ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 59, Вып. 6, 1995

УДК 539.3

© 1995 г. А.Л. Гольденвейзер

О ВНУТРЕННЕМ И КРАЕВОМ РАСЧЕТАХ ТОНКИХ УПРУГИХ ТЕЛ

Для линейной статической задачи теории оболочек и пластин обсуждается метод раздельного построения основного напряженно-деформированного состояния (внутренний расчет) и краевых поправок (краевой расчет). Считается, что внутренний расчет реализуется при помощи итерационного процесса на базе теории Кирхгофа–Лява. Краевой расчет заключается в построении антиплоского и плоского погранслоев, т.е. в исходном приближении приводятся к решению антиплоской и плоской задач теории упругости.

Исследование асимптотики краевых поправок показывает, что вблизи слабо закрепленного края существенна лишь поправка от антиплоского погранслоя, а вблизи достаточно жестко закрепленного края существенна лишь поправка от плоского погранслоя.

С точки зрения полученных результатов обсуждается правомерность применения сдвиговой теории изгиба пластин для исследования краевых упругих явлений. Установлено, что вблизи свободного края такое применение оправдано и адекватно методу, изложенному в статье как по численным результатам, так и по характеру математического аппарата. Вблизи достаточно жестко заделанного края сдвиговые теории как метод исследования краевых упругих явлений теряют смысл, так как позволяют построить лишь асимптотически второстепенную часть поправки.

1. Обсуждаются упругие свойства тонкого изотропного тела, ограниченного лицевыми поверхностями (достаточно протяженными в двух направлениях) и торцами (тонкими в одном из направлений). Рассматриваются линейные статические свойства напряженно-деформированного состояния (НДС) и принимается, что на лицевых поверхностях внешние силы заданы, т.е. исключаются случаи, когда надо учитывать какие-либо лицевые закрепления (эти случаи обсуждены в [1]).

Описанные тонкие тела назовем оболочками и, если не оговорено противоположное, будем допускать, что они могут вырождаться в пластины.

В основу рассуждений кладется свойство оболочки, выражаемое структурной формулой

$$(\text{НДС})_{\text{полн}} = (\text{НДС})_{\text{вн}} + (\text{НДС})_{\text{кр}} \tag{1.1}$$

В ней под $(\text{НДС})_{\text{полн}}$, $(\text{НДС})_{\text{вн}}$ и $(\text{НДС})_{\text{кр}}$ подразумевается полное, внутреннее и краевое (порожденное краем или другими концентраторами напряжений) НДС оболочки.

Основным предметом рассмотрения является вопрос о приближенных методах внутреннего расчета оболочки, т.е. определение ее $(\text{НДС})_{\text{вн}}$, и краевого расчета, т.е. определение ее $(\text{НДС})_{\text{кр}}$. Оба метода здесь строятся на базе асимптотического (при малой толщине области) интегрирования трехмерных линейных дифференциальных уравнений статической теории изотропной упругости. При этом используются традиционные для таких подходов приемы.

1°. Интегралы с различными свойствами исследуются раздельно.

2°. Асимптотические свойства интегралов предугадываются и принятые предположения впоследствии проверяются по корректности вытекающих из них процедур решения краевых задач.

В теории оболочек расчленение полного расчета на внутренний и краевой расчеты представляется рациональным не только с математической, но и с физической точки зрения, так как практическая ценность исследования $(\text{НДС})_{\text{вн}}$ и $(\text{НДС})_{\text{кр}}$ не одинакова.

Применяемые здесь асимптотические подходы сопоставляются с инженерными. Показано, что теория Кирхгофа–Лява полностью подтверждается как приближенный метод исследования $(\text{НДС})_{\text{вн}}$. Однако теория Тимошенко–Рейсснера требует ряда оговорок, как в качестве приема уточнения внутреннего расчета, так, в особенности, и как метод краевого расчета.

2. Выполняя схему, описанную в разд. 1, определим $(\text{НДС})_{\text{вн}}$ формулами:

$$\tau_i = \left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\sigma_{ii} = \lambda^l(\tau_i^0 + \zeta\lambda^{-l+2p-c}\tau_1^1)$$

$$\tau_{ij} = \left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\sigma_{ij} = \lambda^l(\tau_{ij}^0 + \zeta\lambda^{-l+2p-c}\tau_{ij}^1)$$

$$\tau_{i3} = \left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\sigma_{i3} = \lambda^p(\tau_{i3}^0 + \zeta\tau_{i3}^1 + \lambda^{-l+2p-c+b}\zeta^2\tau_{i3}^2) \tag{2.1}$$

$$\tau_{33} = \left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\sigma_{33} = \lambda^c(\tau_3^0 + \zeta\tau_3^1 + \lambda^{-l+2p-c+b}\zeta^2\tau_3^2 + \lambda^{-2l+4p-2c+b}\zeta^3\tau_3^3)$$

$$\upsilon_i = \lambda^{l-p+b}(\upsilon_i^0 + \zeta\lambda^{-l+2p-c}\upsilon_i^1), \qquad \upsilon_3 = \lambda^{l-c+b}(\upsilon_3^0 + \zeta\lambda^{-l+c}\upsilon_3^1)$$

смысл которых заключается в следующем.

Примем, что упругая среда, образующая оболочку, отнесена к традиционной триортогональной системе координат равенством

$$\mathbf{P} = \mathbf{M}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3\mathbf{n} \tag{2.2}$$

где $\mathbf{M}$ – вектор срединной поверхности, заданной в линиях кривизны; $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности $\mathbf{M}$.

Под σ_{st}, υ_s подразумеваются напряжения и перемещения трехмерной среды, отнесенной к координатам (2.2). Через τ_i, τ_{ij}, τ_{i3}, τ_{33} ($i \neq j$ = 1, 2) обозначены так называемые несимметричные напряжения. Они должны удовлетворять лицевым условиям

$$\tau_{r3}|_{\alpha_3=\pm h} = \tau_{r3}^{\pm} \qquad (r = 1,2,3) \tag{2.3}$$

в которых $\tau_{r3}^{\pm}$ – известные функции, задающие внешние силы на лицевых поверхностях, h – полутолщина оболочки.

Кроме того, использованы обозначения: λ – большой параметр, определяемый формулой

$$\lambda^l = R/h \tag{2.4}$$

R – для оболочки характерный радиус кривизны срединной поверхности, а для пластины – некоторый характерный размер ее срединной плоскости; $\overset{k}{\tau}_i$, $\overset{k}{\tau}_{ij}$, $\overset{k}{\tau}_{i3}$, $\overset{k}{\tau}_{33}$, $\overset{k}{\upsilon}_i$, $\overset{k}{\upsilon}_3$ – функции двух переменных α_1, α_2, $\zeta = \alpha_3/h$ – безразмерная нормальная координата, b, p – произвольные числа, подчиняющиеся требованиям

$$0 \leqslant p < l, \qquad 0 \leqslant b \leqslant l - 2p \tag{2.5}$$

число c выражается через l, p следующими формулами: для оболочки

$$c = 0 \quad (p \leqslant l/2), \qquad c = 2p - l \quad (p \geqslant l/2) \tag{2.6}$$

для пластины при любом p

$$c = 2p - l \tag{2.7}$$

R_j – главные радиусы кривизны срединной поверхности.

