УДК 534:517.9:531.36

© 1995 г. Л.А. Бондаренко, Е.С. Кирпичникова, С.Н. Кирпичников

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ НЕГАМИЛЬТОНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Вводятся понятия сильной устойчивости и сильной неустойчивости линейной периодической гамильтоновой системы дифференциальных уравнений при заданном негамильтоновом возмущении. Такая система подвержена действию периодических возмущений: произвольного гамильтонова и заданного негамильтонова. Приводится теорема о достаточных условиях ее сильных устойчивости и неустойчивости. В рамках линейных периодических уравнений Лагранжа второго рода изучается влияние гироскопических сил, а также заданных возмущающих диссипативных и неконсервативных сил на сильную устойчивость и сильную неустойчивость их при выполнении критических соотношений комбинационных резонансов.

Многие объекты из-за наличия диссипативных сил описываются дифференциальными уравнениями, которые можно считать гамильтоновыми лишь с той или иной степенью точности. Далее, диссипативные и неконсервативные силы часто вводятся для обеспечения стабилизации движения разного рода управляемых объектов. Обнаружен и исследован ([1–3] и др.) парадоксальный эффект расширения областей неустойчивости комбинационных резонансов при увеличении диссипативных сил. В связи с этим С.Н. Кирпичниковым [4, 5] предложен подход, который обобщает известные эффекты влияния диссипативных сил на устойчивость положений равновесия стационарных лагранжевых систем [6, 7] на случай близких к гамильтоновым линейных периодических систем дифференциальных уравнений.

Была доказана [5] теорема о достаточных условиях сильной устойчивости и сильной неустойчивости рассматриваемой ниже системы при заданном негамильтоновом возмущении. Эта теорема была применена [8, 9] при исследовании задач об устойчивости вращательного движения составного спутника на слабоэллиптической орбите.

Ниже приводится усиленный вариант этой теоремы. Проиллюстрировано на примерах следующее обстоятельство. Пусть невозмущенная гамильтонова периодическая система сильно устойчива по Крейну [10–12], т.е. устойчива и остается таковой при произвольных периодических гамильтоновых возмущениях; пусть при включении заданного негамильтонова периодического возмущения возникает асимптотическая устойчивость. При комбинационных резонансах совместное действие обоих факторов может сделать систему неустойчивой, т.е. она не всегда является сильно устойчивой в смысле, принятом в данной статье. Наоборот, если негамильтоново возмущение создает неустойчивость, то подходящая гамильтонова добавка может стабилизировать систему.

Таким образом, дополняется парадоксальный эффект [1–3]: введение возмущающих диссипативных сил в сильно устойчивую по Крейну гамильтонову периодическую систему при комбинационных резонансах может приводить к возникновению ее неустойчивости.

1. Теорема о сильной устойчивости и сильной неустойчивости. Рассмотрим линейную гамильтонову периодическую систему

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{IHx}, \quad \mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbf{R}^{2n} \tag{1.1}$$

и близкую к ней возмущенную линейную периодическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{I}(\mathbf{H} + \varepsilon\mathbf{H}_1)\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{\Delta}\mathbf{x} + \mathbf{o}(\varepsilon)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbf{R}^{2n} \tag{1.2}$$

где $\varepsilon \geqslant 0$ – малый параметр, $\mathbf{H}^T = \mathbf{H}$, $\mathbf{H}_1^T = \mathbf{H}_1$, $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{o}(\varepsilon)$ – вещественные кусочно-непрерывные и T-периодические по независимой переменной – времени t $(2n \times 2n)$-матрицы. Элементы матрицы $\mathbf{o}(\varepsilon)$ имеют относительно ε порядок малости выше первого. Матрицы $\mathbf{I}, \mathbf{H}, \mathbf{\Delta}$ – блочные

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{O} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{\Delta} = \begin{vmatrix} \mathbf{\Delta}_{11} & \mathbf{\Delta}_{12} \\ \mathbf{\Delta}_{21} & \mathbf{\Delta}_{22} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

где $\{\mathbf{H}_{j\nu}, \mathbf{\Delta}_{j\nu}\}$ – $(n \times n)$-матрицы, причем $\mathbf{H}_{11}, \mathbf{H}_{22}$ симметричны, $\mathbf{E}$ – единичная $(n \times n)$-матрица. Фазовое пространство $\mathbf{R}^{2n} = \{\mathbf{x}\}$ канонических переменных $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ систем (1.1), (1.2) и пространства $\mathbf{R}^n = \{\mathbf{p}\}$ обобщенных импульсов $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\mathbf{R}^n = \{\mathbf{q}\}$ обобщенных координат $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ рассмотрим с обычными евклидовыми структурами, обозначая соответствующие скалярные произведения круглыми скобками. Функция Гамильтона невозмущенной системы есть $H = (\mathbf{Hx}, \mathbf{x})/2$. Матрица $\varepsilon\mathbf{H}_1$ определяет произвольное гамильтоново возмущение, а матрица $\varepsilon\mathbf{\Delta}$ – заданное негамильтоново возмущение.

Система (1.1), (1.2) называется устойчивой (неустойчивой), если ее тривиальное решение $\mathbf{x} \equiv \mathbf{O}$ устойчиво (неустойчиво) по Ляпунову.

Определение. Система (1.1) называется сильно устойчивой (сильно неустойчивой) при данном негамильтоновом возмущении $\varepsilon\mathbf{\Delta}\mathbf{x}$, если для каждой вещественной симметричной кусочно-непрерывной T-периодической матрицы $\mathbf{H}_1$ система (1.2) устойчива (неустойчива) при всяком достаточно малом параметре $\varepsilon > 0$.

