

УДК 532.526

© 1995 г. В.А. Батищев

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

При больших числах Марангони исследуются нестационарные термокапиллярные течения в тонких слоях и слоях бесконечной толщины при неравномерном нагреве свободной границы. В плоском и осесимметричном случаях строятся автомодельные решения нелинейных уравнений пограничного слоя и приводятся асимптотические формулы. Показано, что автомодельные решения могут быть неединственными при определенных значениях параметров задачи. Численно рассчитаны точки ветвления и исследованы ответвившиеся решения.

Ранее рассматривались течения в тонких слоях, ограниченных двумя твердыми стенками [1], изучались [2] стационарные течения с твердой и свободной границами, построены [3] нестационарные автомодельные решения для пограничных слоев Марангони вблизи свободной границы в плоском случае.

1. Рассматривается задача о нестационарном термокапиллярном течении несжимаемой жидкости в тонком слое, ограниченном твердой стенкой S и свободной границей Γ , на которой задан ненулевой градиент температуры

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (1.1)$$

$$\partial T / \partial t + \mathbf{v} \nabla T = \chi \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$p = 2\nu \rho \Pi \mathbf{n} - \sigma(k_1 + k_2) + p_*, \quad (x, y, z) \in \Gamma \quad (1.2)$$

$$2\nu \rho [\Pi \mathbf{n} - (\mathbf{n} \Pi \mathbf{n}) \mathbf{n}] = \nabla_{\Gamma} \sigma, \quad T = T_{\Gamma}, \quad (x, y, z) \in \Gamma$$

$$\partial f / \partial t + \mathbf{v} \nabla f = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma; \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = T_S, \quad (x, y, z) \in S$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ – вектор скорости, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, g – ускорение силы тяжести, \mathbf{h} – единичный вектор внешней нормали к свободной границе Γ , Π – тензор скоростей деформации, k_1 и k_2 – главные кривизны поверхности Γ , p_* – заданное давление Γ ; $\nabla_{\Gamma} = \nabla - (\mathbf{n} \nabla) \mathbf{n}$ – градиент вдоль Γ , $f(x, y, z) = 0$ – уравнение свободной границы в неявном виде, $\sigma = \sigma_0 - |\sigma_T|/T - T_*$ – коэффициент поверхностного натяжения, линейно зависящий от температуры, где σ_0 , σ_T , T_* – известные постоянные ($\sigma_T < 0$), T_{Γ} и T_S – заданные значения температуры на Γ и S . Начальные условия на задаются, так как ниже строятся только автомодельные решения. Предполагается, что коэффициенты кинематической вязкости ν и температуропроводности χ малы.

При неравномерном нагреве свободной границы на ней, вследствие термокапиллярного эффекта, возникают касательные напряжения, которые при $\nu \rightarrow 0$ приводят к формированию нелинейных пограничных слоев. Задачу (1.1), (1.2) приводим к безразмерному виду путем введения характерных масштабов длины $L = \sqrt{\sigma_0 / (\rho g)}$, скорости $U = (\sigma_T^2 A^2 L \rho^{-2} \nu^{-1})^{1/3}$, давления $P = \rho U^2$ и времени L/U , где A – характер-

ный масштаб градиента температуры. Введем малый параметр $\varepsilon = M^{-1/3}$, где $M = |\sigma_T|L^2A\rho^{-1}\nu^{-2}$ – число Марангони, принимающее большие значения. Отметим, что малым ε соответствуют малые значения коэффициента кинематической вязкости ν или большие значения градиента температуры A . Введем параметр $\lambda = |\sigma_T|AL|\sigma_0$, который возникает при переходе к безразмерным переменным в динамическом краевом условии для нормальных напряжений на свободной границе и обозначим $p'_* = p_*/(\rho U^2)$.

Далее рассмотрим нестационарные течения в тонком слое толщиной порядка ε , ограниченном снизу твердой и сверху свободной границами.

Асимптотические разложения решения задачи (1.1), (1.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ строятся в виде

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{h}_0 + \varepsilon \mathbf{h}_1 + \dots, \quad p' \sim q_0 + \varepsilon q_1 + \dots, \quad (p' = (p + \rho g z) / P) \quad (1.3)$$

$$T \sim \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \dots, \quad \zeta \sim \varepsilon \zeta_1 + \dots$$

Здесь $z = \zeta(x, y, t)$ – уравнение свободной границы.

Краевые задачи для главных и высших членов асимптотических рядов (1.3) находятся путем применения метода пограничного слоя к системе (1.1), (1.2). Пусть твердая граница – плоскость $z = 0$, на которую помещено начало цилиндрической системы координат r, θ, z . Далее строится осесимметричное решение, для которого окружная компонента скорости отсутствует $v_\theta = 0$, а v, p', T, ζ не зависят от координаты θ . Обозначим h_{rk}, h_{zk} компоненты вектора \mathbf{h}_k . Подставляем ряды (1.3) в систему (1.1), (1.2) и вводим преобразование растяжения $z = \varepsilon s$. Приравнявая нулю коэффициенты при $\varepsilon^{-1}, \varepsilon$, находим, что $h_{z0} = 0$, а h_{r0}, h_{z1} удовлетворяют уравнениям пограничного слоя Прандтля

$$\partial h_{r0} / \partial t + h_{r0} \partial h_{r0} / \partial r + h_{z1} \partial h_{r0} / \partial s = \partial^2 h_{r0} / \partial s^2 - \partial q_0 / \partial r \quad (1.4)$$

$$\partial q_0 / \partial s = 0, \quad \partial(rh_{r0}) / \partial r + \partial(rh_{z1}) / \partial s = 0$$

с краевыми условиями

$$\partial h_{r0} / \partial s = -\partial T_\Gamma / \partial r, \quad \partial \zeta_1 / \partial t + h_{r0} \partial \zeta_1 / \partial r = h_{z1} \quad (s = \zeta_1(r, t))$$

$$h_{r0} = h_{z1} = 0 \quad (s = 0)$$

Краевые условия при $s = \zeta_1$ – это динамическое условие для касательных напряжений и кинематическое условие на свободной границе.

