\|<\delta,\ \ \dot q\in\Gamma_0\}$$

где $\|\cdot\|$ – какая-либо норма в пространстве R^k.

Рассмотрим систему неравенств в точке $(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$ для всех $s \in (1,\dots, k_*)\setminus(\mathcal{N}_0\setminus\mathcal{N}_1)$

$$|a_{s\nu}\gamma_{s\nu}-f_s\frac{\partial|N_s|}{\partial\ddot q^\nu}\Delta_s+\sum_{j=k_*+1}^{k}\left(a_{sj}-f_s\frac{\partial|N_s|}{\partial\ddot q^j}\Delta_s\right)\sum_{i=k_*+1}^{k}\tilde a_{ji}a_{i\nu}|<\frac{a_{ss}e_{s\nu}}{k_*(n-1)} \tag{2.3}$$

$$\gamma_{s\nu}=\begin{cases}0, & s=\nu;\\ 1, & s\neq\nu;\end{cases}\quad \Delta_s=\begin{cases}-\operatorname{sgn}Q_s^{T0}(t,q,\dot q,\ddot q) & s\in\mathcal{N}\setminus(\mathcal{N}_0\setminus\mathcal{N}_1)\\ \operatorname{sgn}\dot q^s, & s\in(1,\dots,k_*)\setminus\mathcal{N}\end{cases}$$

если $\nu = 1,\dots, k_*$, где $e_{s\nu}$ – единица соответствующей размерности (согласующая размерности левой и правой частей неравенств), n – количество индексов в множестве $\mathcal{N}_1$ при условии $n > 2$ (если $n = 1, 2$ или $\mathcal{N}_1 = \phi$, то полагаем $n = 2$). Отметим, что неравенства (2.3) всегда будут иметь место для достаточно малых коэффициентов трения f_s и внедиагональных элементов $a_{s\nu}$ ($s, \nu = 1,\dots, k_*, s\neq\nu$) матрицы A.

Если все функции, в виде которых реализуются F_s, из правой части (2.1) удовлетворяют условию Липшица по $(\ddot q^1,\dots,\ddot q^{k_*})$ с одной и той же константой $0\leqslant L<1$, то в силу непрерывности по $(\ddot q^1,\dots,\ddot q^{k_*})$ этим же свойством будут обладать и сами функции F_s. С учетом сказанного можно показать, что неравенства (2.3), выполненные в точке $(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$, являются достаточными для сжимаемости каждой функции F_s из правой части (2.1) по $(\ddot q^1,\dots,\ddot q^{k_*})$ (и всех функций, в виде которых реализуется F_s в точке $(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$) по норме $\|\ddot q\|_1=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k_*}|\ddot q^i|$ в некоторой окрестности точки $(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$ при каждых фиксированных $(t,q,\dot q)\in D_\delta$. Тогда, очевидно, векторная функция $F=(F_1,\dots,F_{k_*})$ будет сжимающей по $(\ddot q^1,\dots,\ddot q^{k_*})$, если в пространстве R^{k_*} значений этой функции задана норма $\|\cdot\|_1$. Теперь, используя равенство $\ddot q_0 = F(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$ и принцип сжимающих отображений, заключаем, что существуют сколь угодно малые числа $\delta_0>0$, $\delta_1>0$, такие, что на множестве D_{δ_0}

определена единственная функция $G(t, q, \dot{q})$ со значениями в S_{δ_1}, являющаяся решением (1.3).

Таким образом, для $(t,q,\dot{q},\ddot{q}) \in D_{\delta_0} \times S_{\delta_1}$ уравнения (1.3) равносильны уравнению $\ddot{q} = G(t,q,\dot{q})$. При этом числа δ_0 и δ_1 можно выбрать такими, что

$$\operatorname{sgn} Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\ddot{q}) = \operatorname{sgn} Q_s^{T0}(t_0,q_0,\dot{q}_0,\ddot{q}_0) \tag{2.4}$$

для всех $s \in \mathcal{N}_1(t_0,q_0,\dot{q}_0,\ddot{q}_0)$, $(t,q,\dot{q},\ddot{q}) \in D_{\delta_0} \times S_{\delta_1}$.

