УДК 539.3

© 1995 г. А.Г. Колпаков

ДОПОЛНЕНИЕ К СТАТЬЕ "К ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИНОК"

Строятся асимптотические выражения прогибов порядка ε^{-1} ($\varepsilon \to 0$) термоупругой задачи для неоднородной пластинки (ε – характерный размер ячейки периодичности). На основании их получены определяющие уравнения для соответствующих усилий и моментов, что позволило согласовать полученные результаты с классическими.

Автором [1] получена предельная задача (задача теории пластинок) для трехмерного тела периодической структуры (P_ε – ячейка периодичности) малой толщины. Условие малости формализуется в виде $\varepsilon \to 0$. Задача описывает перемещения и прогибы пластинки порядка ε и выше (по возрастающим степеням ε). Ранее [2] были получены классические определяющие уравнения для перемещений порядка ε^0 при условии, что коэффициенты теплового расширения материала пластинки имеют порядок ε по сравнению с упругими постоянными. Это нефизичное предположение (не позволяющее описывать нормальное тепловое расширение в плоскости пластинки) было снято в [1], при этом возникли неклассические определяющие соотношения. Однако в [1] не были рассмотрены прогибы порядка ε^{-1}, что не позволило полностью согласовать полученные в [1, 2] результаты с классическими [3]. Это рассмотрение проводится в данной заметке.

Если $\beta_{ij} \sim \varepsilon^0$ (т.е. коэффициенты теплового расширения не зависят от ε), то перемещения в плоскости пластинки имеют тот же порядок ε^0. Для уравновешивания возникающих термоупругих моментов (если пластинка несимметрична) нормальные прогибы должны иметь порядок ε^{-1} (и расти при утоньшении пластины). Можно привести соответствующие примеры роста прогибов, хотя в реальных конструкциях такие прогибы, как правило, исключаются путем соответствующего закрепления пластины. Полный анализ задачи требует ввести эти члены в рассмотрение (как оказывается, именно им соответствует классическая часть определяющих уравнений).

Возьмем разложение для перемещений рассматриваемого тонкого трехмерного тела в виде (везде далее используются обозначения [1])

$$\mathbf{u} = \varepsilon^{-1} w^{(-1)}(\mathbf{X})\mathbf{e}_3 - y_3 w^{(-1)}_{3,\alpha x}(\mathbf{X})\mathbf{e}_\alpha + u_1(\mathbf{X}) \qquad (1)$$

Перемещения u_1 определены рядом (2.1) [1], $\alpha x = \partial/\partial x_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$); $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$ – координаты в плоскости пластинки, $y_3 = x_3/\varepsilon$ – безразмерная координата поперек пластинки.

При выборе разложения в виде (1) член порядка ε^{-3} в разложении напряжений по степеням (–3, –2,...) ε принимает вид

$$\sigma^{(-3)}_{ij} = [a_{ijk\alpha}(\mathbf{y})u^{(0)}_{k,\alpha x}(\mathbf{X}) + a_{ijkl}(\mathbf{y})u^{(1)}_{k,ly} - \beta^{(0)}_{ij}(\mathbf{y})\theta(\mathbf{X})] + a_{ij\alpha\beta}(\mathbf{y})y_3 w^{(-1)}_{3,\alpha\beta x}(\mathbf{X}) \qquad (2)$$

Член в квадратных скобках в (2) совпадает с выражением для (4.2) [1]; $,jy = \partial/\partial y_j$ ($j = 1, 2, 3$); $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Функции (2) удовлетворяют задаче (4.1) [1]: $\sigma^{(-3)}_{ij,jy} = 0$ в Q_1, $\sigma^{(-3)}_{ij} n_j = 0$ на γ (Q_1 – область, занятая пластинкой, γ – ее боковая поверхность, см. [1]). Используя решения $\mathbf{N}^{\alpha\beta\nu}$ ячеечных задач (4.4) [1], получаем

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(1)}_1 + \mathbf{N}^{\alpha\beta 1}(\mathbf{y}) w^{(-1)}_{3,\alpha\beta x}(\mathbf{X}) \qquad (3)$$

$\mathbf{u}^{(1)}_1$ дается формулой (4.7) [1].