Далее систему (1.4) дополняем уравнением, которое получается при выполнении динамического краевого условия для нормальных напряжений на свободной границе. Рассмотрим случай, когда параметр λ имеет порядок ε^2 , т.е. $\lambda = \lambda_0 \varepsilon^2$. Теперь краевое условие для нормальных напряжений приводит к соотношению

$$\lambda_0 q_0 = \zeta_1 + \lambda_0 p'_* - \partial^2 \zeta_1 / \partial r^2 - r^{-1} \partial \zeta_1 / \partial r$$

В случае $\lambda \ll \varepsilon^2$ поверхность $s = \zeta_1(r, t)$ удовлетворяет последнему уравнению при $\lambda_0 = 0$, которое интегрируется отдельно от системы (1.4). Случай $\lambda \gg \varepsilon^2$ не рассматривается.

Построим автомодельное решение системы (1.4) при условии, что градиент температуры на Γ зависит от переменных r, t по степенному закону: $\partial T_\Gamma / \partial r = \tau r t^{-3/2}$. Функции h_{r0}, h_{z1}, q_0 представим в виде

$$h_{r0} = r t^{-1} F'(\xi), \quad h_{z1} = -2 t^{-1/2} F(\xi), \quad \partial q_0 / \partial r = -q r t^{-2}, \quad \xi = s t^{-1/2}$$

Краевые условия на свободной границе выполняются, если

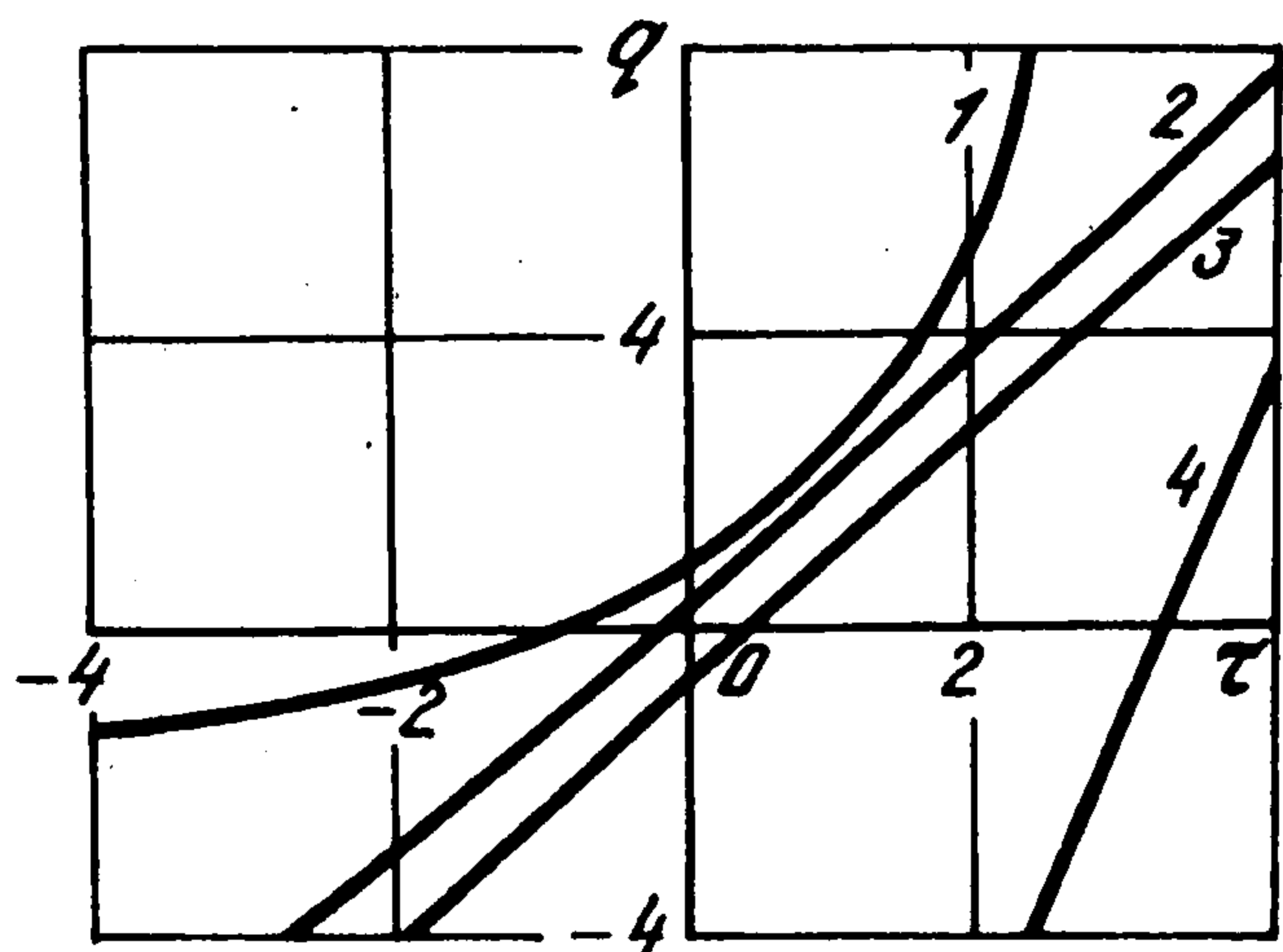
$$\zeta_1 = h \sqrt{t}, \quad \lambda_0 p'_* = \lambda_0 q r^2 t^{-2} / 2 - h \sqrt{t} + c(t)$$