Наша задача – вывести критерии сильных устойчивости и неустойчивости системы (1.1) при заданном негамильтоновом возмущении.

Пусть $\mathbf{\Phi}(t, \varepsilon)$ – нормированная в нуле фундаментальная матрица системы (1.2), а $\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{\Phi}(t, 0)$. Рассмотрим соответствующее системам (1.1), (1.2) операторы Φ, Φ_ε: $\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ отображения за период T. Оператору Φ: $\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ отвечает симплектическая матрица $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(T)$.

В пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ введем кососкалярное произведение

$$[\mathbf{x}, \mathbf{z}] = (\mathbf{Ix}, \mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^{2n} \tag{1.4}$$

отвечающее симплектическим координатам $\mathbf{p}, \mathbf{q}$, и билинейную форму

$$[\mathbf{x}, \mathbf{z}]_{\mathbf{J}} = (\mathbf{Jx}, \mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^{2n} \tag{1.5}$$

$$\mathbf{J} = \int_0^T (\mathbf{\Phi}(t))^{\mathrm{T}}(\mathbf{\Delta}^T\mathbf{I} + \mathbf{I\Delta})\mathbf{\Phi}(t)dt, \quad \mathbf{J}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{J} \tag{1.6}$$

Если $\det \mathbf{J} \neq 0$, то билинейная форма (1.5) будет определять еще одно кососкалярное произведение в пространстве $\mathbf{R}^{2n}$.

Произведем стандартную комплексификацию пространства $\mathbf{R}^{2n}$, переходя к $2n$-мерному комплексному пространству $\mathbf{C}^{2n} = {}^{\mathrm{C}}\mathbf{R}^{2n}$. Скалярное и кососкалярное произведения из $\mathbf{R}^{2n}$ перенесем в $\mathbf{C}^{2n}$ в отличие от общепринятого способа, продолжая их по линейности над полем $\mathbf{C}^1$. Комплексификации линейных вещественных операторов, заданных в пространстве $\mathbf{R}^{2n}$, будем обозначать теми же буквами.

Если у системы (1.1) хотя бы один из ее мультипликаторов

$$\mu_1, \ldots, \mu_k, \ \bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_k, \quad k \leqslant n, \quad (\mu_j \neq \mu_\nu, \ \mu_j \neq \bar{\mu}_\nu \ \text{ при } j \neq \nu) \tag{1.7}$$

– собственных чисел оператора Φ по модулю отличен от единицы, изучаемый вопрос тривиален: эта система сильно неустойчива при произвольно заданном негамильто-

новом возмущении. Поэтому ниже считаем, что мультипликаторы (1.7) на плоскости комплексного переменного лежат на окружности $|\mu| = 1$. Далее важно, что все результаты данной статьи получены для устойчивой системы (1.1) (элементарные делители Φ простые).

Если μ – r-кратный мультипликатор системы (1.1), то через T^{μ} обозначим отвечающее ему r-мерное комплексное инвариантное корневое подпространство оператора Φ и положим $T_{\mu} = T^{\mu}$, если $\mu = \pm 1$, и $T_{\mu} = T^{\mu} + T^{\bar{\mu}}$, если $\mu \neq \pm 1$. В каждом инвариантном подпространстве T_{μ} оператора Φ существует базис $\{\mathbf{e}_j, \bar{\mathbf{e}}_j\}_1^r$, у которого

$$[\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{\nu}] = 0; \quad [\mathbf{e}_j, \bar{\mathbf{e}}_{\nu}] = 0, \quad j \neq \nu; \quad [\mathbf{e}_j, \bar{\mathbf{e}}_j] \neq 0; \quad j, \nu = 1, 2, \ldots, r \tag{1.8}$$

причем в случае простых элементарных делителей можно считать, что $\Phi\mathbf{e}_j = \mu\mathbf{e}_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Далее (суммирование ведется от $j = 1$ до $j = r$), $\operatorname{Re} T_{\mu} = \{\mathbf{x} = \sum(x_j\mathbf{e}_j + \bar{x}_j\bar{\mathbf{e}}_j) | x_j, \bar{x}_j \in \mathbf{C}^1\}$ – подпространство вещественных векторов пространства T_{μ}, так что $\mathbf{x} = 2\sum(\xi_j\mathbf{r}_j - \eta_j\mathbf{s}_j)$, где $x_j = \xi_j + i\eta_j$, ξ_j, $\eta_j \in \mathbf{R}^1$, $\mathbf{e}_j = \mathbf{r}_j + i\mathbf{s}_j$, $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{s}_j \in \mathbf{R}^{2n}$. Таким образом, пространство $\mathbf{C}^{2n}$ разложено в прямую сумму $\mathbf{C}^{2n} = T_{\mu_1} + \ldots + T_{\mu_k}$ инвариантных относительно оператора Φ четномерных подпространств.

Приведем нужные для дальнейшего сведения из теории М.Г. Крейна, И.М. Гельфанда и В.Б. Лидского. Мультипликатор μ симплектического преобразования Φ: $\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ называется знакоопределенным, если квадратичная форма $[\Phi\mathbf{x}, \mathbf{x}]$, $\mathbf{x} \in \operatorname{Re} T_{\mu}$, знакоопределена. Мультипликаторы +1, –1 и мультипликаторы с кратными элементарными делителями не могут быть знакоопределенными. Для r-кратного мультипликатора μ с простыми элементарными делителями имеет при $\gamma = \operatorname{Im}\mu \neq 0$

$$[\Phi\mathbf{x}, \mathbf{x}] = 2i\gamma\sum |x_j|^2 [\mathbf{e}_j, \bar{\mathbf{e}}_j] = 4\gamma\sum (\xi_j^2 + \eta_j^2)[\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j] \tag{1.9}$$

т.е. знакоопределенность μ эквивалентна одинаковости знаков у всех чисел $\{i[\mathbf{e}_j, \bar{\mathbf{e}}_j]\}_1^r$. Простой мультипликатор всегда знакоопределен. Далее, симплектическое преобразование Φ пространства $\mathbf{R}^{2n}$ называется сильно устойчивым, если всякое достаточно близкое к нему симплектическое преобразование этого пространства также устойчиво. Для сильной устойчивости симплектического преобразования Φ необходмо и достаточно, чтобы все собственные числа этого преобразования лежали на единичной окружности $|\mu| = 1$ и были знакоопределенными.