Отметим ряд важных свойств функции G:

1) G непрерывна в каждой точке $(t,q,\dot{q}) \in D_{\delta_0}$, для которой $\mathcal{N}_2(t,q,\dot{q},G,t_0,q_0,\dot{q}_0,\ddot{q}_0) = \phi$;

2) в каждой точке $(t,q,\dot{q}) \in D_{\delta_0}$, функция G имеет конечное число предельных значений, не превышающее 2^n, где n – число элементов множества $\mathcal{N}_1(t_0,q_0,\dot{q}_0,\ddot{q}_0)$;

3) если $\overline{G}$ – предельное значение функции G в точке $(t,q,\dot{q}) \in D_{\delta_0}$, отличное от $G(t,q,\dot{q})$, то $\mathcal{N}_2 \supset I^+ \neq \phi$ (существует индекс $s_0 \in I^+$) и выполняется неравенство

$$\sum_{s\in I^-} |\overline{G}_s| < \sum_{s\in I^+} |\overline{G}_s| \tag{2.5}$$

где

$$I^+ = I^+(t,q,\dot{q},\overline{G}) \triangleq \{s \in \mathcal{N}_2 : \overline{G}_s \neq 0,\ \operatorname{sgn} \overline{G}_s = Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\overline{G})\}$$

$$I^- = I^-(t,q,\dot{q},\overline{G}) \triangleq \{s \in \mathcal{N}_2 : \overline{G}_s \neq 0,\ \operatorname{sgn} \overline{G}_s = -\operatorname{sgn} Q_s^{T0}(t,q,\dot{q},\overline{G})\}$$

а левая часть (2.5) полагается равной нулю, если $I^- = \phi$.

Прямым следствием свойства 3 является следующее утверждение.

Утверждение 2.1. Для каждой точки разрыва $(t,q,\dot{q}) \in D_{\delta_0}$ функции G существует вектор $a \in R^k$ со свойствами:

1) $\langle a, G(t,q,\dot{q})\rangle = \langle a, \dot{q}\rangle = 0$;

2) $\langle a, \upsilon\rangle \geqslant 0$ для всех $\upsilon \in \Gamma_0$;

3) $\langle a, \overline{G}(t,q,\dot{q})\rangle < 0$ для всех предельных значений $\overline{G}(t,q,\dot{q})$ функции G в точке $(t, q, \dot{q})$, не совпадающих с $G(t, q, \dot{q})$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение.

Действительно, если $(t,q,\dot{q})$ – точка разрыва функции G, то из определения множеств $\mathcal{N}_2$, Γ_0, неравенства (2.5) и (2.4) вытекает, что указанными свойствами обладает вектор a, компоненты которого $-\operatorname{sgn} Q_s^{T0}(t_0,q_0,\dot{q}_0,\ddot{q}_0)$ для $s \in \mathcal{N}_2(t,q,\dot{q},\ddot{q},G,t_0,q_0,\dot{q}_0,\ddot{q}_0)$ и остальные компоненты нулевые.

3. Теорема существования решения. Для непрерывной функции q: $[t_0, \tau) \to R^k$ введем обозначение правой производной в момент $t \in [t_0, \tau)$

$$D^+q(t) \triangleq \lim_{\Delta t\to +0} \frac{1}{\Delta t}[q(t+\Delta t) - q(t)]$$

Под правосторонним решением задачи Коши

$$\ddot{q} = G(t,q,\dot{q}), q(t_0) = q_0, \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0 \tag{3.1}$$

определенном на $[t_0, \tau)$, понимается непрерывная дифференцируемая справа функция $(q(t), \dot{q}(t))$, удовлетворяющая уравнениям

$$D^+q(t) = \dot{q}(t), \quad D^+\dot{q}(t) = G(t,q(t),\dot{q}(t))$$

для всех $t \in [t_0, \tau)$ (см. [6]).

Всякое правостороннее решение является также решением Каратеодори (понимаемым в обычном смысле (см., например, [6, 8])).

Теорема 3.1. Пусть выполняются предположения разд. 1 о непрерывности и дифференцируемости функций в (1.1) и существует точка $(t_0, q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0)$, удовлетворяющая системе (1.1), в которой $|N_s| \neq 0$, $s \in (1,..., k_*)\backslash(\mathcal{N}_0\backslash\mathcal{N}_1)$ и выполняются условия (2.3). Тогда существует число $\delta_0 > 0$, такое, что дифференциальные уравнения (1.1) локально однозначно разрешимы относительно $\ddot{q}$ и приводятся к виду (3.1) при $(t, q, \dot{q}) \in D_{\delta_0}$ (задача Коши для них формулируется как (3.1)) и существует правостороннее решение $(q(t), \dot{q}(t))$ задачи Коши (3.1) на некотором промежутке $[t_0, \tau)$, $\tau > t_0$, являющееся правосторонним решением уравнений динамики (1.1), а при выполнении условий (1.2) и правосторонним решением уравнений движения механической системы с трением скольжения.