где $c(t)$ – произвольная функция времени, h и q – параметры. Очевидно, что свободная граница $z = \varepsilon h \sqrt{t} + O(\varepsilon^2)$ удаляется от твердой стенки со скоростью $\varepsilon h / (2\sqrt{t}) + O(\varepsilon^2)$. Для функции $F(\zeta)$ из системы (1.4) выводим краевую задачу

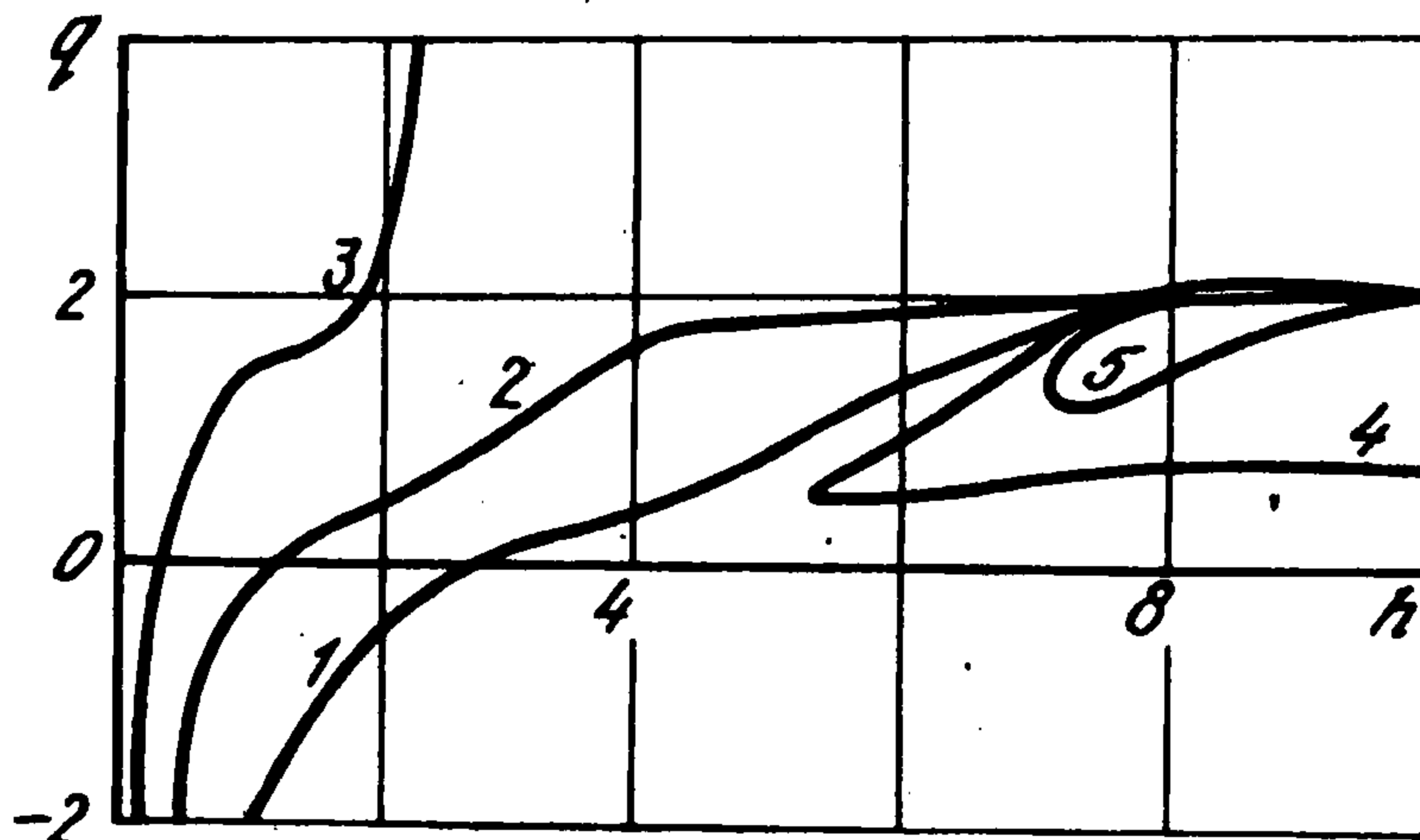
$$F''' = F'^2 - 2FF'' - F' - \xi F'' / 2 - q \quad (1.5)$$

$$F''(h) = -\tau, \quad F(h) = -h/4, \quad F(0) = F'(0) = 0$$

Отметим, что одно из краевых условий служит для определения неизвестной постоянной q . При $\tau > 0$ касательные напряжения на свободной границе направлены к оси симметрии, а при $\tau < 0$ – в противоположную сторону.