Теперь проиллюстрируем на примерах качественные эффекты, которые могут возникать при совместном действии гамильтоновых и негамильтоновых возмущений в случаях комбинационных резонансов. Проведем сначала анализ в классе соответствующих системам (1.1), (1.2) операторов отображения за период, а затем конкретизируем сами эти системы. Считаем $n = 2$, $T = 2\pi$ и положим

$$\Phi(2\pi, \varepsilon) = \mathbf{I} + \varepsilon\Phi_1, \quad \Phi_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \sigma\mathbf{E} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{vmatrix} 0 & d_{12} \\ d_{21} & 0 \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

где σ, d_{12}, d_{21} – вещественные постоянные. Матрица $\Phi(2\pi, \varepsilon)$ – симплектическая при $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда $\sigma = 0$, $d_{12} = d_{21}$. Простой анализ величин модулей мультипликаторов – корней уравнения

$$\mu^4 + (2 - 2\sigma\varepsilon - d_{12}d_{21}\varepsilon^2)\mu^2 + (1 - \sigma\varepsilon)^2 = 0 \tag{1.11}$$

позволяет сделать вывод об устойчивости оператора Φ_{ε}. В невозмущенном случае $\Phi(2\pi, 0) = \mathbf{I}$ имеем два знакоопределенных двукратных мультипликатора $\{-i, +i\}$, т.е. система (1.1) сильно устойчива по Крейну.

Пример 1. Заданное негамильтоново (индекс минус) возмущение: $d_{12}=d_{12}^{-}=1$, $d_{21}=d_{21}^{-}=-1$, $\sigma=0$, определяющее неустойчивую систему (1.2) при $\varepsilon>0$, $\mathbf{H}_1\equiv\mathbf{O}$, можно стабилизировать подходящим гамильтоновым параметрическим возбуждением. Так, при совместном действии с гамильтоновым (индекс плюс) возмущением $d_{12}=d_{12}^{+}=2$, $d_{21}=d_{21}^{+}=2$, $\sigma=0$ для общего возмущения имеем $d_{12}=d_{12}^{-}+d_{12}^{+}=3$, $d_{21}=d_{21}^{-}+d_{21}^{+}=1$, $\sigma=0$, что влечет устойчивость системы (1.2) при $\varepsilon>0$. Таким образом, сильно устойчивая по Крейну и неустойчивая при данном негамильтоновом возмущении при $\varepsilon>0$, $\mathbf{H}_1\equiv\mathbf{O}$ система может быть стабилизирована гамильтоновым возмущением, т.е. она может не быть сильно неустойчивой системой в смысле принятого в данной статье определения.

Пример 2. Заданное негамильтоново возмущение: $d_{12}=d_{12}^{-}=-1$, $d_{21}=d_{21}^{-}=-3$, $\sigma=1/2$ определяет при $\varepsilon>0$, $\mathbf{H}_1\equiv\mathbf{O}$ асимптотически устойчивую систему (1.2). При совместном его действии с гамильтоновым возмущением: $d_{12}^{+}=2$, $d_{21}^{+}=2$, $\sigma=0$ имеем $d_{12}=d_{12}^{-}+d_{12}^{+}=1$, $d_{21}=d_{21}^{-}+d_{21}^{+}=-1$, $\sigma=1/2$, и система (1.2) становится неустойчивой при $\varepsilon>0$. Таким образом, сильно устойчивая по Крейну и асимптотически устойчивая при данном негамильтоновом возмущении при $\varepsilon>0$, $\mathbf{H}_1\equiv\mathbf{O}$ система может не быть сильно устойчивой в смысле определения, принятого в данной статье.

Конкретизируя системы (1.1), (1.2), положим $\mathbf{H}_1\equiv\mathbf{O}$ и будем включать все возмущения через матрицу $\mathbf{\Delta}$. Для системы (1.1) имеем

$$\dot p_1=-\omega_1 q_1,\quad \dot p_2=-\omega_2 q_2,\quad \dot q_1=\omega_1 p_1,\quad \dot q_2=\omega_2 p_2 \tag{1.12}$$

где разностному комбинационному резонансу отвечает случай

$$\omega_1=\beta_1=1/4+k_1,\quad \omega_2=\beta_2=1/4+k_2,\quad k_2\geqslant k_1,\quad k_1\in\mathbf{N}=\{0,1,2,\ldots\};\quad \beta_2-\beta_1=k_2-k_1\geqslant 0 \tag{1.13}$$

а суммарному комбинационному резонансу – случай

$$\omega_1=\beta_1=1/4+k_1,\quad -\omega_2=\beta_2=3/4+k_2,\quad k_2\geqslant k_1,\quad k_1\in\mathbf{N};\quad \beta_2+\beta_1=1+k_1+k_2\geqslant 1 \tag{1.14}$$