Доказательство. Утверждение теоремы о разрешимости уравнений (1.1) и приведении их к виду (3.1) обосновано в разд. 2. Для того чтобы доказать существование правостороннего решения задачи (3.1), перейдем к дифференциальному включению

$$\ddot{q} \in H(t,q,\dot{q}), \quad q(t_0) = q_0, \quad \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0, \tag{3.2}$$

где $H(t, q, \dot{q})$ – выпуклая оболочка предельных значений функции G в точке $(t, q, \dot{q})$ включая значение $G(t, q, \dot{q})$).

Существование локального решения Каратеодори $(q(t), \dot{q}(t))$ задачи (3.2) следует из теоремы 1 [9]. Далее, используя теорему 1 ([8], с. 56]), заключаем

$$\operatorname{Cont}\dot{q}(t) \subset H(t,q(t),\dot{q}(t)) \tag{3.3}$$

для всех $t \in [t_0, \tau)$, где $\tau > t_0$ – некоторое число, $\operatorname{Cont}\dot{q}(t)$ – контингенция функции $\dot{q}(\cdot)$ в точке t (при $t = t_0$ – правая контингенция $C^+\dot{q}(t)$). Теперь, если $(t, q(t), \dot{q}(t))$ – точка непрерывности функции G, то $G(t, q(t), \dot{q}(t)) = H(t, q(t), \dot{q}(t))$ и поэтому из (3.3) получаем

$$\operatorname{Cont}\dot{q}(t) = \ddot{q}(t) = G(t,q(t),\dot{q}(t)) \tag{3.4}$$

Если же $(t, q(t), \dot{q}(t))$ – точка разрыва G, то в соответствии с утверждением 2.1, все предельные значения функции G, не совпадающие с G в точке $(t, q(t), \dot{q}(t))$, строго отделимы от множества Γ_0 гиперплоскостью $L = \{\upsilon \in R^k\colon \langle a, \upsilon\rangle = 0\}$. Поскольку $G(t, q(t), \dot{q}(t)) \in \Gamma_0$, $\dot{q}(t) \in L$ и $\dot{q}(t+h) \in \Gamma_0$ при малых $h > 0$, то $H(t, q(t), \dot{q}(t)) \cap \Gamma_0 =$ $= G(t, q(t), \dot{q}(t))$ и $C^+\dot{q}(t) \subset \Gamma_0$. Тогда из (3.3) получаем

$$T^+\dot{q}(t) = D^+q(t) = G(t,q(t),\dot{q}(t))$$

Последнее равенство вместе с (3.4) завершает доказательство существования правостороннего решения задачи (3.1).

Согласно лемме 3.1 [2], при условии (1.2), это решение будет также решением (правосторонним) и уравнений движения механических систем с трением скольжения, выписанных в [2]. Теорема доказана.

4. Продолжимость правосторонних решений. Определение продолжения решения, непродолжимого решения, правого максимального интервала существования решения понимаются в обычном смысле (см., например, [10]).

Будем говорить, что непродолжимое вправо правостороннее решение $(q_\omega(\cdot), \dot{q}_\omega(\cdot))$ задачи (1.1), определенное на $[t_0, \omega)$, стремится к границе области Ω, если для любого компактного множества $W \subset \Omega$ существует момент $t_w < \omega$, такой, что $(t, q_\omega(t), \dot{q}_\omega(t)) \notin W$ для всех $t_w < t < \omega$. Если при этом $(q_\omega(\cdot), \dot{q}_\omega(\cdot))$ продолжение некоторого решения $(q(\cdot), \dot{q}(\cdot))$ системы уравнений (1.1), то $(q(\cdot), \dot{q}(\cdot))$ будем называть продолжимым до границы области Ω.