Фиг. 1



Фиг. 2

Задача (1.5) интегрировалась численно с применением метода Рунге–Кутты. При $h = \text{const}$ для $\tau \in (-4, 4)$ зависимости $q = q(\tau)$, изображены на фиг. 1 кривыми 1 и 2, соответствующими значениям $h = 2$ и $h = 1$. Отметим, что при $h = 1$ для значений τ в интервале $\tau_1 < \tau < \tau_2$ ($\tau_1 = -1,465$ и $\tau_2 = 1,198$) в профиле скорости имеется только зона тока, для которой $h_{r0} > 0$. При $\tau = \tau_2$ на твердой стенке касательные напряжения обращаются в нуль, а при $\tau > \tau_2$ вблизи этой границы возникает зона противотока. При $\tau = \tau_1$ скорость на свободной границе обращается в нуль, а при $\tau < \tau_1$ вблизи Γ возникает зона противотока.

Численные расчеты проводились для определения зависимости амплитуды градиента давления q от толщины слоя h при фиксированных значениях параметра τ . Расчеты показали, что при фиксированных значениях h в интервале $(0, 10)$ для $\tau \leq \tau_* = -0,1695$ имеется только одно решение. При $\tau > \tau_*$ задача (1.5) может иметь одно, два или три решения в зависимости от значений параметра h .

Рассмотрим случай $\tau = -1$ для которого на фиг. 2 кривая 1 изображает зависимость $q(h)$. Расчеты проводились при $0 < h \leq 10$. При каждом h найдено одно решение. С ростом h кривая $q(h)$ приближается к прямой $q = 2$.

Отметим три случая. При $0 < h < 1,429$ профиль скорости имеет только зону тока ($h_{r0} > 0$). При $h = 1,429$ скорость на свободной границе обращается в нуль, а в интервале $1,429 < h < 4,720$ вблизи свободной границы возникает зона противотока. При $h = 4,720$ касательные напряжения на твердой стенке обращаются в нуль. Для $h > 4,720$ вблизи границ слоя возникают зоны противотока при наличии зоны тока между ними.

Теперь рассмотрим случай $\tau = 0$. На фиг. 2 зависимость $q(h)$ представлена кривыми 2 и 4. Касательные напряжения на свободной границе отсутствуют. При $h < 5,164$ численно найдено только одно решение, которое принадлежит кривой 2. При $h > 5,164$ обнаружено три решения (одно принадлежит кривой 2, а два других – кривой 4). При $h = 5,164$ два решения, принадлежащие кривой 4, сливаются в одно. С ростом h кривая 2 и верхняя ветвь кривой 4 приближаются к прямой $q = 2$, причем обе кривые сначала пересекают эту

прямую, затем достигают максимума и далее убывают, приближаясь сверху к этой прямой. Решения соответствующие кривой 2 в интервале $h \in (0, h_1)$, где $h_1 = 2,585$, имеют только зону тока, при $h = h_1$ касательные напряжения на твердой стенке обращаются в нуль и при $h > h_1$ вблизи этой стенки возникает противоток.

Кривая 4 состоит из нижней и верхней ветвей, сливающихся при $h = h_* = 5,164$. На верхней ветви этой кривой при $h > 5,171$ профиль скорости имеет зону тока вблизи свободной границы и зону противотока вблизи твердой стенки. При $h = 5,171$ касательное напряжение на твердой стенке обращается в нуль, зона противотока исчезает и одновременно скорость на свободной границе обращается в нуль. Двигаясь влево вдоль верхней ветви кривой 4 от точки с $h = 5,171$, достигая "носика" при $h = h_*$, переходя на нижнюю ветвь этой кривой и достигая точки с координатой $h = 5,184$, находим, что профиль скорости здесь имеет зону тока вблизи стенки и зону противотока вблизи свободной границы. При $h = 5,184$ касательное напряжение на стенке обращается в нуль, а при $h > 5,184$ в профиле скорости возникают две зоны противотока (одна вблизи стенки, а другая вблизи свободной границы) и зона тока между ними.

В случае $\tau = 1$ зависимость $q(h)$ изображена кривыми 3 и 5 на фиг. 2. Крайняя левая точка кривой 5, в которой сливаются верхняя и нижняя ветви соответствует значению $h = 6,853$. В отличие от случая с $\tau = -1$ на нижней ветви кривой 5 при $h > 6,672$ возникают две зоны тока и две противотока.

2. Рассмотрим плоскую задачу о термокапиллярном течении жидкости в тонком слое толщиной порядка ϵ , ограниченном снизу твердой стенкой, а сверху свободной границей. Вводим декартову систему координат, начало которой помещаем на твердой стенке. Уравнение и краевые условия для h_{x0} , h_{z1} (компонент векторов \mathbf{h}_0 , \mathbf{h}_1) и функций q_0 , ζ_1 получаются из (1.4) заменой h_{r0} и координаты r соответственно на h_{x0} и x с уравнением неразрывности для плоской задачи и динамическим условием на свободной границе

$$\lambda_0 q_0 = \zeta_1 - \partial^2 \zeta_1 / \partial x^2 + \lambda_0 p'_*$$

Автомодельное решение существует при $\partial T_\Gamma / \partial x = \tau x t^{-3/2}$ и записывается в виде

$$h_{x0} = -x t^{-1} \psi'(\xi), \quad h_{z1} = t^{-1/2} \psi(\xi), \quad \partial q_0 / \partial x = q x t^{-2}, \quad \xi = s t^{-1/2}$$

Краевые условия на свободной границе выполняются, если ζ_1 и p'_* выбраны такими же как и в осесимметричном случае.