Предполагается, что функции напряжений и перемещений (2.1) с некоторой асимптотической (при $\lambda \to \infty$) точностью удовлетворяют трехмерным уравнениям теории упругости и лицевым условиям (2.3), если τ_i^k, τ_{ij}^k, τ_{i3}^k, τ_{33}^k, υ_i^k, υ_3^k являются интегралами некоторой двумерной системы уравнений, адекватной уравнениям теории Кирхгофа–Лява.

Более конкретно, последнее предположение расшифровывается следующим образом.

Сделаем в трехмерных уравнениях теории упругости традиционную для асимптотических подходов масштабную замену независимых переменных

$$\alpha_1 = R\lambda^{-p}\xi_1, \qquad \alpha_2 = R\lambda^{-p}\xi_2, \qquad \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta \tag{2.8}$$

и будем допускать к рассмотрению только такие интегралы полученных уравнений, для которых, во-первых, дифференцирование искомых величин по ξ_1, ξ_2 не меняет их асимптотического порядка, и во-вторых, все величины

$$\frac{1}{E}(\tau_i^k, \tau_{ij}^k, \tau_{i3}^k, \tau_{33}^k) \quad \text{и} \quad \frac{1}{R}(\upsilon_i^k, \upsilon_3^k)$$

(E – модуль Юнга) имеют одинаковый асимптотический порядок. Тогда трехмерные дифференциальные уравнения теории упругости, записанные в координатах (2.2) с независимыми переменными ξ_1, ξ_2, ζ и искомыми функциями τ_i^k, τ_{ij}^k, τ_{i3}^k, τ_{33}^k, υ_i^k, υ_3^k, преобразуются в такие равенства, в которых для каждого слагаемого легко получить относительную асимптотическую оценку. Она определяется множителями вида λ^θ, появляющимися в уравнениях теории упругости вследствие применения формул (2.1), (2.8).

Если в каждом отдельно взятом равенстве с такими свойствами отбрасываются слагаемые, содержащие множитель $\lambda^{-\mu}$ по сравнению со слагаемыми, содержащими множители $\lambda^{-\rho}$ при $\mu \geqslant \rho$, то будем говорить, что для так получаемых уравнений число ρ – характеристика их точности. Тогда обсуждаемое предположение сводится к утверждению: трехмерные уравнения теории упругости и лицевые условия (2.3) удовлетворяются с характеристикой точности $\rho = 2l - 2p$, если искомые величины, введенные формулами (2.1), связаны с усилиями, моментами, перемещениями и углами поворота (T_i, S_{ij}, G_i, H_{ij}, N_i, υ_i, w, γ_i) теории Кирхгофа–Лява следующими переходными формулами:

$$\tau_i^0 = \frac{1}{2R}T_i, \qquad \tau_{ij}^0 = \frac{1}{2R}S_{ij}, \qquad \tau_i^1 = -\lambda^{2l-2p+c-b}\frac{3}{2R^2}G_i$$

$$\tau_{ij}^1 = \lambda^{2l-2p+c-b}\frac{3}{2R^2}H_{ij}, \qquad \tau_{i3}^0 + \frac{1}{3}\lambda^{-l+2p-c+b}\tau_{i3}^2 = -\frac{\lambda^{l-p}}{2R}N_i$$

$$\tau_{i3}^1 + \lambda^{-l+2p-c+b}\tau_{i3}^2 = \frac{\lambda^{-p}}{2}(\tau_{i3}^+ + \tau_{i3}^-) \tag{2.9}$$

$$\tau_{i3}^1 = \frac{\lambda^{-p}}{2}(\tau_{i3}^+ + \tau_{i3}^-)$$

$$\upsilon_i^0 = \lambda^{-l+p-b} u_i, \qquad \upsilon_3^0 = -\lambda^{-l+c-b} w$$

$$\upsilon_i^1 = -R\lambda^{-l-p+c-b}\gamma_i, \qquad \upsilon_3^1 = -\lambda^{-c}\frac{\nu}{2E}(T_1 + T_2)$$

$$(i \neq j = 1,2)$$

и если перечисленные выше двумерные величины в правых частях равенств (2.9) удовлетворяют двумерным уравнениям теории Кирхгофа–Лява.

Свойство $(НДС)_{вн}$, выраженного формулами (2.1), можно проверить непосредственной подстановкой (2.1) и (2.8) в трехмерные уравнения теории упругости и в лицевые условия (2.3) с использованием упомянутого выше правила отбрасывания малых слагаемых. Соответствующие громоздкие, но элементарные выкладки приведены в [2], откуда заимствованы и соответствующие обозначения.

3. Формулами (2.1) определяется асимптотика некоторого класса НДС тонкого трехмерного упругого тела, на лицевых поверхностях которого заданы внешние силы. С характеристикой точности $\rho = 2l - 2p$ такие НДС можно в структурной формуле (1.1) отождествить с $(НДС)_{вн}$ и, опираясь на переходные формулы (2.9), строить $(НДС)_{вн}$ по теории Кирхгофа–Лява.

Числа l, p, b в (2.1) имеют следующий физический смысл.

Число l, при фиксированных h, R, λ, определяется формулой (2.4). Отношением $p/l = t$ задается первостепенно важное асимптотическое свойство обсуждаемого НДС. Из первых двух формул масштабного преобразования (2.8), после преобразования их к виду

$$\alpha_1 = \left(\frac{h}{R}\right)^t R\xi_1, \qquad \alpha_2 = \left(\frac{h}{R}\right)^t R\xi_2$$

следует, что t имеет смысл показателя изменяемости данного НДС по переменным α_1, α_2, т.е. на срединной поверхности оболочки.

Для числа c справедливы соотношения (2.6), (2.7). Первые из них связаны с общеизвестным фактом, что если оболочка не вырождается в пластинку, то в ней существуют два рода $(НДС)_{вн}$. При $t < {}^1/_2$ в них асимптотически главными являются усилия, а при $t > {}^1/_2$ – моменты. В пластине такое качественное изменение свойств $(НДС)_{вн}$ не происходит. В связи с этим пластины здесь иногда трактуются не как простейшие оболочки, а как тонкие упругие тела с особыми свойствами.

Число b в формулы (2.1) входит потому, что в оболочке, не вырождающейся в пластину, $(НДС)_{вн}$ могут иметь два вида асимптотик. Они были названы [2] нормальной асимптотикой (при $b = 0$) и особой асимптотикой (при $0 < b < l - 2p$).