При простом резонансе (1.13), $k_2=k_1$, рассматриваемые эффекты возможны в классе линейных систем с постоянными коэффициентами, т.е. при $\mathbf{\Delta}=\text{const}$. Здесь матрица (1.10) отвечает возмущенной системе (1.2) с

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Delta}_{11}=-((4k_1+1)\pi\mathbf{D}+2\sigma\mathbf{E})/(8\pi),\quad \mathbf{\Delta}_{12}=(2\mathbf{D}+(4k_1+1)\sigma\pi\mathbf{E})/(8\pi)\\ &\mathbf{\Delta}_{21}=(-2\mathbf{D}+(4k_1+1)\sigma\pi\mathbf{E})/(8\pi),\quad \mathbf{\Delta}_{22}=((4k_1+1)\pi\mathbf{D}-2\sigma\mathbf{E})/(8\pi)\end{aligned} \tag{1.15}$$

Эта система эквивалентна следующим уравнениям Лагранжа второго рода:

$$\begin{aligned}&\ddot q_1/\omega_1+\omega_1 q_1=-\varepsilon\sigma\dot q_1/(2\omega_1\pi)+\varepsilon d_{12}q_2/(2\pi)+O(\varepsilon^2)\\ &\ddot q_2/\omega_1+\omega_1 q_2=-\varepsilon\sigma\dot q_2/(2\omega_1\pi)+\varepsilon d_{21}q_1/(2\pi)+O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{1.6}$$

В общем случае резонансов (1.13), (1.14) матрица (1.10) отвечает системе (1.2), например, с кусочно-гладкой 2π-периодической матрицей $\mathbf{\Delta}(t)$, определяемой на периоде $t\in[0,2\pi]$ при помощи равенств $c_i=\cos(\omega_i t)$, $s_i=\sin(\omega_i t)$, $i=1,2$, $\zeta=(1-\cos t)/(2\pi)$

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Delta}_{11}=\zeta\begin{vmatrix}-s_1^2\sigma & -c_1s_2d_{12}\\ -c_2s_1d_{21} & -s_2^2\sigma\end{vmatrix},\quad \mathbf{\Delta}_{12}=\zeta\begin{vmatrix}s_1c_1\sigma & c_1c_2d_{12}\\ c_1c_2d_{21} & s_2c_2\sigma\end{vmatrix}\\ &\mathbf{\Delta}_{21}=\zeta\begin{vmatrix}c_1s_1\sigma & -s_1s_2d_{12}\\ -s_1s_2d_{21} & c_2s_2\sigma\end{vmatrix},\quad \mathbf{\Delta}_{22}=\zeta\begin{vmatrix}-c_1^2\sigma & s_1c_2d_{12}\\ s_2c_1d_{21} & -c_2^2\sigma\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.17}$$

Эквивалентные рассматриваемой системе уравнения Лагранжа второго рода весьма громоздки и здесь ради краткости не приводятся.

Возвращаемся к исследованию поставленной задачи.

Определение. Будем говорить, что мультипликатор μ системы (1.1) имеет первый класс, если обе квадратичные формы $[\mathbf{\Phi x}, \mathbf{x}]$, $[\mathbf{\Phi x}, \mathbf{x}]_J$, $\mathbf{x} \in \operatorname{Re} T_\mu$, знакоопределенные, разных знаков, и что мультипликатор μ системы (1.1) имеет второй класс, если замыкание области знакоопределенности квадратичной формы $[\mathbf{\Phi x}, \mathbf{x}]$, $\mathbf{x} \in \operatorname{Re} T_\mu$, (без точки $\mathbf{x} = \mathbf{O}$) содержится в области знакоопределенности того же знака формы $[\mathbf{\Phi x}, \mathbf{x}]_J$, $\mathbf{x} \in \operatorname{Re} T_\mu$. Не всякий мультипликатор имеет первый или второй класс. В частности, для первого класса необходима знакоопределенность μ, т.е. знакоопределенность отвечающей ему квадратичной формы $[\mathbf{\Phi x}, \mathbf{x}]$, $\mathbf{x} \in \operatorname{Re} T_\mu$.

Теорема 1. Если каждый мультипликатор $\mu_1, \ldots, \mu_k$ невозмущенной системы (1.1) имеет первый класс, то система (1.1) сильно устойчива при данном негамильтоновом возмущении. Если же хотя бы один из указанных мультипликаторов имеет второй класс, то невозмущенная система (1.1) сильно неустойчива при данном негамильтоновом возмущении.

Это – основная теорема о достаточных условиях сильных устойчивости и неустойчивости системы (1.1) при заданном негамильтоновом возмущении. При ее доказательстве используются дискретные функции Ляпунова и Четаева. Если мультипликаторы $\mu_1(\varepsilon), \ldots, \mu_l(\varepsilon)$ возмущенной системы (1.2) при $\varepsilon \to 0$ непрерывно переходят в мультипликатор μ системы (1.1), вводится прямая сумма $T_\mu^\varepsilon = T_{\mu_1(\varepsilon)} + \ldots + T_{\mu_l(\varepsilon)}$ инвариантных относительно оператора Φ_ε подпространств и в соответствующем вещественном пространстве $\operatorname{Re} T_\mu^\varepsilon$ в качестве функции Ляпунова или Четаева берется квадратичная форма $[\mathbf{\Phi}_\varepsilon \mathbf{x}, \mathbf{x}]$, $\mathbf{x} \in \operatorname{Re} T_\mu^\varepsilon$. Изменения в данном в [5] доказательстве теперь очевидны и ради краткости здесь не приводятся.