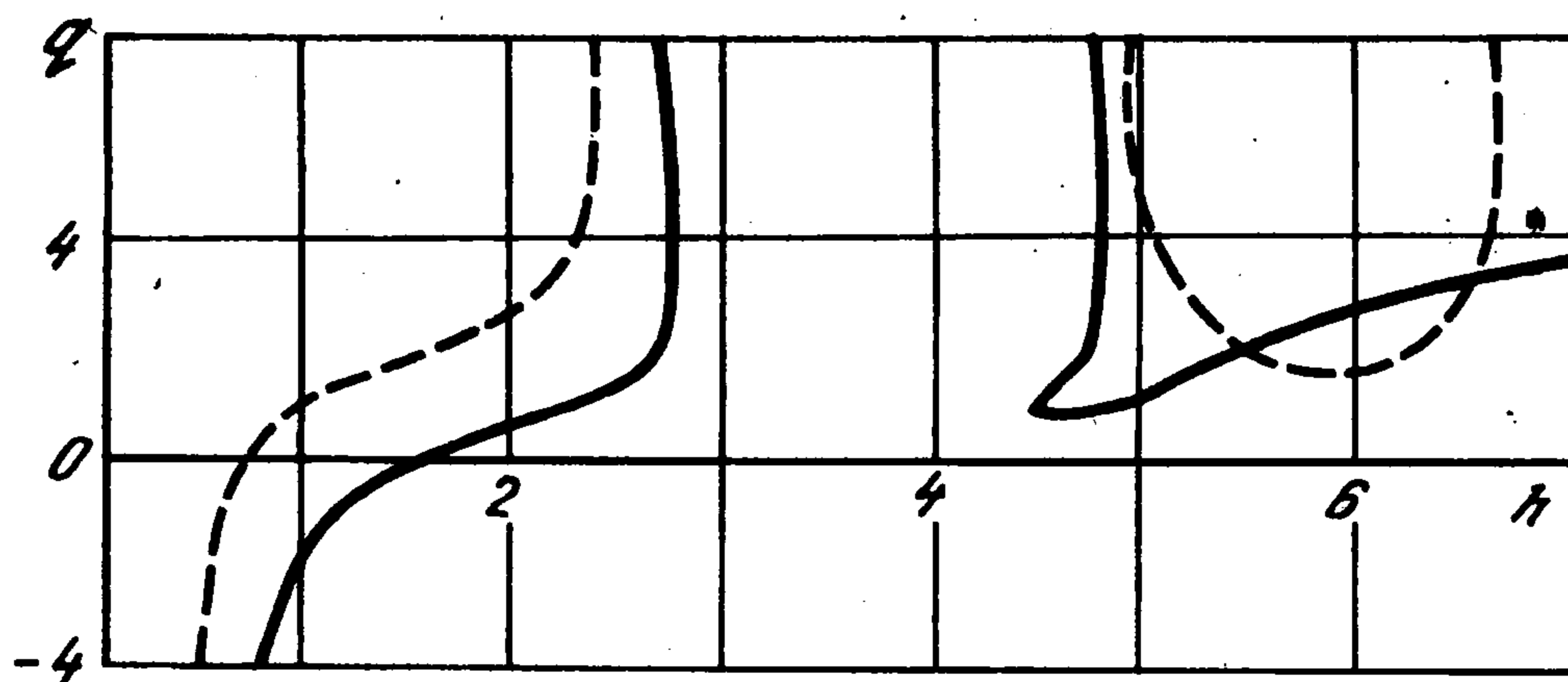
Функция $\psi(\xi)$ определяется из краевой задачи

$$\psi''' + (\xi/2 - \psi)\psi'' + \psi'^2 = q \tag{2.1}$$

$$\psi(0) = \psi'(0) = 0, \quad \psi''(h) = \tau, \quad \psi(h) = h/2$$

Результаты численных расчетов зависимости $q(\tau)$ изображены на фиг. 1 кривыми 3 и 4 для $h = 1$ и $h = 0,3$ соответственно. Отметим, что при $h = 1$ в интервале $-2,909 < \tau < 2,221$ профиль скорости имеет только одну зону тока ($h_{x0} > 0$). При $\tau = -2,909$ на свободной границе скорость обращается в нуль и при $\tau < -2,909$ вблизи Γ возникает зона противотока. При $\tau = 2,221$ касательные напряжения на твердой стенке S обращаются в нуль и при $\tau > 2,221$ вблизи S возникает зона противотока.

Численные расчеты проводились и для определения зависимости градиента давления от толщины слоя h при фиксированных τ . На фиг. 3 показана зависимость $q(h)$ при $\tau = 0$ (сплошные кривые) и при $\tau = 1$ (штриховые линии). Для $\tau = 1$ найдены две ветви решений. Для одной ветви решения получены только в интервале $0 < h < h_1 = 2,251$, а для второй – при $h \leq h_2 = 6,718$. При значениях h , близких к h_1 и h_2 задача (2.1) имеет два решения, для одного из которых функция $q(h)$ с уменьшением параметра h от значений h_1 и h_2 стремительно возрастает.