С физической точки зрения асимптотика $(НДС)_{вн}$ становится особой тогда, когда деформация срединной поверхности представляет собой псевдоизгибание [3], т.е. формоизменение, близкое в некотором смысле к тому, которое в теории поверхностей называется бесконечно малым изгибанием. В практических задачах псевдоизгибания срединной поверхности – явление не редкое. Однако здесь, избегая многовариантных рассуждений, будем всегда полагать $b = 0$, т.е. считать асимптотику $(НДС)_{вн}$ нормальной.

4. Приближенное построение $(НДС)_{вн}$ можно выполнить асимптотическими методами и при более высоком значении характеристики точности, т.е. при $\rho > 2l - 2p$. Для этого, в частности, придется усложнить и формулы (2.1), задающие свойства $(НДС)_{вн}$. Так например, при $\rho = 4l - 4p$ в правых частях равенств (2.1) будет необходимо в каждой из круглых скобок увеличить на единицу степень входящих туда полиномов по ζ. Соответственно усложнится искомая система двумерных уравнений и увеличится ее порядок. Такие системы были получены для оболочки [4], а также – для изгиба и растяжения (сжатия) пластин [5, 6]. Выяснилось, что если асимптотическую теорию при $\rho = 2l - 2p$ можно рассматривать как аналог теории Кирхгофа–Лява, то при $\rho = 4l - 4p$ можно говорить об асимптотическом аналоге сдвиговой теории (здесь и ниже подразумевается сдвиговая теория Тимошенко–Рейсснера). Однако во втором случае аналогия далеко не такая полная, как в первом. Это подчеркивалось в [4–6] и еще будет более конкретно обсуждаться здесь.

Пока отметим черту сходства: и в асимптотической теории $\rho > 2l - 2p$, и в сдвиговых теориях происходит повышение порядка двумерных дифференциальных уравнений. Это означает, что переход от $\rho = 2l - 2p$ к $\rho = 4l - 4p$ соответствует не только уточнению решений, которые дает теория Кирхгофа–Лява, но и к появлению "дополнительных" решений, причем последние и в асимптотической теории $\rho = 4l - 4p$, и в сдвиговой теории, построенной на физических гипотезах, имеют показатель изменяемости $t = 1$. Это придает "дополнительным" решениям черты сходства с $(НДС)_{кр}$, но свидетельствует также об их математической неадекватности, так как асимптотический метод базируется на предположении, что $t < 1$. Более конкретно этот вопрос здесь еще будет обсуждаться.

5. Асимптотические свойства $(НДС)_{кр}$ в структурной формуле (1.1) определяются следующим образом.

Будем считать, что оболочка имеет один замкнутый торец и выберем триортогональную систему координат (2.2) так, чтобы этот торец совместился с координатной поверхностью $\alpha_1 = 0$.

Выполним в уравнениях теории упругости для напряжений σ_{ik} и перемещений υ_k, а также для независимых переменных α_k следующие замены:

$$S_{ii} = \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right)\frac{\sigma_{ii}}{E}, \qquad S_{ij} = \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_i}\right)\frac{\sigma_{ij}}{E}$$

$$S_{i3} = \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right)\frac{\sigma_{i3}}{E}, \qquad S_{33} = \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{\sigma_{33}}{E} \tag{5.1}$$

$$V_k = h^{-1}\upsilon_k, \qquad \alpha_1 = R\lambda^{-l}\eta_1, \qquad \alpha_2 = R\lambda^{-\pi}\eta_2, \qquad \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta$$

$$(i \neq j = 1,2; \quad k = 1,2,3)$$

В них считается, что ζ, λ, l имеют тот же смысл, что и в (2.1). Под $\pi \leqslant p$ подразумевается число, связанное формулой $\tau = \pi/l$ с показателем изменяемости по переменной α_2. Это значит, что π представляет собой так называемый частный показатель изменяемости $(НДС)_{кр}$, т.е. характеристику изменяемости вдоль торца оболочки. Она обычно бывает известна из условий задачи и связана с общим показателем изменяемости t соотношением $\pi \leqslant p$.

Под $(НДС)_{кр}$ надо подразумевать совокупность величин S_{ik}, V_k, соответствующую таким интегралам преобразованной системы уравнений теории упругости, в которых дифференцирование по η_1, η_2, ζ не меняет асимптотического порядка искомых функций.

Потребуем, кроме того, чтобы S_{ik}, V_k имели вид $O(\lambda^{-\mu})$ при одинаковом μ для всех этих величин. Тогда дифференциальные уравнения теории упругости для $(НДС)_{кр}$ будут обладать такими же свойствами, какие были указаны в разд. 2 для уравнений, определяющих $(НДС)_{вн}$. В них легко определяется относительная асимптотика каждого слагаемого в любом отдельном взятом уравнении. И, как показано в [2, 7, 8], $(НДС)_{кр}$ с характеристикой точности $\rho = l - \pi$ определяется двумя системами уравнений.

Система a:

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial S_{12}}{\partial \eta_1}+\frac{\partial S_{23}}{\partial \zeta}=0 \tag{5.2}$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial V_2}{\partial \eta_1}-2(1+\nu)S_{12}=0, \qquad \frac{\partial S_2}{\partial \zeta}-2(1+\nu)S_{23}=0$$

Система b:

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial S_{11}}{\partial \eta_1}+\frac{\partial S_{13}}{\partial \zeta}=0, \qquad \frac{1}{A_1}\frac{\partial S_{13}}{\partial \eta_1}+\frac{\partial S_{33}}{\partial \zeta}=0$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial V_1}{\partial \eta_1}-[S_{11}-\nu(S_{22}+S_{33})]=0, \qquad -[S_{22}-\nu(S_{11}+S_{33})]=0 \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial \zeta}-[S_{33}-\nu(S_{11}+S_{22})]=0, \qquad \frac{\partial V_1}{\partial \zeta}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial V_3}{\partial \eta_1}-2(1+\nu)S_{13}=0$$

(в них A_1 – коэффициент первой квадратичной формы срединной поверхности).

Система (5.2) является замкнутой относительно величин $P=(S_{12}, S_{23}; V_2)$, а система (5.3) – относительно величин $Q=(S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{13}; V_1, V_3)$. Для P получаются двумерные уравнения (5.2) так называемой антиплоской задачи теории упругости, а для Q равенства (5.3) образуют уравнения плоской задачи теории упругости (в обоих случаях независимыми переменными являются $\eta_1=\int_0^{\alpha_1} A_1 d\alpha_1$ и ζ).