Замечания. 1°. Удовлетворяющие условиям теоремы 1 сильно устойчивые системы с заданным негамильтоновым возмущением характеризуются свойством асимптотической устойчивости тривиального решения при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

2°. Отметим отличие настоящей работы от работы [2], в которой термины "сильных устойчивости и неустойчивости частот комбинационных резонансов" рассматриваются при другом классе допустимых возмущений: произвольные возмущения там имеют более высокий порядок малости по сравнению с заданными, которые, как и в настоящей работе, могут быть негамильтоновыми. Кроме того, невозмущенная система там гироскопически несвязана.

3°. Э.Э. Шноль установил, что условия сильной устойчивости системы (1.1) при заданном негамильтоновом возмущении, достаточность которых доказана в теореме 1, являются и необходимыми. Э.Э. Шноль исходит из сформулированного им эквивалентного определения: сильно устойчивая система (1.1) при заданном негамильтоновом возмущении $\varepsilon\mathbf{\Delta}$ – это система, удовлетворяющая следующим требованиям: а) она устойчива при $\varepsilon = 0$, б) она асимптотически устойчива при $\varepsilon > 0$, причем асимптотическая устойчивость (при достаточно малом ε) сохраняется для любого добавочного возмущения порядка выше ε, в) оба свойства сохраняются в некоторой окрестности рассматриваемой системы: для $|\tilde{H} - H| < \delta$, где δ не зависит от ε, а $\tilde{H}$ – функция Гамильтона новой системы.

4°. Если достаточные условия сильной устойчивости (сильной неустойчивости) при заданном негамильтоновом возмущении выполнены для системы (1.1) с функцией Гамильтона H, то они выполнены и для близких T-периодических гамильтоновых систем: при $|\tilde{H} - H| < \delta$, где δ не зависит от ε. Тем самым эти условия гарантируют устойчивость (неустойчивость) в расширенном смысле: при конечных гамильтоновых возмущениях.

В нерезонансном случае [4] вклад в $|\mu_i(\varepsilon)| = \kappa_i \varepsilon + o(\varepsilon)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, от гамильтоновой части возмущения имеет порядок $o(\varepsilon)$. Здесь из асимптотической устойчивости (неустойчивости) системы (1.2) при $\mathbf{H}_1 \equiv \mathbf{O}$, заключение о которой сделано на основе анализа знаков $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$, следует сильная устойчивость (сильная неустойчивость) системы (1.1) при данном негамильтоновом возмущении. Поэтому ниже будем рас-

сматривать резонансный случай, считая, что среди мультипликаторов (1.7) имеется кратный и называя соответствующие соотношения между параметрами системы (1.1) критическими соотношениями параметрического резонанса. Учитывая, что мультипликаторы +1, –1 и мультипликаторы с кратными элементарными делителями не могут принадлежать ни к первому, ни ко второму классу, исключим их из рассмотрения.

Теперь для r-кратного мультипликатора μ, $\gamma = \operatorname{Im}\mu \neq 0$, имеем

$$[\mathbf{\Phi x}, \mathbf{x}]_{\mathbf{J}} = 4\gamma \sum_{j,\nu=1}^{r} \{(\xi_j\xi_\nu + \eta_j\eta_\nu)[\mathbf{r}_\nu, \mathbf{s}_j]_{\mathbf{J}} + \xi_j\eta_\nu([\mathbf{s}_j, \mathbf{s}_\nu]_{\mathbf{J}} + [\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_\nu]_{\mathbf{J}})\} \tag{1.18}$$

При $\mathbf{H}$ = const отпадает необходимость нахождения матрицы $\mathbf{\Phi}(t)$. Действительно, пусть μ – r-кратный мультипликатор системы (1.1), тогда среди собственных чисел матрицы $\mathbf{IH}$ содержатся $\pm i\beta_1, \ldots, \pm i\beta_r$, где $\beta_1 > 0, \ldots, \beta_r > 0$, так что $\mu = e^{i\beta_j T}$ или $\mu = e^{-i\beta_j T}$ для всех $j = 1, 2, \ldots, r$. Далее соответствующие собственные векторы матриц $\mathbf{IH}$ и $\mathbf{\Phi}$ совпадают. Будет удобно, если потребуется, изменяя обозначения, ниже под $\mathbf{e}_j$ понимать собственный вектор матрицы $\mathbf{IH}$, отвечающий $i\beta_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Тогда для j, $\nu = 1, 2, \ldots, r$ имеем $[\mathbf{e}_j, \bar{\mathbf{e}}_j] = i(\mathbf{He}_j, \bar{\mathbf{e}}_j)/\beta_j$ и

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_\nu]_{\mathbf{J}} &= \int_0^T e^{i(\beta_j+\beta_\nu)t}((\mathbf{\Delta}^{\mathrm{T}}\mathbf{I} + \mathbf{I\Delta})\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_\nu)dt \\ [\mathbf{e}_j, \bar{\mathbf{e}}_\nu]_{\mathbf{J}} &= \int_0^T e^{i(\beta_j-\beta_\nu)t}((\mathbf{\Delta}^{\mathrm{T}}\mathbf{I} + \mathbf{I\Delta})\mathbf{e}_j, \bar{\mathbf{e}}_\nu)dt \end{aligned} \tag{1.19}$$

2. Приложения теоремы 1. Пусть сначала $n = 2$. Полагаем также $\mathbf{H}$ = const, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ и, не ограничивая общности, $(\mathbf{He}_1, \bar{\mathbf{e}}_1) > 0$, $T = 2\pi$. Матрицу будем называть положительно определенной, неотрицательной или знакопеременной, если отвечающая ей квадратичная форма обладает соответствующим свойством. Для критических соотношений комбинационных резонансов

$$|\beta_1 - \beta_2| = N, \quad N = 0, 1, 2, \ldots, \quad \chi = -2\sin(2\pi\beta_1) \neq 0 \tag{2.1}$$

$$\beta_1 + \beta_2 = N, \quad N = 1, 2, \ldots, \quad \chi = -2\sin(2\pi\beta_1) \neq 0 \tag{2.2}$$