Фиг. 3

При малых значениях h разлагая функцию $\psi(\xi)$ в ряд по степеням ξ и оставляя три члена, находим

$$q = \frac{3}{2}(-h^{-2} + h/\tau)[1 + o(1)] \quad (h \rightarrow 0)$$

При $h = 0,1$ и $\tau = 1$ у численного и асимптотического значений совпадают три значащие цифры.

В случае $\tau = 0$ также найдены две ветки решений, одна из которых рассчитана в интервале $0 < h \leq h_1 = 2,644$, а вторая при $h > h_2 = 4,406$. При h , близких к h_1 и h_2 вне интервала (h_1, h_2) рассчитаны по два решения. При $h \in (h_1, h_2)$ ограниченных численных решений не обнаружено. Теперь, в отличие от случая с $\tau = 1$ решения найдены при любых $h > h_2$. Отметим, что расчеты проводились и для отрицательных τ , например при $\tau = -0,3$, причем качественное поведение функции $q(h)$ аналогично случаю $\tau > 0$.

3. Рассмотрим трехмерное нестационарное термокапиллярное осесимметричное течение жидкости в неограниченной области (слой бесконечной толщины) при неравномерном нагреве свободной границы. В крайних условиях (1.2) вместо условий на твердой стенке теперь ставится условие на бесконечности $v \rightarrow U_0$ ($z \rightarrow \infty$). Здесь начало цилиндрической системы координат помещено на свободную границу, причем ось z направлена в полупространство, занятое жидкостью. Асимптотические разложения решения задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$, в отличие от (1.3), строим в виде

$$v \sim \mathbf{h}_0 + \mathbf{v}_0 + \varepsilon(\mathbf{h}_1 + \mathbf{v}_1) + \dots, \quad p \sim p_0 + \varepsilon(p_1 + q_1) + \dots$$

Обозначим через D_Γ область пограничного слоя. Тогда $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, q_1, \dots$ – функции типа решений задачи пограничного слоя в D_Γ . Вне D_Γ решение задачи определяют функции \mathbf{v}_k, p_k , причем \mathbf{v}_0, p_0 описывают невязкое течение и удовлетворяют уравнениям Эйлера.

Предположим, что вектор \mathbf{v}_0 имеет компоненты $(U_0(r, t), 0, 0)$. Тогда из уравнений Эйлера следует

$$\partial U_0 / \partial t + U_0 \partial U_0 / \partial r = -\partial p_0 / \partial r$$

Последнее уравнение имеет решение

$$U_0 = r t^{-1} U_\infty, \quad p_0 = r^2 t^{-2} (U_\infty - U_\infty^2) / 2 + c(t)$$

где $U_\infty = \text{const}$, $c(t)$ – произвольная функция времени. Для этого решения свободная граница (в отсутствие вязкости) оказывается плоскостью $z = 0$, если положить $p_* = p_*^{(0)} + \varepsilon p_*^{(1)} + \dots$ и $p_*^{(0)}$ задать как и в предыдущем осесимметричном случае (с учетом соотношения $h = 0$).

Построим автомодельное решение, считая, что вектор \mathbf{h}_0 не зависит от координаты θ . Продольные компоненты $u_{r0}, u_{\theta 0}$ вектора $\mathbf{u}_0 = \mathbf{h}_0 + \mathbf{v}_0$ и поперечная компонента u_{z1}

вектора $\mathbf{h}_1 + \mathbf{v}_1$ ($u_{z0} = 0$) в пограничном слое удовлетворяют пространственным уравнениям Прандтля. Приведем уравнение только для компоненты $u_{\theta 0}$

$$\frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial t} + u_{r0} \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial r} + u_{z1} \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial z} + u_{\theta 0} u_{r0} / r = \frac{\partial^2 u_{\theta 0}}{\partial s^2} - \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \quad (3.1)$$

Уравнение для u_{r0} получается из (3.1) заменой производных от $u_{\theta 0}$ на производные от u_{r0} , а члены $u_{\theta 0} u_{r0}$ и $\partial p_0 / \partial \theta$ заменяются соответственно на $-u_{\theta 0}^2$ и $\partial p_0 / \partial r$.

Краевые условия приводятся к виду

$$\frac{\partial u_{r0}}{\partial s} = -\frac{\partial T_{\Gamma}}{\partial r}, \quad \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial s} = 0, \quad u_{z1} = 0 \quad (s = z, \quad \varepsilon = 0)$$

$$u_{r0} \rightarrow U_0, \quad u_{\theta 0} \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow \infty)$$

Предполагается, что градиент температуры на Γ не зависит от координаты θ .

Можно показать, что $q_1 = 0$ и деформация свободной границы имеет порядок $O(\varepsilon^2)$, если соответствующим образом задать функцию $p_*^{(1)}$ на свободной поверхности. Ранее [3] была изучена только двумерная система Прандтля с краевыми условиями на плоской свободной границе.