Теорема 4.1. Пусть выполняются предположения разд. 1 непрерывности и дифференцируемости функций, входящих в уравнение (1.1), и для всех $(t,q,\dot q,\ddot q) \in \Omega \times R^k$, таких, что $|N_s(t,q,\dot q,\ddot q)| \neq 0$ выполняются неравенства (2.3) с правыми частями, умноженными на некоторую величину $L = L(t, q,\dot q)$, $0 \leqslant L < 1$. Тогда в каждой точке $(t, q, \dot q) \in \Omega$ уравнения (1.1) однозначно разрешимы относительно $\ddot q$ (приводятся к виду (3.1)) и для любых начальных данных $(t_0, q_0, \dot q_0) \in \mathcal{A} \triangleq \{(t, q, \dot q) \in \Omega, |N(t, q, \dot q, G)| \neq 0, s \in \mathcal{N}_1(t, q, \dot q, G)\}$ существует локальное правостороннее решение задачи Коши (1.1).

Действительно, к $F = (F_1,..., F_{k_*})$, где $F_1,..., F_{k_*}$ – функции, стоящие в правых частях (2.1), применим принцип сжимающих отображений по переменным $(\ddot q^1,..., \ddot q^{k_*})$ при любых фиксированных $(t, q, \dot q) \in \Omega$. Отсюда вытекает разрешимость (2.1) (а значит, и (1.1)) относительно $\ddot q$ и справедливость утверждения 2.1 для любых $(t_0, q_0, \dot q_0) \in \mathcal{A}$. Теперь существование локального правостороннего решения (1.1) для начальных данных $(t_0, q_0, \dot q_0) \in \mathcal{A}$ доказывается так же, как в теореме 3.1.

В дальнейшем полагаем выполненными условия теоремы 4.1 и рассматриваем только такие правосторонние решения $(q(\cdot), \dot q(\cdot))$ задачи (1.1), для которых $(t, q(t), \dot q(t)) \in \mathcal{A}$ для всех t из области существования этого решения.

Теорема 4.2. Каждое правостороннее решение $(q(\cdot), \dot q(\cdot))$ системы дифференциальных уравнений (1.1) либо продолжимо до границы множества Ω, либо существует предел отображения $t \to (t, q(t), \dot q(t))$ при $t \to \omega - 0$, равный $(\omega, q_*, \dot q_*) \notin \mathcal{A}$.

Доказательство. Продолжимость $(q(\cdot), \dot q(\cdot))$ на правый максимальный интервал существования устанавливается обычными рассуждениями с использованием леммы Цорна. Если $(q(\cdot), \dot q(\cdot))$ не стремится к границе Ω, то, учитывая локальную ограниченность функции G, убеждаемся, что существует предел отображения $t \to (t, q(t), \dot q(t))$ при $t \to \omega - 0$, который, очевидно, не может принадлежать множеству $\mathcal{A}$. Отсюда и следует утверждение теоремы.

5. Точки правосторонней единственности. Правостороннее решение $(q(\cdot), \dot q(\cdot))$ системы уравнений (1.1) называется R-правосторонним в точке t, если правая производная $D^+\dot q(\cdot)$ непрерывна справа в точке t.

В рамках предположений теоремы 4.1 R-правосторонние решения обладают следующим свойством: R-правостороннее в точке t_0 решение системы уравнений (1.1) является R-правосторонним в каждой точке некоторого промежутка $[t_0, \tau)$, $\tau > 0$. Поэтому теорему 3.1 можно рассматривать как теорему существования локального R-правостороннего решения.