Подставив (3) в (2), получаем

$$\sigma_{ij}^{(-3)} = (a_{ij\alpha\beta}(\mathbf{y})y_3 + a_{ijkl}(\mathbf{y})N_{k,ly}^{\alpha\beta 1}(\mathbf{y}))w_{3,\alpha x\beta x}^{(-1)}(\mathbf{X}) + (a_{ij\alpha\beta}(\mathbf{y}) + a_{ijkl}(\mathbf{y})N_{k,ly}^{\alpha\beta 0}(\mathbf{y}))u_{\alpha,\beta x}^{(0)}(\mathbf{X}) -$$
$$-(\beta_{ij}^{(0)}(\mathbf{y}) - a_{ijkl}(\mathbf{y})F_{k,ly}^{(0)}(\mathbf{y}))\theta(\mathbf{X}) \quad (4)$$

Интегрирование по P_1 ($P_1 = \varepsilon^{-1}P_\varepsilon$ – ячейка периодичности в безразмерных переменных $\mathbf{y}$) равенства (4) и его же, умноженного на y_3, дает определяющие соотношения

$$N_{\gamma\sigma}^{(-3)} = A_{\gamma\delta\alpha\beta}^{0}u_{\alpha,\beta x}^{(0)} + A_{\gamma\delta\alpha\beta}^{1}w_{3,\alpha x\beta x}^{(-1)} - B^{(0)0}\theta$$
$$M_{\gamma\sigma}^{(-3)} = A_{\gamma\delta\alpha\beta}^{1}u_{\alpha,\beta x}^{(0)} + A_{\gamma\delta\alpha\beta}^{2}w_{3,\alpha x\beta x}^{(-1)} - B^{(0)1}\theta$$
$$(\gamma, \delta, \alpha, \beta = 1, 2) \quad (5)$$

$A_{ij\alpha\beta}^{\nu+\mu}, B_{ij}^{(\nu)\mu}$ определены формулами (4.21), (4.22) [1]. Уравнения равновесия для усилий $N_{\gamma\delta}^{(-3)}$ и моментов $M_{\gamma\delta}^{(-3)}$ даются равенствами (3.1), (3.2) [1].

В формуле (5) $B^{(0)0}$ – усредненные коэффициенты теплового расширения в плоскости пластинки (аналог коэффициентов теплового расширения в плоской задаче теории упругости [4–6]), $B^{(0)1}$ описывают термоупругие изгибающие моменты. Как видно, нормальные прогибы $w_3^{(-1)}$ порядка ε^{-1} описываются определяющими уравнениями классического типа, для нормальных прогибов $w_3^{(0)}$ порядка ε^0 следует использовать полученные в [1] неклассические уравнения (даже для случая $w_3^{(-1)} = 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колпаков А.Г.* К задаче термоупругости неоднородных пластинок // ПММ, 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 487–494.
2. *Каламкаров А.Л., Кудрявцев Б.А., Партон В.З.* Термоупругость регулярно неоднородного искривленного слоя с волнистыми поверхностями // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 1000–1008.
3. *Тимошенко С.П., Войновский–Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз. 1963. 635 с.
4. *Колпаков А.Г.* Эффективные термоупругие характеристики неоднородного материала // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамки СО АН СССР. 1981. Вып. 49. С. 45–55.
5. *Колпаков А.К.* К определению некоторых эффективных характеристик композиционных материалов // Аннот. докл. 5-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Аннотации докл. Алма-Ата: Наука, 1981. С. 202.
6. *Ene H.I.* On linear thermoelasticity of composite materials // Intern. J. Eng. Sci. 1983. V. 21. N 5. P. 443–448.

Новосибирск

Поступила в редакцию
20.IV.1994