Описанное выше исходное приближение можно уточнять методом итераций и, помимо главных, строить асимптотически второстепенные напряжения и перемещения. Их асимптотика выражается выведенными в [2] соотношениями

$$Q'(a)=O[\lambda^{-l+\pi}P(a)], \qquad P'(b)=O[\lambda^{-l+\pi}Q(b)] \tag{5.4}$$

Здесь и ниже штрихом отмечаются величины, являющиеся асимптотически второстепенными для НДС данного вида.

В совокупности P, Q охватывают все искомые величины некоторого $(\text{НДС})_{\text{кр}}$. В случаях, когда асимптотически главная часть напряжений и перемещений определяется системой a, $(\text{НДС})_{\text{кр}}$ называется антиплоским пограничным слоем, а когда главной является система b, будем говорить о плоском пограничном слое. Соответствующие напряжения и перемещения будут отмечаться дополнительными знаками a и b.

Из формул (5.4) видно, что $(\text{НДС})_{\text{кр}}^a$ и $(\text{НДС})_{\text{кр}}^b$ по своим асимптотическим свойствам прямо противоположны друг другу: главные напряжения и перемещения антиплоского пограничного слоя (a) являются асимптотически второстепенными для плоского пограничного слоя (b) и наоборот.

Описанные выше свойства $(\text{НДС})_{\text{кр}}$ позволяют детализировать структурную формулу (1.1) и записать ее так:

$$(\text{НДС})_{\text{полн}}=(\text{НДС})_{\text{вн}}+\lambda^{\alpha}(\text{НДС})_{\text{кр}}^a+\lambda^{\beta}(\text{НДС})_{\text{кр}}^b \tag{5.5}$$

В этом равенстве показатели α, β пока считаются неопределенными. Ниже выяснится, что им надо придавать те или иные значения, зависящие от характера закрепления торца оболочки.

6. Рассуждения, ведущие к определению чисел α, β в структурной формуле (5.5), опишем на примере, когда торец оболочки совмещен с координатной поверхностью $\alpha_1 = 0$ и на нем заданы условия

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_{12} = 0, \quad \tau_{13} = 0 \tag{6.1}$$

означающие отсутствие торцевых закреплений (считается, что обсуждаемое НДС вызвано силами распределенными на лицевых поверхностях оболочки, а торцевые воздействия отсутствуют).

В (6.1) через $\tau_1, \tau_{12}, \tau_{13}$ обозначены несимметричные напряжения, смысл которых определяется первыми тремя соотношениями (2.1).

Воспользуемся структурной формулой (5.5), раскроем $(НДС)_{вн}$ по формулам (2.1), а $(НДС)_{кр}$ – по соотношениям (5.1), (5.4) и перепишем (6.1) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\lambda^l(\tau_1^0 + \zeta\lambda^{-l+2p-c}\tau_1^1) + \lambda^{-l+p+\alpha}ES'_{11}(a) + \lambda^\beta ES_{11}(b) = 0\\
&\lambda^l(\tau_{12}^0 + \zeta\lambda^{-l+2p-c}\tau_{12}^1) + \lambda^\alpha ES_{12}(a) + \lambda^{-l+p+\beta}ES'_{12}(b) = 0 \quad (\alpha_1 = 0)\\
&\lambda^p(\tau_{13}^0 + \zeta\tau_{13}^1 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta^2\tau_{13}^2) + \lambda^{-l+p+\alpha}ES'_{13}(a) + \lambda^\beta ES_{13}(b) = 0
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Здесь и ниже в слагаемых, относящихся к $(НДС)_{кр}$, частный показатель изменяемости π заменен общим показателем p. Легко проследить, что это не повлияет на окончательные выводы, так как $\pi \leqslant p$.

Из (2.4), (2.6) следует, что в (6.2) множители $\lambda^l, \lambda^p, \lambda^c$ для оболочки, не вырождающейся в пластину, можно выразить так:

$$\lambda^l = \frac{R}{h}, \quad \lambda^p = \left(\frac{R}{h}\right)^{p/l} = \left(\frac{R}{h}\right)^t; \quad \lambda^c = \begin{cases}(R/h)^0, & p \leqslant l/2\\ (R/h)^{2t-1}, & p \geqslant l/2\end{cases}$$

и считать входящие сюда показатели степеней λ фиксированными, если известны полутолщина h, характерный радиус R и показатель изменяемости t искомого НДС. Числа α и β в (6.2) надо выразить через l, p и c так, чтобы не возникло противоречий, смысл которых выявится позже. В рассматриваемом случае (свободный торец) их надо задать формулами

$$\alpha = 2p - c, \qquad \beta = p \tag{6.3}$$

Тогда, если первые слагаемые в уравнениях (6.2) выразить через усилия и моменты теории Кирхгофа–Лява при помощи (2.9), получим

$$\begin{aligned}
&\lambda^p[\lambda^{-l+2p-c}ES'_{11}(a) + ES_{11}(b)] = r_{11} = -\frac{T_1}{2h} + \zeta\frac{3G_1}{2h^2}\\
&\lambda^{2p-c}[ES_{12}(a) + \lambda^{-l+c}ES'_{12}(b)] = r_{12} = -\frac{S_{12}}{2h} - \lambda^{2p-c}\zeta\tau_{12}^1 \quad (\alpha_1 = 0)\\
&\lambda^p[\lambda^{-l+2p-c}ES'_{13}(a) + ES_{13}(b)] = r_{13} = -\lambda^p[\tau_{13}^0 + \zeta\tau_{13}^1 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta^2\tau_{13}^2]
\end{aligned} \tag{6.4}$$

(Здесь S_{12}, конечно, не совпадает по смыслу с $S_{12}(a)$ и $S'_{12}(b)$.)

Будем пока считать, что в (6.4) величины r_{11}, r_{12}, r_{13} известны и что равенства (6.4) представляют собой торцевые условия для погранслоя $(НДС)_{кр}$. Согласно итерационной схеме интегрирования трехмерных уравнений теории упругости [9], к ним надо присоединить условия применимости модифицированного принципа Сен-Венана, т.е. потребовать, чтобы $(НДС)_{кр}$ затухло "в главном" (с точностью до величин, считающихся пренебрежимо малыми в исходном приближении принятого итерационного процесса). Отсюда вытекают четыре граничных условия для $(НДС)_{вн}$. Они подробно обсуждены в [2, 10] и в исходном приближении совпадают с известными граничными условиями теории Кирхгофа–Лява

$$T_1 = S_{12} = G_1 = N_1 + \partial H / \partial s = 0 \tag{6.5}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае (свободный торец) обнаруживается важная особенность асимптотического процесса интегрирования трехмерных уравнений теории упругости для тонких тел (при отсутствии лицевых закреплений). В нем при характеристике точности $\rho = 2l - 2p$ задача приближенного построения $(\text{НДС})_{\text{вн}}$ выделяется в самостоятельное рассмотрение, адекватное расчету оболочки по теории Кирхгофа–Лява с учетом принятых в ней четырех граничных условий. Это утверждение, вообще говоря, остается справедливым и при других условиях закрепления торцов (исключения возможны, но они не затрагивают практически важные случаи). Следовательно, можно утверждать, что теория Кирхгофа–Лява является математически обоснованным приближенным (при $\rho = 2l - 2p$) методом внутреннего расчета оболочек.