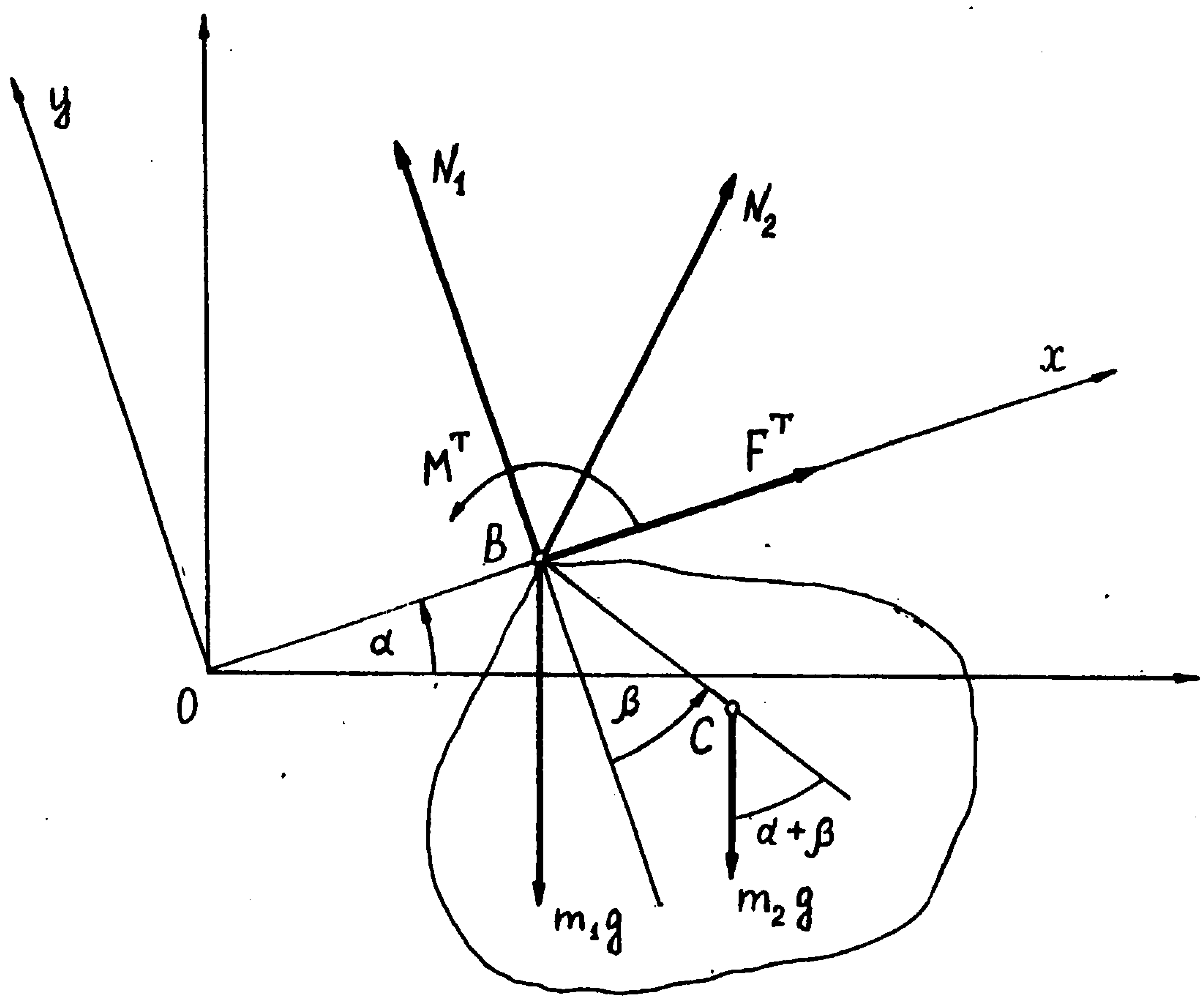
В определении правосторонней единственности следуем [8].

Теорема 5.1. Пусть точка $(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$, в которой выполняются неравенства (2.3), $|N_s(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)| \neq 0$ при $s \in (1,..., k_*) \setminus \mathcal{N}_0(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$ и $\mathcal{N}_1(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0) = \phi$, удовлетворяет системе (1.1). Предположим, что в некоторой окрестности точки $(t_0,q_0,\dot q_0)$ функции Q_s^A, g_s, f_s непрерывно-дифференцируемы по $(q,\dot q)$, в некоторой окрестности точки $(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$ функции $|N_s|$ непрерывно-дифференцируемы по$(q,\dot q,\ddot q)$ (при каждом фиксированном t). Тогда для R-правостороннего в точке t_0 решения задачи (1.1) с начальными данными $q(t_0) = q_0$, $\dot q(t_0) = \dot q_0$ имеет место правая единственность в этой точке.