разностного и суммарного, имеем соответственно:

$$\begin{aligned} [\mathbf{\Phi x}, \mathbf{x}] &= \chi[(\xi_1^2 + \eta_1^2)(\mathbf{He}_1, \bar{\mathbf{e}}_1)/\beta_1 + (\xi_2^2 + \eta_2^2)(\mathbf{He}_2, \bar{\mathbf{e}}_2)/\beta_2] \\ [\mathbf{\Phi x}, \mathbf{x}]_{\mathbf{J}} &= \chi[(\xi_1^2 + \eta_1^2)a + (\xi_2^2 + \eta_2^2)b + 2d(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2) + 2c(\xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2)] \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{\Phi x}, \mathbf{x}] &= \chi[(\xi_1^2 + \eta_1^2)(\mathbf{He}_1, \bar{\mathbf{e}}_1)/\beta_1 - (\xi_2^2 + \eta_2^2)(\mathbf{He}_2, \bar{\mathbf{e}}_2)/\beta_2] \\ [\mathbf{\Phi x}, \mathbf{x}]_{\mathbf{J}} &= \chi[(\xi_1^2 + \eta_1^2)a - (\xi_2^2 + \eta_2^2)b + 2e(\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2) + 2f(\eta_1\xi_2 + \xi_1\eta_2)] \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$[\mathbf{e}_1, \bar{\mathbf{e}}_1]_{\mathbf{J}} = ai, \quad [\mathbf{e}_2, \bar{\mathbf{e}}_2]_{\mathbf{J}} = bi, \quad [\mathbf{e}_1, \bar{\mathbf{e}}_2]_{\mathbf{J}} = c + id, \quad [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]_{\mathbf{J}} = e + if \tag{2.5}$$

Из приведенных формул вытекают следующие утверждения.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (2.1) разностного комбинационного резонанса. Система (1.1) сильно устойчива при данном негамильтоновом возмущении, если $a < 0$, $ab > c^2 + d^2$, $\mathbf{H}$ положительно определена, а для ее сильной неустойчивости достаточно выполнения одного из следующих условий: 1) $ab > c^2 + d^2$, $\mathbf{H}$ невырождена и знакопеременна, 2) $a > 0$, $ab > c^2 + d^2$, $\mathbf{H}$ неотрицательна, 3) $c = 0$, $d = 0$, $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$, $\mathbf{H}$ знакопеременна, $\beta_1 a(\mathbf{He}_2, \bar{\mathbf{e}}_2) \neq \beta_2 b(\mathbf{He}_1, \bar{\mathbf{e}}_1)$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (2.2) суммарного комбинационного резонанса. Система (1.1) сильно устойчива при данном негамильтоновом возмущении, если $a < 0$, $ab < -e^2 - f^2$, **H** знакопеременна, а для сильной ее неустойчивости достаточно выполнения одного из следующих условий: 1) $ab < -e^2 - f^2$, **H** положительно определена, 2) $a > 0$, $ab < -e^2 - f^2$, **H** знакопеременна или вырождена, 3) $e = 0, f = 0, a \geqslant 0, b \geqslant 0$, **H** положительно определена, $\beta_1 a(\mathbf{He}_2, \bar{\mathbf{e}}_2) \neq \beta_2 b(\mathbf{He}_1, \bar{\mathbf{e}}_1)$.

Пусть рассматриваемая система (1.1) сильно устойчива по Крейну, т.е. квадратичная форма (1.9) знакоопределена. Тогда при введении заданного негамильтонова возмущения она может как остаться сильно устойчивой, так и превратиться в сильно неустойчивую.

Например, для разностного резонанса (2.1) при $ab > c^2 + d^2$, а для суммарного резонанса (2.2) при $ab < -e^2 - f^2$ такая система остается сильно устойчивой при данном негамильтоновом возмущении, если $a < 0$, или, напротив, становится сильно неустойчивой, если $a > 0$.

Теперь более детально проанализируем влияние на изучаемые сильные устойчивость и неустойчивость сил различной природы. Пусть системы (1.1), (1.2) получены из уравнений Лагранжа второго рода, так что функция Гамильтона H есть преобразование Лежандра функции Лагранжа

$$L_\varepsilon = L + \varepsilon L_1 + (\mathbf{o}(\varepsilon)\mathbf{y}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{L} = \tfrac{1}{2}[(\mathbf{Bq}^\cdot, \mathbf{q}^\cdot) + (\mathbf{Cq}, \mathbf{q}^\cdot) - (\mathbf{Pq}, \mathbf{q})] \tag{2.6}$$

где $L_1 = L_1(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot)$ – характеризующая произвольное гамильтоново возмущение квадратичная форма переменной $\mathbf{y} = (\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot)$, кусочно-непрерывная и 2π-периодическая по t, вектор обобщенных скоростей $\mathbf{q}^\cdot \in \mathbf{R}^n$. Обобщенные силы, определяющие заданное негамильтоново возмущение, имеют вид

$$\mathbf{Q} = \varepsilon \mathbf{Gq}^\cdot + \varepsilon \mathbf{Fq} \tag{2.7}$$