Возвратимся к случаю, когда торец свободен, и примем, что краевая задача построения $(\text{НДС})_{\text{вн}}$ уже решена, т.е. будем считать, что все относящиеся к ней величины $\overset{k}{\tau}_i$, $\overset{k}{\tau}_{ij}$, $\overset{k}{\tau}_{i3}$, входящие в (6.2) известны. Они считаются (разд. 2) функциями одинакового асимптотического порядка. Однако при некоторых значениях α_1, α_2, те или иные из них могут проходить через нуль. В частности, из граничных условий (6.5) и формул (2.9) следует, что $\overset{0}{\tau}_1 = \overset{1}{\tau}_1 = \overset{0}{\tau}_{21} = 0$ при $\alpha_1 = 0$. Поэтому справедливы равенства

$$\begin{aligned}
&\lambda^{-l+2p-c} ES'_{11}(a) + ES_{11}(b) = 0 \\
&ES_{12}(a) + \lambda^{-l+c} ES'_{12}(b) = -\zeta \overset{1}{\tau}_{12} \qquad (\alpha_1 = 0) \\
&\lambda^{-l+2p-c} ES'_{13}(a) + ES_{13}(b) = -\overset{0}{\tau}_{13} - \zeta \overset{1}{\tau}_{13} - \lambda^{-l+2p-c} \zeta^2 \overset{2}{\tau}_{13}
\end{aligned} \tag{6.6}$$

которые можно трактовать, как торцевые условия для антиплоского и плоского пограничных слоев.

Непротиворечивость торцевых условий (6.6), а следовательно, и правомочность выбора α, β по формулам (6.3) вытекает из следующих соображений. В силу (2.5), (2.6) для оболочки (и пластины) справедливы неравенства

$$-l + 2p - c \leqslant 0, \qquad -l + c < 0 \tag{6.7}$$

Из них следует, что соотношения (6.6) допускают переход к пределу при $\lambda \to \infty$, поскольку в них отсутствуют положительные степени λ. При этом предельные торцевые равенства (6.6), вообще говоря, разбиваются на две группы. Второе равенство (6.6) при $\lambda \to \infty$ превращается в торцевое условие для антиплоского пограничного слоя, а первое и третье равенства (6.6) определят два торцевых условия плоского пограничного слоя. Исключением является случай, когда в первом соотношении (6.7) надо брать знак равенства (в пластине это происходит при любом p, а в оболочке – при $p \geqslant l/2$). Тогда в торцевых условиях для плоского пограничного слоя надо учитывать поправки, обусловленные антиплоским погранслоем (слагаемыми, отмеченными штрихами). Во всех случаях число предельных условий (6.6) соответствует порядку дифференциальных уравнений, для которых они должны выставляться. Это является первым признаком непротиворечивости формул (6.3) для чисел α, β.

Заметим далее, что торцевые значения величин $\overset{1}{\tau}_{12}$, $\overset{0}{\tau}_{13}$, $\overset{1}{\tau}_{13}$, $\overset{2}{\tau}_{13}$ не принадлежат тем, которые при $\alpha_1 = 0$ в силу граничных условий теории Кирхгофа–Лява должны обращаться в нуль, и примем для определенности, что эти величины, при выбранной интенсивности внешних сил, имеют порядок λ^0. Тогда предельные краевые задачи для антиплоского и плоского пограничных слоев будут в общем случае неоднородными и станет невозможным обращение в тождественный нуль ни $(\text{НДС})^a_{\text{кр}}$, ни $(\text{НДС})^b_{\text{кр}}$. Это является вторым признаком непротиворечивости формул (6.3) для α, β.

Замечание. Обращение в тождественный нуль граничных значений перечисленных величин возможно в частных случаях. Это означает, что формулы (6.3) для α, β для таких задач должны быть изменены.

Можно показать, что если игнорировать оговоренные особые случаи, то приведенные здесь признаки непротиворечивости выбора значений α, β будут соблюдаться лишь при использовании формул (6.3).

Соответствующие рассуждения в принципе просты, но требуют перебора многих вариантов. На них останавливаться не будем.

7. В общем случае каждой тройке торцевых условий теории упругости соответствует своя пара формул для показателей α, β, своя четверка граничных условий для теории Кирхгофа–Лява и свои предельные торцевые условия для $(\text{НДС})_{\text{кр}}$. Так например [2, 10, 11], для шарнирного опертого края

$$\sigma_{11} = \upsilon_2 = \upsilon_3 = 0 \tag{7.1}$$

и для жестко заделанного края

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_3 = 0 \tag{7.2}$$

числа α, β надо задавать формулами

$$\alpha = p, \qquad \beta = l \tag{7.3}$$

Они приводят для соотношений (7.2) к граничным условиям

$$u_1 = u_2 = w = \gamma_1 = 0$$

и предельным торцевым условиям

$$RV_1(b) + \lambda^{-l+2p-c} RV_1'(a) = 0, \qquad V_2(a) + V_2'(b) = 0 \tag{7.4}$$

$$RV_3(b) + \lambda^{-l+2p-c} RV_3'(a) = -\zeta\upsilon_3^1 - \zeta^2\lambda^{-l+2p-c}\upsilon_3^2 \tag{7.5}$$

а для соотношений (7.1) – к граничным условиям

$$T_1 = u_2 = w = G_1 = 0$$

и предельным торцевым условиям

$$ES_{11}(b) = 0,\ RV_3(b) + \lambda^{-l+2p-c} RV_3'(a) = -\varsigma V_3^1 - \varsigma^2\lambda^{-l+2p-c} V_3^2,\ RV_2(a) + RV_2'(b) = 0 \tag{7.6}$$

Это следует из таких же рассуждений, как и в разд. 6. Не повторяя их, отметим только, что формулу (2.1) для υ_3 здесь пришлось уточнить и взять в виде

$$\upsilon_3 = \lambda^{l-c}(\upsilon_3^0 + \zeta\lambda^{-l+c}\upsilon_3^1 + \zeta^2\lambda^{-2l+2p}\upsilon_3^2) \tag{7.7}$$

В этом равенстве на основании общих асимптотических рассуждений [2], введено слагаемое с множителем ζ^2. Его необходимо учитывать потому, что при $c = 2p - l$ оно соизмеримо со слагаемым с множителем ζ.

Замечания. 1°. Необходимость прибегнуть к уточнению (7.7) означает, что для исследования краевых явлений в тонких телах слишком грубым является не только гипотеза о нерастяжимости нормального элемента, но и предположение о линейном распределении прогиба υ_3 по толщине.