Доказательство. Так как $\mathcal{N}_1(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0) = \phi$, то R-правостороннее в точке t_0 решение (1.1) локально удовлетворяет (1.3) с фиксированной структурой правой части, порожденной точкой $(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$. Обозначим через F_s^0 $(s = 1,..., k)$ определенные в окрестности $(t_0,q_0,\dot q_0,\ddot q_0)$ функции, в виде которых эта структура реализуется. Из неравенств (2.3) вытекает, что уравнение $\ddot{q}=F^0(t,q,\dot{q},\ddot{q})$ разрешимо и определяет единственную функцию $G^0(t, q,\dot{q})$. В силу сделанных предположений функции F^0 непрерывно-дифференцируемы по $(q,\dot{q},\ddot{q})$. Тогда функция G^0 будет непрерывно-дифференцируема по $(q, \dot{q})$ при каждом фиксированном t в некоторой окрестности точки $(t_0, q_0, \dot{q}_0)$ и каждое R-правостороннее решение системы уравнений (1.1), с начальными условиями $q(t_0) = q_0$, $\dot{q}(t_0) = \dot{q}_0$, локально удовлетворяет уравнению

$$\ddot{q}=G^0(t,q,\dot{q}) \tag{5.1}$$

Теперь, стандартными методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений, убеждаемся, что t_0 – точка правой единственности решения задачи (5.1). Теорема доказана.



Отметим, что содержательному смыслу движения механической системы с трением скольжения соответствуют R-правосторонние решения, обладающие единственностью.

6. Пример. Рассматривается плоская система двух тяжелых тел: 1) поршня **B** массой m_1, движущегося с трением скольжения по прямолинейной трубке Ox, наклоненной к горизонту на угол α = const $(0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2)$, и рассматриваемого как материальная точка с координатой x, принимаемой за q^1; 2) абсолютно твердого тела массой m_2, вращающегося с трением вокруг цилиндрического шарнира, установленного на поршне и имеющего расстояние r от шарнира до центра масс **C** и момент инерции J_C относительно центра масс. Сопротивлением среды пренебрегаем. Угол β отклонения **BC** от нормали к Ox, направленной вниз, принимается за q^2; f_1, f_2 – коэффициенты трения скольжения поршня и трения в шарнире; $m = m_1 + m_2$.

Уравнения движения системы в форме Лагранжа записываются в виде

$$\begin{gathered} m\ddot{x}+m_2 r\cos\beta\,\ddot{\beta}=m_2 r\,\dot{\beta}^2\sin\beta-mg\sin\alpha+Q_1^T \\ m_2 r\cos\beta\,\ddot{x}+J\ddot{\beta}=-m_2 g r\sin(\alpha+\beta)+Q_2^T \end{gathered} \tag{6.1}$$

где $Q_1^T = F^T$, $Q_2^T = M^T$, $J = J_C + m_2r^2$. Обобщенные силы трения при относительном равновесии по x и β записываются как

$$Q_1^{T0} \triangleq m_2r\ddot{\beta}\cos\beta - m_2r\dot{\beta}^2\sin\beta + mg\sin\alpha \quad (\dot{x}=0,\ \ddot{x}=0)$$

$$Q_2^{T0} \triangleq m_2r\ddot{x}\cos\beta + m_2gr\ \sin(\alpha+\beta) \quad (\dot{\beta}=0,\ \ddot{\beta}=0)$$

Модули нормальных реакций, определенные согласно указанному в [2] правилу, имеют вид

$$|N_1| = |m_2r(\ddot{\beta}\sin\beta + \dot{\beta}\cos\beta) + mg\cos\alpha|$$

$$|N_2| = m_2|(\ddot{x} + r\dot{\beta}^2\cos\beta - r\dot{\beta}^2\sin\beta + g\sin\alpha)^2 + (r\ddot{\beta}\sin\beta + r\dot{\beta}^2\cos\beta + g\cos\alpha)^2]^{1/2}$$

В общем случае обобщенные силы трения определяются равенствами для $s = 1, 2$

$$Q_s^T = \begin{cases} Q_s^{T0}, & \text{если } \dot{q}^s = 0,\ |Q_s^{T0}| \leq f_s|N_s|_{\ddot{q}^s=0} \\ f_s|N_s|\operatorname{sgn} Q_s^{T0}, & \text{если } \dot{q}^s = 0,\ |Q_s^{T0}| > f_s|N_s|_{\ddot{q}^s=0} \\ -f_s|N_s|\operatorname{sgn}\dot{q}^s, & \text{если } \dot{q}^s \neq 0 \end{cases}$$

Неравенство (1.2) для $s = 1$ выполняется, так как $|N_1|$ не зависит от $\ddot{x} = \ddot{q}^1$. Если $s = 2$, то, дифференцируя $|N_2|$ по $\ddot{\beta}$ (при $|N_2| \neq 0$), находим, что достаточным условием выполнения (1.2) будет

$$f_2m_2r(|\cos\beta| + |\sin\beta|) < J \tag{6.2}$$

Поскольку $\max\limits_{\beta}(|\cos\beta|+|\sin\beta|) = \sqrt{2}$, то из (6.2) получаем

$$f_2 < J/(\sqrt{2}m_2r) \tag{6.3}$$

В частности, если $J_C = 0$ (т.е. если вместо тела рассматривать материальную точку массой m_2), то $f_2 < r/\sqrt{2}$. Очевидно также, что неравенства (6.2), (6.3) выполняются, если $f_2 = 0$.