Зададим функцию $T_{\Gamma}(r, t)$ соотношением $\partial T_{\Gamma} / \partial r = \tau r t^{-3/2}$. Решение задачи (3.1) представим в виде

$$u_{r0} = r t^{-1} F'(\xi), \quad u_{\theta 0} = r t^{-1} G(\xi), \quad u_{z1} = -2 t^{-1/2} F(\xi), \quad \xi = s / \sqrt{t}$$

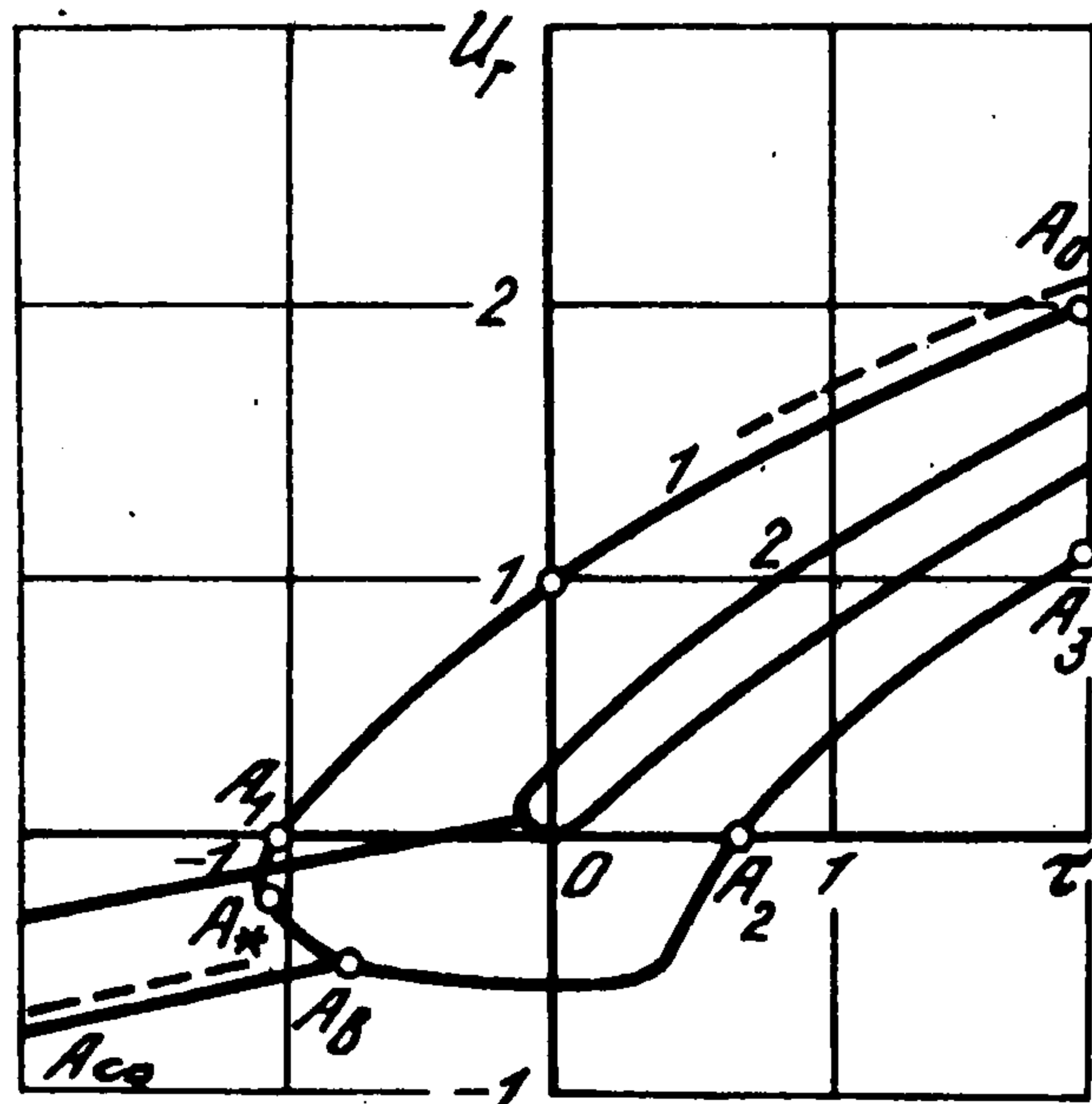
Функции F, G находятся путем решения краевой задачи

$$F''' = F'^2 - 2FF'' - F' - \xi F'' / 2 - G^2 + U_{\infty} - U_{\infty}^2 \quad (3.2)$$

$$G'' = 2(F'G - FG') - G - \xi G' / 2$$

$$F''(0) = -\tau, \quad G'(0) = F(0) = G(\infty) = 0, \quad F'(\infty) = U_{\infty}$$

Численный расчет системы (3.2) приводит к выводу, что в зависимости от величины и направления градиента температуры возникает несколько решений. При $\tau < \tau_*$ найдены два симметричных решения с вращением. В интервале (τ_*, τ_b) рассчитаны четыре решения, из которых два решения с вращением и два другие без вращения. При $\tau > \tau_b$ обнаружено только два решения без вращения.



Фиг. 4

а при $\tau < 0$ — монотонно возрастает. На ветви $A_1 A_4 A_7$ значения τ изменяются в интервале (τ_*, τ_2) , где $\tau_2 = 0,619$. Вблизи свободной границы имеется зона противотока ($u_{r0} < 0$), а при больших ξ — зона тока. Для значений соответствующих ветви $A_2 A_3$ имеются две зоны тока, одна из которых находится вблизи свободной границы, а другая при больших ξ и зона тока между ними.