2°. В предельных торцевых условиях (7.4), (7.5) слагаемые с множителем $\lambda^{-l+2p-c}$, строго говоря надо оставлять лишь тогда, когда $c = 2p - l$.

3°. Включение квадратичного множителя в формулу (7.7) не означает необходимости отказаться от использования теории Кирхгофа–Лява для внутреннего расчета тонких упругих тел. Величину υ_3^2 можно найти методом итераций [5, 6]. Для нее справедлива формула (общая для пластин и оболочек)

$$\upsilon_3^2 = \nu(\tau_1^1 + \tau_2^1)/2$$

в которой τ_1^1, τ_2^1 можно определить из расчета по теории Кирхгофа–Лява при использовании переходных формул (2.9).

4°. Если речь идет об изгибе пластины, то из последней формулы (2.1) и граничного условия $\overset{0}{\upsilon}_3 = 0$ будет следовать, что в правой части формулы (7.7), а следовательно, и в правой части предельного уравнения (7.5) останется лишь "уточняющее" слагаемое.

8. Обсудим с точки зрения полученных результатов так называемые сдвиговые теории и будем для краткости исходить из варианта сдвиговой теории изгиба пластин, изложенных в [12]. В принятых там обозначениях исходные соотношения этой теории записываются так:

$$
\begin{aligned}
M_{rr} &= -D\left[\upsilon_{,rr} + \nu\left(\frac{\upsilon_{,r}}{r} + \frac{\upsilon_{,\theta\theta}}{r^2}\right)\right] + \frac{2}{\lambda^2}\left(\frac{\chi_{,\theta r}}{r} - \frac{\chi_{,\theta}}{r^2}\right) \\
M_{\theta\theta} &= -D\left[\frac{\upsilon_{,r}}{r} + \frac{\upsilon_{,\theta\theta}}{r^2} + \nu\upsilon_{,rr}\right] - \frac{2}{\lambda^2}\left(\frac{\chi_{,\theta r}}{r} - \frac{\chi_{,\theta}}{r^2}\right) \\
M_{r\theta} &= -(1-\nu)D\left[\frac{\upsilon_{,\theta r}}{r} - \frac{\upsilon_{,\theta}}{r^2}\right] + \frac{2}{\lambda^2}\left(\frac{\chi_{,r}}{r} + \frac{\chi_{,\theta\theta}}{r^2}\right) - \chi \\
&\left(D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \qquad \lambda^2 = \frac{20(1+\nu)}{Eh^3}G\right)
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

Здесь h – полная толщина, υ и χ – искомые функции, из которых первая связана с прогибом w формулой

$$\upsilon = w + BD\nabla^2 w \qquad (B = 6/(5Gh)) \tag{8.2}$$

∇^2 – оператор Лапласа, r, θ – полярные координаты.

Для w и χ при отсутствии внешних сил справедливы уравнения

$$D\nabla^2\nabla^2 w = 0, \qquad \nabla^2\chi - \lambda^2\chi = 0 \tag{8.3}$$

Таким образом, можно считать, что речь идет о комбинации двух приближенных методов: один из них получается при $w \not\equiv 0$, $\chi \equiv 0$, а другой – при $w \equiv 0$, $\chi \not\equiv 0$.

Первый метод, очевидно, надо рассматривать как уточненный (по отношению к теории Кирхгофа–Лява) подход к построению (НДС)$_{вн}$. Поэтому положим в (8.1) $\chi = 0$ и сравним полученные формулы с соответствующими соотношениями, вытекающими из асимптотического метода при характеристике точности $\rho = 4l - 4q$, т.е. из асимптотического аналога сдвиговой теории изгиба пластин [5, 6].

В обозначениях [12] соотношения работы [5, 6] записываются так:

$$
\begin{aligned}
M_{rr} &= -D\left[w_{,rr} + \nu\left(\frac{w_{,r}}{r} + \frac{w_{,\theta\theta}}{r^2}\right)\right] - \\
&- Dh^2\left\{\frac{8-3\nu}{10(1-\nu)}(\nabla^2 w)_{,rr} + \frac{\nu(4+\nu)}{10(1-\nu)}\left[\frac{(\nabla^2 w)_{,r}}{r} + \frac{(\nabla^2 w)_{,\theta\theta}}{r^2}\right]\right\} \\
M_{\theta\theta} &= -D\left[\frac{w_{,r}}{r} + \frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} + \nu w_{,rr}\right] - \\
&- Dh^2\left\{\frac{8-3\nu}{10(1-\nu)}\left[\frac{(\nabla^2 w)_{,r}}{r} + \frac{(\nabla^2 w)_{,\theta\theta}}{r^2}\right] + \frac{\nu(4+\nu)}{10(1-\nu)}(\nabla^2 w)_{,rr}\right\} \\
M_{r\theta} &= -(1-\nu)D\left[\frac{w_{,\theta r}}{r} - \frac{w_{,\theta}}{r^2}\right] - Dh^2\,\frac{8+\nu}{10}\left[\frac{(\nabla^2 w)_{,\theta r}}{r} - \frac{(\nabla^2 w)_{,\theta}}{r^2}\right]
\end{aligned}
\tag{8.4}
$$

(h – полутолщина пластины).

Сопоставление (8.4) с (8.1) обнаруживает расхождение (численно малое, но не исчезающее при $h \to 0$) во всех слагаемых, которыми формулы (8.1) отличаются при $\chi \equiv 0$ от формул теории Кирхгофа–Лява. Это объясняется тем, что при построении сдвиговых теорий используется один из двух следующих приемов.

1°. Формальное перенесение в двумерную теорию оболочек вариационных принципов трехмерной теории упругости. Считается, например, что усилия совершают работу на перемещениях срединной поверхности, а моменты – на углах поворота. Однако в [2, 13] показано, что погрешность такого предположения имеет тот же порядок, что и погрешности гипотезы сохранения нормали.

2°. Использование трехмерной формулировки вариационных принципов в сочетании с гипотезой линейного распределения главных напряжений и перемещений по толщине оболочки. Однако асимптотический анализ показывает, что по порядку погрешностей это также эквивалентно гипотезе сохранения нормали.

Таким образом, сдвиговая теория [12] при выполнении внутреннего расчета приводит к таким поправкам к теории Кирхгофа–Лява, которые требуют некоторой корректировки. Для теории изгиба пластин она оказалась незначительной. Однако в [4] приведены численные результаты, показывающие, что в теории оболочек корректировка может оказаться существенной.

Метод, соответствующий $w \equiv 0, \chi \not\equiv 0$, в сдвиговой теории изгиба пластин [12] надо трактовать как приближенный прием построения $(\text{НДС})_{\text{кр}}$. Однако сопоставление с результатами асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости не подтверждает этого в общем случае не только количественно, но даже и качественно.