Достаточными условиями выполнения неравенств (2.3) применительно к уравнениям (6.1) будут

$$\begin{gathered} m_2r(|\cos\beta| + f_1|\sin\beta|) < me_{12}/2 \\ m_2(r|\cos\beta| + f_2) < Je_{21}/2 \\ m_2rf_2(|\cos\beta| + |\sin\beta|) < Je_{22}/2 \\ (e_{12} = 1\text{м},\ e_{21} = 1\text{м}^{-1},\ e_{22} = 1) \end{gathered} \tag{6.4}$$

Очевидно, третье из неравенств (6.4) влечет (6.2). Рассмотрим множество $\mathcal{A}$ = $= \{(q,\dot{q}): |N_s(q,\dot{q},G)| \neq 0, s \in \mathcal{N}_1(q,\dot{q},G)\}$.

1) Пусть $\mathcal{N}_1(q,\dot{q},G) = \{1, 2\}$. Тогда $|Q_s^{T0}| = f_s|N_s|$, $\dot{q}^s = 0$, $\ddot{q}^s = 0$ ($s = 1, 2$) и условие $|N_2| = 0$ влечет $g = 0$ или $m_2 = 0$, что невозможно. Следовательно, всегда $(q,\dot{q}) \in \mathcal{A}$, если $\mathcal{N}_1 = \{1, 2\}$.

2) Пусть $\mathcal{N}_1(q,\dot{q},G) = \{2\}$. Тогда $|Q_2^{T0}| = f_2|N_2|$, $\dot{q}^2 = 0$, $\ddot{q}^2 = 0$ и условие $|N_2| = 0$ означает, что

$$\ddot{x}\cos\beta + g\sin(\alpha+\beta) = 0,\quad \ddot{x} + g\sin\alpha = 0,\quad g\cos\alpha = 0 \tag{6.5}$$

Третье из равенств (6.5) дает $\alpha = \pi/2$, и тогда из второго равенства (6.5) получаем $\ddot{x} = -g$. Так как $|N_1|_{\dot{\beta}=0,\ \ddot{\beta}=0,\ \alpha=\pi/2} = 0$, $|Q_1^{T0}|_{\dot{\beta}=0,\ \ddot{\beta}=0,\ \alpha=\pi/2} > 0$, то $\ddot{x} = -g$ удовлетворяет уравнениям (6.1) (и, очевидно, первому равенству (6.5)). Следовательно, при условии $\alpha = \pi/2$ и однозначной разрешимости уравнений (6.1) относительно $\ddot{x}$, $\ddot{\beta}$ (что обеспечивают неравенства (6.4)) множество $\mathscr{A}$ не содержит только таких точек $(q,\dot{q})$, что $\dot{q}^2=\dot{\beta}=0$.

3) Пусть $\mathcal{N}_1(q,\dot{q}, G)=\{1\}$. Тогда $\dot{q}^1=0$, $\ddot{q}^1=0$, $|Q_1^{T0}|=f_1|N_1|$ и условие $|N_1|=0$ влечет

$$\ddot{\beta}\cos\beta-\dot{\beta}^2\sin\beta+\xi\sin\alpha=0,\quad \ddot{\beta}\sin\beta+\dot{\beta}^2\cos\beta+\xi\cos\alpha=0 \tag{6.6}$$

$(\xi=mg/(m_2r)$. Тогда $|N_2|=gm_1$.