Матрицы **B, C, P, G, F** для простоты постоянны, $\det \mathbf{B} \neq 0$, $\det \mathbf{P} \neq 0$, **B** положительно определена или знакопеременна, и без ограничения общности $\mathbf{B}^\mathrm{T} = \mathbf{B}$, $\mathbf{C}^\mathrm{T} = -\mathbf{C}$, $\mathbf{P}^\mathrm{T} = \mathbf{P}$, $\mathbf{G}^\mathrm{T} = \mathbf{G}$, $\mathbf{F}^\mathrm{T} = -\mathbf{F}$. В соответствии с обычной терминологией [7] силы $\varepsilon\mathbf{Fq}$ назовем неконсервативными, а силы $\varepsilon\mathbf{Gq}^\cdot$ – диссипативными (определенно диссипативными), если матрица (–**G**) неотрицательна (положительно определена). Тогда $\mathbf{H}_{11} = \mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{H}_{12} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}/2$, $\mathbf{H}_{22} = \mathbf{P} + \mathbf{C}^\mathrm{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}/4$, $\mathbf{\Delta}_{11} = \mathbf{GB}^{-1}$, $\mathbf{\Delta}_{12} = \mathbf{F} - \mathbf{GB}^{-1}\mathbf{C}/2$, $\mathbf{\Delta}_{21} = \mathbf{\Delta}_{22} = \mathbf{O}$. Снова полагая $n = 2$ и считая, что $\beta_1 \neq \beta_2$, находим $c = 0$, $d = 0$, $e = 0, f = 0$ и далее имеем

$$\frac{a}{4\pi} = \beta_1(\mathbf{Gf}_1, \bar{\mathbf{f}}_1) - i(\mathbf{Ff}_1, \bar{\mathbf{f}}_1), \quad \frac{b}{4\pi} = \beta_2(\mathbf{Gf}_2, \bar{\mathbf{f}}_2) - i(\mathbf{Ff}_2, \bar{\mathbf{f}}_2), \quad \mathbf{f}_1 \neq 0, \quad \mathbf{f}_2 \neq 0 \tag{2.8}$$

где $\mathbf{f}_j$ – проекция $\mathbf{e}_j$ на комплексификацию пространства $\mathbf{R}^n = \{\mathbf{q}\}$, $j = 1, 2$.

Следующие теоремы 4 и 5 доказываются при помощи формул(2.8), утверждений теорем 2 и 3, а также леммы 2 работы [4].

Пусть сначала неконсервативные силы отсутствуют, т.е. $\mathbf{F} = \mathbf{O}$.

Теорема 4. Рассмотрим уравнения Лагранжа второго рода с функцией Лагранжа (2.6), удовлетворяющей сформулированным выше предположениям. Пусть возмущающие обобщенные силы $\mathbf{Q} = \varepsilon\mathbf{Gq}^\cdot$ определенно диссипативны или обладают

свойством: $(\mathbf{G}\mathbf{f}_j, \bar{\mathbf{f}}_j) < 0$, $j = 1,2$. Тогда при выполнении критических соотношений (2.1), $N \neq 0$, разностного комбинационного резонанса изучаемая невозмущенная система уравнений при данном негамильтоновом возмущении сильно устойчива, если обе матрицы **B, P** положительно определены, и сильно неустойчива в противном случае. При выполнении условий (2.2) суммарного резонанса изучаемая система уравнений не может быть ни сильно устойчивой, ни сильно неустойчивой с мультипликаторами первого или второго классов.

Теорема 4 – аналог третьей и четвертой теорем Томсона и Тета [7], она показывает справедливость этих теорем и при наличии произвольного достаточно малого гамильтонова периодического параметрического возмущения не только в нерезонансном случае [4], но и в случае разностного комбинационного резонанса (2.1), $N \neq 0$.

Поясним это подробнее, Если матрицы **B, P** положительно определены, т.е. невозмущенные кинетическая энергия $(\mathbf{B}\mathbf{q}^{\cdot}, \mathbf{q}^{\cdot})/2$ положительно определена, а потенциальная $U = (\mathbf{P}\mathbf{q}, \mathbf{q})/2$ имеет минимум при $\mathbf{q} = \mathbf{O}$, то введение определенно диссипативных возмущающих сил делает систему сильно устойчивой при этом негамильтоновом возмущении. Если же хотя бы одна из матриц **B, P** не является положительно определенной, например, если потенциальная энергия U не имеет минимума при $\mathbf{q} = \mathbf{O}$, а устойчивость невозмущенной системы при отсутствии диссипации достигается за счет гироскопических сил, то введение определенно диссипативных возмущающих сил делает рассматриваемую систему сильно неустойчивой.

Пусть теперь в обобщенных силах (2.7) присутствуют неконсервативные силы, т.е. $\mathbf{F} \neq \mathbf{O}$. Учитывая, что при $\mathbf{C} = \mathbf{O}$ векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ можно выбрать вещественными, получаем следующее утверждение.

Теорема 5. Рассмотрим систему уравнений Лагранжа второго рода с функцией Лагранжа (2.6), удовлетворяющей всем сформулированным предположениям, и обобщенными силами (2.7). Пусть отсутствуют гироскопические силы нулевого порядка, т.е. $\mathbf{C} = \mathbf{O}$ или $\mathbf{C} = \varepsilon\mathbf{C}_1$ и выполнены резонансные соотношения (2.1) с $N \neq 0$ или (2.2). Тогда произвольно заданные неконсервативные возмущающие силы $\varepsilon\mathbf{F}\mathbf{q}$ не влияют на исследуемые сильные устойчивость и неустойчивость рассматриваемой невозмущенной системы с мультипликаторами первого или второго классов.

Следствие 1. Если $\mathbf{C} = \mathbf{O}$ или $\mathbf{C} = \varepsilon\mathbf{C}_1$, то теорема 4 будет справедлива и при наличии в исходных уравнениях Лагранжа второго рода произвольно заданных неконсервативных возмущающих сил.