9. В подавляющем большинстве практически важных случаев краевой расчет оболочки, т.е. построение $(\text{НДС})_{\text{кр}}$, можно выполнять в качестве второго и не всегда обязательного этапа, считая, что $(\text{НДС})_{\text{вн}}$ уже построено. В частности, в случае свободного торца, краевой расчет изгиба пластины в исходном приближении сводится к интегрированию уравнений (5.2) антиплоской задачи теории упругости с учетом однородных лицевых условий, условий модифицированного сен-венановского затухания и второго торцевого условия (6.6). В последнем можно отбросить слагаемое с малым множителем λ^{-l+c} равным для пластины λ^{-2l+2p}, т.е. привести торцевое условие к виду

$$ES_{12}(a) = -\zeta \overset{1}{\tau}_{12} \quad (\eta_1 = 0) \tag{9.1}$$

В этом равенстве краевое значение $\overset{1}{\tau}_{12}$ надо считать известным. Оно определяется по формулам (2.9) на основании выполненного ранее внутреннего расчета по теории Кирхгофа–Лява. Поскольку краевой расчет выполняется приближенно и предназначается для построения экспоненциально затухающих решений, в системе (5.2) можно положить $A_1^{-1}\partial/\partial\eta_1 = \partial/\partial\eta_1$ и перейти к антиплоской задаче, решаемой в декартовых координатах для полуполосы $\{\eta_1 \geqslant 0, -1 \leqslant \zeta \leqslant +1\}$.

Заметим далее, что в торцевом условии (9.1) величина $\tau_{12}|_{\eta_1 = 0}$ – функция одного переменного η_2, а в уравнение (5.2) не входят производные по этому переменному. Следовательно, (9.1) можно заменить торцевым условием

$$ES_{12}(a) = -\zeta \quad (\eta_1 = 0) \tag{9.2}$$

и получить в конечном счете стандартную задачу, к решению которой всегда сводится приближенный краевой расчет пластины вблизи свободного торца (предполагается, что решение стандартной задачи должно быть помножено на краевое значение величины $\overset{1}{\tau}_{12}$)

Замечание. В [2, 10] стандартные задачи выводятся и для других условий закрепления торца.

Таким образом, в случаях, когда надо обследовать не только внутренние, но и краевые зоны оболочки, нет необходимости строить двумерные теории более высокого порядка, чем теория Кирхгофа–Лява (например, сдвиговые теории). Более естественным и с математической, и с физической точки зрения выглядит расчленение полного расчета на внутренний расчет, для которого математически обоснованной является теория Кирхгофа–Лява, и на краевой расчет, который приближенно сводится к решению антиплоской и плоской задач теории упругости.

Метод, соответствующий $w \equiv 0, \chi \not\equiv 0$, в сдвиговой теории изгиба пластин [12], очевидно, нужно трактовать как приближенный прием построения $(\text{НДС})_{\text{кр}}$. Однако сопоставление с результатами асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости в общем случае не подтверждает такого предположения. Это еще будет обсуждаться ниже, а пока заметим, что при использовании указанного метода в формулах (8.1) надо оставить лишь слагаемые с функцией χ и считать, что χ удовлетворяет второму уравнению (8.3). Учитывая это, легко найти асимптотику соответствующего НДС. Она совпадает с первой асимптотикой (5.4), свойственной $(\text{НДС})^{a}_{\text{кр}}$, но прямо противоположна второй асимптотике (5.4), свойственной $(\text{НДС})^{b}_{\text{кр}}$.

Структурная формула (5.5) задает асимптотику напряжений, возникающих вблизи торца оболочки. Если для определенности считать, что $\overset{k}{\tau}_i$, $\overset{k}{\tau}_{ij}$ в формулах (2.1) имеют вид $O(\lambda^0)$, то вклады слагаемых $\lambda^{\alpha}(\text{НДС})^{a}_{\text{кр}}$ и $\lambda^{\beta}(\text{НДС})^{b}_{\text{кр}}$ в краевое значение $(\text{НДС})_{\text{полн}}$ будут асимптотически пренебрежимы (по напряжениям), пока соответственно выполняются неравенства $\alpha < l$ и $\beta < l$.

Отсюда вытекают следующие выводы. Согласно формулам (6.3) для α, β, вблизи свободного торца пластины (при $c = 2p - l$) краевую поправку в напряжения приближенно определит отдельно взятый антиплоский пограничный слой. Если речь идет о невыродившейся оболочке со свободным торцом при малом значении π – показателя изменяемости внешнего воздействия, т.е. при $c = 0$, $\pi < l/2$, то краевая поправка будет вообще асимптотически второстепенна. При жестком закреплении края для α, β справедливы формулы (7.3). Из них следует, что в оболочке (в частности, при вырождении ее в пластину) в этом случае краевая поправка не будет асимптотически пренебрежимой ни при каких значениях показателя изменяемости π краевых данных. Она приближенно определится отдельно взятым плоским пограничным слоем.

Замечание. Эти общие соображения согласуются с результатом работы [14]. В ней с позиций трехмерной теории упругости рассмотрен эффект приложения осесимметричных статических и кинематических воздействий на торец замкнутой круговой цилиндрической оболочки, т.е. обсуждается ситуация, в которой антиплоский пограничный слой исключен в силу осевой симметрии, а краевые поправки, согласно сформулированным здесь утверждениям, асимптотически не исчезают лишь тогда, когда на торце задаются компоненты перемещения. Это подтверждается результатами [14].

10. Сравним с формально математической точки зрения краевые расчеты теории изгиба пластин по изложенному в разд. 9 асимптотическому методу и по методу, соответствующему $w \equiv 0, \chi \not\equiv 0$ и вытекающему из сдвиговой теории [12].

В полярных координатах r, θ последний метод приводит к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2}\right] - \frac{10}{h^2}\chi = 0 \qquad (10.1)$$

Все его решения при $h \to 0$ имеют большую изменяемость по r. Поэтому, если рассматривается край $r = r_0$, не слишком близкий к полюсу, и считается, что изменяемость искомого решения по θ не слишком велика, то в (10.1) слагаемыми в квадратных скобках можно пренебречь. Их присутствие и неоправданно при той степени приближенности, с которой выведено уравнение (10.1).