Пусть $\dot{\beta}=0$. Тогда $\ddot{\beta}\neq 0$, и при условии $\cos\beta=0$ или $\sin\beta=0$ из (6.6), (6.1) получаем соответственно $\sin\alpha=0$ или $\cos\alpha=0$ и

$$Jm/(m_2r)=m_2r-f_2m_1 \tag{6.7}$$

Отсюда следует

$$J_c\frac{1}{m_2r}=-r+\frac{m_2}{m}r-f_2\frac{m_1}{m}<0$$

что невозможно. Если $\cos\beta\neq 0$, $\sin\beta\neq 0$, то из (6.6) вытекает

$$\ddot{\beta}=-\xi\sin\alpha/\cos\beta=-\xi\cos\alpha/\sin\beta$$

Следовательно, $\cos(\alpha+\beta)=0$. Простые вычисления показывают, что и в этом случае выполняется (6.7), и следовательно, множество $\mathscr{A}$ не содержит $(q,\dot{q})$, если $\dot{q}^1=0$, $\dot{q}^2=0$, $\mathcal{N}_1=\{1\}$.

Если $\dot{\beta}\neq 0$, то значения $q^2=\beta,\dot{q}^2=\dot{\beta}$, для которых $(q,\dot{q})\in\mathscr{A}$, находятся из уравнений

$$RJ^{-1}\cos\beta-\dot{\beta}^2\sin\beta=-\xi\sin\alpha,\quad RJ^{-1}\sin\beta+\dot{\beta}^2\cos\beta=-\xi\cos\alpha \tag{6.8}$$

$(R=-m_2gr\sin(\alpha+\beta)-f_2m_1g\,\mathrm{sgn}\,\dot{\beta})$

Пусть $\beta,\dot{\beta}$ удовлетворяет уравнениям (6.8). Элементарными преобразованиями (6.8) получаем равенства

$$\dot{\beta}\sin(\alpha+\beta)=RJ^{-1}\cos(\alpha+\beta),\quad RJ^{-1}=-2\xi\sin(\alpha+\beta),\quad \dot{\beta}^2=-\xi\cos(\alpha+\beta)$$

откуда получаем $R=0$, $\sin(\alpha+\beta)=0$. Тогда $f_2=0$ и $\cos(\alpha+\beta)=-1$. Следовательно, решениями системы (6.8) являются значения

$$\beta=\pi-\alpha,\quad \dot{\beta}^2=\xi$$

и при этом необходимо $f_2=0$.

Объединяя рассмотрение случаев 1–3, заключаем, что при однозначной разрешимости уравнений (6.1) относительно $\ddot{q}$ множество $\mathscr{A}$ содержит только такие состояния $(q,\dot{q})$, что

1) $\alpha=\pi/2$, $\dot{q}^2=\dot{\beta}=0$

2) $f_2=0$, $\dot{q}^1=\dot{x}=0$, $q^2=\beta=\pi-\alpha$, $\dot{q}^2=\dot{\beta}=\pm\sqrt{\xi}$

Таким образом, если $0\leqslant\alpha<\pi/2, f_2>0$ и выполняются неравенства (6.4), то и в соответствии с теоремой 4.1 для любых начальных состояний $x_0,\dot{x}_0$, β_0, $\dot{\beta}_0$ существует правостороннее решение уравнений (6.1).

В заключение отметим, что уравнения (6.1) переходят в пример Пэнлеве ([1], см. также [4]), если $\alpha=0, f_2=0$, $m_1=m_2=1$ и вместо тела рассматривается точка **B**. При этом неравенство (2.3) будет выполняться, если

$$f_1<(1+\sin^2\beta)/|\sin\beta\cos\beta|$$

что согласуется с условием отсутствия пародоксов Пэнлеве, связанных с "невозможностью или неединственностью движений". Точки $(q, \dot{q}) \notin \mathcal{A}$, если $\dot{q}^1 = \dot{x} = 0$ $q^2 = \beta = \pi$, $\dot{q}^2 = = \dot{\beta} = \pm\sqrt{2g/r}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-01-16295).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
2. *Матросов В.М., Финогенко И.А.* О разрешимости уравнений движения механических систем с трением скольжения // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 3–13.
3. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1960. 515 с.
4. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
5. *Матросов В.М.* О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями I, II // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. № 3. С. 395–409; Т. 3. № 5. С. 839–848.
6. *Matrosov V.M.* Attraction and stability of discontinuous systems // Different. equat.: Qualit. theory. Colloq. Szeged. (Hungary), 1984. V. 2; Amsterdam. North-Holland, 1987, C. 751–770.
7. *Хорн П., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
8. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
9. *Deimling K.* Multivalued differential equation on closed sets. II // Different. and Integr. Equat. 1990. V. 3. № 4. P. 639–642.
10. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

Москва,
Иркутск

Поступила в редакцию
19.VII.1994