Сначала рассмотрим течение, в котором отсутствует окружная компонента скорости ($u_{\theta 0} = 0$) и положим $G = 0$ в (3.2). Введем обозначение $U_{\Gamma}^{00} = F'(0)$ и определим U_{∞} и U_{Γ} как "амплитуды" скорости не бесконечности и свободной границе. Проведем анализ численных результатов при $U_{\infty} = 1$. На фиг. 4 кривая I ($A_0 A_1 A_4 A_7 A_2 A_3$) изображают зависимость U_{Γ} от τ . Решение задачи (3.2) найдено только при $\tau_* \leq \tau < \infty$, причем при $\tau < \tau_*$ ограниченных численных решений не обнаружено. Отметим, что $\tau_* = -1,060$. При каждом $\tau > \tau_*$ рассчитано по два решения. На ветви $A_0 A_1$ скорость на свободной границе положительна и профиль скорости монотонный. В точке A_1 введем значения $\tau_1 = -1,035$ и $U_{\Gamma} = 0$. При $\tau = 0$ решение тривиально: $u_{r0} = 1$. При $\tau > 0$ скорость в пограничном слое монотонно убывает с ростом ξ ,

При $U_\infty = 0$ анализ проводится аналогично. На фиг. 4 кривая 2 изображает зависимость $U_\Gamma(\tau)$. Отметим, что решений с $u_{\theta 0} = 0$ не обнаружено при $\tau < \tau_* = -0,054$. При $\tau = 0$ найдено одно нетривиальное решение и одно тривиальное $u_{\theta 0} = 0$.

Приведем асимптотические решения при $\tau \rightarrow \infty$ для верхних ветвей кривых 1 и 2 на фиг. 4. Введем функцию $f(\eta) = \tau^{-1/3} / (F - U_\infty \xi)$, где $\eta = \tau^{1/3} \xi$ и отметим, что $f'(\infty) = 0$. Представим $f(\eta)$ и U_Γ в виде асимптотических рядов

$$f = f_0(\eta) + \tau^{-2/3} f_1(\eta) + O(\tau^{-4/3}), \quad U_\Gamma = \tau^{2/3} f_0'(0) + U_\infty + f_1'(0) + O(\tau^{-2/3}) \quad (\tau \rightarrow \infty)$$

Функции f_0, f_1 определяются из краевых задач

$$f_0''' + 2f_0 f_0'' - f_0'^2 = 0, \quad f_0(0) = f_0'(\infty) = f_0''(0) + 1 = 0$$

$$f_1''' + 2f_0 f_1'' - 2f_1 f_0'' - 2f_0' f_1' = (2U_\infty - 1)f_0' - \eta(1/2 + 2U_\infty)f_0'', \quad f_1(0) = f_1''(0) = f_1'(\infty) = 0$$

Численные расчеты приводят к значениям $f_0'(0) = 0,8987$ и $f_1'(0) = -0,6322$ при $U_\infty = 1$, а также $f_1'(0) = 0,1542$ с тем же значением $f_1'(0)$ для $U_\infty = 0$. На фиг. 4 штриховая линия вблизи верхней ветви кривой 1 при положительных значениях τ изображает асимптотическое решение для $U_\infty = 1$.

Теперь рассмотрим решение системы (3.2) при $\tau < \tau_*$. В этом случае $u_{\theta 0} \neq 0$ (возникает течение с вращением вокруг оси z). Численно найдена ветвь решений, которая при $U_\infty = 1$ изображена кривой $A_b A_\infty$ на фиг. 4 (и соответствующая ветвь для $U_\infty = 0$). Отметим, что точка A_b с координатой $\tau = \tau_b = -0,895$ оказывается точкой ветвления (при $U_\infty = 0$ значение τ_b равно $-0,038$) причем $\tau_b > \tau_*$. При $\tau \rightarrow \tau_b - 0$ окружная компонента скорости $u_{\theta 0}$ стремится к нулю и обращается в нуль при $\tau = \tau_b$. Вдоль ветви $A_\infty A_b$ возникают два симметричных решения $(u_{r0}, \pm u_{\theta 0}, u_{z1})$ одно из которых получается из другого изменением направления окружной компоненты скорости на противоположное.

Построим асимптотическое решение задачи (3.2) при $\tau \rightarrow -\infty$. Введем переменную $\eta_1 = \tau^{1/3} \xi$ и представим функции F, G и U_Γ в виде рядов

$$F = (-\tau)^{1/3} F_0(\eta_1) + (-\tau)^{-1/3} [\eta_1 U_\infty + F_1(\eta_1)] + O((-\tau)^{-1})$$

$$G = (-\tau)^{2/3} G_0(\eta_1) + G_1(\eta_1) + O((-\tau)^{-2/3})$$

$$U_\Gamma = (-\tau)^{2/3} F_0'(0) + U_\infty + F_1'(0) + O((-\tau)^{-2/3}) \quad (\tau \rightarrow -\infty)$$

Функции F_0, F_1, G_0, G_1 определяются путем решения краевых задач, которые не приводятся ввиду их громоздкости. Приведем значения $F_0'(0) = -0,5181, F_1'(0) = -0,6882, G_0(0) = 1,0659, G_1(0) = 0,0085$ при $U_\infty = 1$. На фиг. 4 пунктирная кривая вблизи ветви $A_\infty A_b$ изображает асимптотическое решение при $U_\infty = 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-176-98), Международного научного фонда и Правительства Российской Федерации (J2K 100).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 2. М.: Мир, 1990. 726 с.
2. Батищев В.А. Автомодельные решения, описывающие термокапиллярные течения в вязких слоях // ПММ. 1991. Т. 55, вып. 3. С. 389-395.
3. Пухначев В.В. Групповой анализ уравнений нестационарного пограничного слоя Марангони // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 5. С. 1061-1064.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
31.X.1994