Полученные результаты можно обобщить на случай $n > 2$. Следующая теорема справедлива для произвольной размерности $n \geqslant 1$. Пусть исходная механическая система связана гироскопическим взаимодействием нулевого порядка, т.е. $\mathbf{C} \neq \mathbf{O}$, и в ней действуют определенно диссипативные и неконсервативные возмущающие обобщенные силы, так что на единичной сфере $|\mathbf{q}| = 1$

$$g = -\max(\mathbf{G}\mathbf{q}, \mathbf{q}) > 0, \qquad h = \max(\mathbf{F}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{q}, \mathbf{q}) \geqslant 0 \tag{2.9}$$

Теорема 6. Рассмотрим уравнения Лагранжа второго рода с функцией Лагранжа (2.6), $(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) \in \mathbf{R}^{2n} (n \geqslant 1)$ и с обобщенными силами (2.7), считая выполненными все предположения, аналогичные сформулированным выше для случая $n = 2$. Пусть возмущающие обобщенные силы, зависящие от скоростей, определенно диссипативны, т.е. матрица **G** отрицательно определена. Пусть далее $\beta_j + \beta_\nu \neq N$, $j, \nu = 1, 2, \ldots, n$, $N = 1, 2, \ldots$, т.е. отсутствуют основные и суммарные комбинационные резонансы любой кратности, и $\beta_j \neq \beta_\nu$ при $j \neq \nu$, причем наименьшая из частот $\beta = \min\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} > 0$ удовлетворяет условию $h < \beta^2 g$. Тогда рассматриваемые уравнения при данном негамильтоновом возмущении сильно устойчивы, если обе матрицы **B, P** положительно

определены, и сильно неустойчивы в противном случае. При отсутствии неконсервативных сил $h = 0$, и условие $h < \beta^2 g$ всегда выполнено.

Остановимся на уравнениях Лагранжа указанного в теореме 6 вида. Увеличением минимальной из собственных частот до величины $\beta > \sqrt{h/g}$, например, повышением жесткости [13] механической системы можно добиться сильных устойчивости или неустойчивости исследуемых уравнений при данном негамильтоновом возмущении в зависимости от того, являются ли обе матрицы **B**, **P** положительно определенными или нет, если только будут отсутствовать критические соотношения основных, простых и суммарных комбинационных резонансов.

В заключение отметим, что понятие негамильтонова возмущения предполагает фиксированность канонических переменных **p**, **q**. Как известно, понятие гамильтоновости системы дифференциальных уравнений неинвариантно относительно замен переменных, даже при сохранении фиксированных обобщенных координат. Так, уравнения Лагранжа второго рода при определенных заменах функции Лагранжа переходят в эквивалентные уравнения Лагранжа второго рода с обобщенными силами другого типа. При этом функция Лагранжа может утратить свойство выпуклости по $\dot{\mathbf{q}}$.

В связи с возможностью подобных предварительных преобразований здесь опущено обычное в механике требование положительной определенности матрицы **B**. Наконец, уравнения движения некоторых линейных голономных механических систем с потенциальными и определенно диссипативными силами можно также привести к гамильтоновой форме (например, см. [14]). Однако при таком превращении определенно диссипативных сил в потенциальные соответствующие функции H, L, первоначально не зависящие или периодически зависящие от времени t, утрачивают эти свойства, что делает невозможным применение рассматриваемых теорем о сильных устойчивости и неустойчивости.

Авторы благодарят Э.Э. Шноля за замечания, предложения, пожелания и дополнения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–013–16285) и Международного научного фонда (NW2000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schmidt G., Weidenhammer F.* Instabilitäten gedämpfter rheolinearer Schwingungen // Math. Nachr. 1961. B. 23. H. 4–5. S. 301–318.
2. *Валеев К.Г.* Об опасности комбинационных резонансов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1134–1142.
3. *Schmidt G.* Instabilitätsbereiche bei rheolinearen Schwingungen // Monatsber. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin. 1967. B. 9. H. 6/7. S. 405–411.
4. *Кирпичников С.Н., Бондаренко Л.А.* Сильная устойчивость линейных. гамильтоновых периодических систем при заданном негамильтоновом возмущении. Нерезонансный случай // Вестн. ЛГУ. Сер. математика, механика и астрономия. 1985. Вып. 3 (№ 15). С. 45–53.
5. *Кирпичников С.Н., Бондаренко Л.А.* Сильная устойчивость линейных периодических гамильтоновых систем при заданном негамильтоновом возмущении. Общий случай // Вестн. ЛГУ. Сер. математика, механика и астрономия. 1986. Вып. 2 (№ 8). С. 55–61.
6. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНИТИ, 1983. С. 3–128.
7. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312 с.
8. *Кирпичников С.Н., Бондаренко Л.А.* О возможности возникновения параметрического резонанса при компенсации эксцентриситетных колебаний спутника с гравитационной системой стабилизации // Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы. Изд-во Пермск. ун-та, 1989. С. 67–74.

9. *Кирпичников С.Н., Бондаренко Л.А.* Параметрический резонанс при вращательном движении составного спутника // Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы. Изд-во Пермск. ун-та, 1990. С. 45–51.
10. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
11. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
12. *Рубановский В.Н.* Устойчивость нулевого решения систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Итоги науки и техники. Общая механика 1969. М.: ВИНИТИ, 1971. С. 85–157.
13. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
14. *Кирпичников С.Н.* Структура дифференциальных уравнений механики, приводимых к каноническому виду // Вестн. ЛГУ. Сер. математика, механика и астрономия. 1973. Вып. 4 (№ 19). С. 92–99.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
24.VIII.1993