В рамках излагаемых здесь подходов в формулах (6.3) надо для пластины расшифровать c по формуле (2.7). Получим $\alpha = l > \beta = p$. Это значит, что краевой расчет приближенно сводится к построению затухающего решения уравнений (5.2) антиплоской задачи с выполнением торцевого условия (9.2). Как упоминалось в разд. 9, в (5.2) можно считать $A_1 = 1$, и система известным образом приведется к гармоническому уравнению, решение которого можно записать в виде ряда

$$S_{23} = \sum a_n \exp\left[-\frac{2n-1}{2}\pi\eta_1\right]\cos\frac{2n-1}{2}\pi\zeta \tag{10.2}$$

Ряд (10.2) почленно удовлетворяет как лицевым требованиям $S_{23} = 0$ при $\zeta = \pm 1$, так и условиям затухания, а торцевое значение S_{12} выражается в виде тригонометрического ряда

$$S_{12}\big|_{\eta_1=0} = \sum a_n \sin\frac{2n-1}{2}\pi\zeta \tag{10.3}$$

В нем числовые коэффициенты a_n очевидным образом определяются при заданной правой части равенства (10.3). Следовательно, задача построения антиплоского пограничного слоя при торцевом условии

$$S_{12}\big|_{\alpha_1=0} = f(\zeta)$$

элементарно решается для весьма широкого класса нечетных функций $f(\zeta)$.

В частности, когда торцевое условие имеет вид (9.2), т.е. когда речь идет о стандартной задаче разд. 9, в правой части равенства (10.2) с достаточной точностью можно сохранять лишь первый член ряда. Но при $n = 1$ гармоническое уравнение для S_{23} практически совпадает с уравнением (10.1), если во втором отбросить член в квадратных скобках, а в первом исключить переменную ζ при помощи подстановки $S_{23} = = s_n(\eta_1)\sin\frac{2n-1}{2}\pi\zeta$ (напомним, что в (10.1) под h, как и в работе [12], подразумевается не полутолщина, а полная толщина пластины).

11. Из вышеизложенного следует, что асимптотический анализ подтверждает возможность использовать сдвиговую теорию изгиба для полного (включающего краевые зоны) приближенного анализа НДС пластины только тогда, когда, во-первых, ее край свободен, и во-вторых, условия задачи предусматривают достаточно простой закон распределения по толщине напряжений σ_{12}, передающихся на торец пластины (второе требование заведомо выполняется, когда к свободному торцу оболочки не прикладываются внешние силы). При этом асимптотическая и сдвиговая теории оказываются адэкватны не только по окончательному результату, но и по простоте математического аппарата.

Высказанное утверждение существенно опирается на то обстоятельство, что в структурной формуле (5.5) справедливы асимптотические соотношения

$$(\text{НДС})_{\text{вн}} \sim \eta^{\alpha}(\text{НДС})^{a}_{\text{кр}} \gg \eta^{\beta}(\text{НДС})^{b}_{\text{кр}}$$

вытекающие из формулы (6.3) для показателей α, β.

Если край пластины заделан или шарнирно оперт, то вместо (6.3) показатели α, β будут определяться формулой (7.3). Из нее следуют асимптотические соотношения

$$(\text{НДС})_{\text{вн}} \sim \eta^{\beta}(\text{НДС})^{b}_{\text{кр}} \gg \eta^{\alpha}(\text{НДС})^{b}_{\text{кр}}$$

Они показывают, что в таких случаях исследование краевых упругих явлений в изгибаемой пластине на основе сдвиговых теорий лишается смысла. В лучшем случае при таком подходе в структурной формуле (5.5) удается построить лишь асимптотически второстепенное слагаемое $\eta^{\alpha}(\text{НДС})^{a}_{\text{кр}}$.

Асимптотический подход сохраняет силу и для изгибаемых пластин с жестким или шарнирным краем. В этих случаях он становится лишь несколько сложнее. Вместо гармонической задачи антиплоского пограничного слоя, надо решать бигармоническую задачу плоского пограничного слоя, а следовательно, вместо метода тригонометрических рядов прибегнуть, например, к методу Папковича.

Для оболочек, не вырождающихся в пластину, построение сдвиговых теорий в настоящее время нельзя считать завершенным. Посвященные этому работы [4, 15] выявили черезвычайную громоздкость соответствующих формул и уравнений, а вопрос о правомерности применений таких уравнений для краевого расчет пока и не поднимался. В то же время, для переноса на оболочки изложенного здесь приема раздельного внутреннего и краевого расчетов не нужны какие-либо новые разработки. Теория Кирхгофа–Лява сохранит силу для приближенного внутреннего расчета, а для краевого расчета по-прежнему надо будет решать хорошо изученные антиплоскую и плоскую задачи теорий упругости. Построению будут подлежать затухающие решения, для которых искривленность оболочки является второстепенным фактором. Поэтому специфика краевого расчета оболочек, не вырождающихся в пластину, будет заключаться лишь в том, что увеличится число случаев, требующих рассмотрения плоских пограничных слоев. Отпадает необходимость и в преодолении громоздкости сдвиговой теории оболочек.

Работа выполнена ~~при~~ поддержке Международного ~~научного~~ фонда (M7X000) ~~и~~ Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS-93-351).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А.Л.* Общая теория тонких упругих тел (оболочки, покрытия, прокладки) // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 5–17.
2. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
3. *Гольденвейзер А.Л.* Математическая жесткость поверхностей и физическая жесткость оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 6. С. 65–77.
4. *Рогачева Н.Н.* О соотношениях упругости Рейсснера – Нахди // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 1063–1071.
5. *Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В.* Асимптотический анализ и уточнение теорий пластин и оболочек типа Тимошенко – Рейсснера // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 124–138.
6. *Goldenveizer A.L., Kaplunov J.D., Nolde E.V.* On the Timoshenko – Reissner type theories of plates and shells // Intern. J. Solids and Structures. 1993. V. 30. № 5. P. 675–694.
7. *Green A.E.* Boundary-layer equations in the linear theory of thin elastic shells // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1962. V. 269. № 1339. P. 481–491.
8. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 593–608.
9. *Гольденвейзер А.Л.* Алгоритмы асимптотического построения линейной двумерной теории тонких оболочек и принцип Сен-Венана // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 96–108.
10. *Гольденвейзер А.Л.* Погранслой и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 6. С. 996–1028.
11. *Гольденвейзер А.Л.* О краевом напряженно-деформированном состоянии тонких упругих оболочек // Proc. Estonian Acad. Sci. Ser. Phys. Math. 1993. Т. 42. № 1. С. 32–44.
12. *Reissner E.* On the analysis of first and second-order shear deformation effects fot isotropic elastic plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1980. V. 47. № 4. P. 959–961.
13. *Гольденвейзер А.Л.* О применимости общих теорем теории упругости к тонким оболочкам // ПММ. 1944. Т. 8. Вып. 1. С. 3–14.
14. *Simmonds J.G.* An asymptotic analysis of end effects in the axisymmetric deformation of elastic tubes weak in shear: Higher order shell theories are inadequate and unnecessary // Intern. J. Solids and Structures. 1992. V. 29. № 20. P. 2441–2461.
15. *Naghdi P.M.* On the theory of thin elastic shells // Quart. Appl. Math. 1957. V. 14. № 4. P. 369–380.

Москва

Поступила в редакцию
13.XII.1994