УДК 539.3:624.046

© 1995 г. А.Н. Али-Заде, Я.А. Эюбов

ОБ ОДНОМ ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ РАСЧЕТА ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ

Приводится вариационный принцип смешанного типа для определения напряженно-деформированного состояния нелинейно вязкоупругого тела в предположении взаимосвязанности процессов ползучести и повреждаемости и с учетом геометрической нелинейности. Особенностью функционала является формулировка его в ускорениях, что позволило ввести в систему уравнений Эйлера наряду с уравнениями равновесия уравнение повреждаемости. Данный функционал апробирован на задаче длительной прочности цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления.

В связи с задачей расчета конструкции на длительную прочность будем полагать, что разрушение является рассеянным и что в процессе разрушения тело проявляет наследственные свойства. Будем считать тело вязкоупругим и учитывать, что в физические соотношения входит параметр ω, определяющий накопление повреждаемости. Считая объемную деформацию упругой, физические соотношения возьмем в виде

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}g_{ij}\sigma^{kl}g_{kl}+\frac{3}{2}\int_0^t K(t-\tau,\omega)f(I,\omega)(\sigma_{ij}-\frac{1}{3}g_{ij}\sigma^{kl}g_{kl})d\tau \tag{1}$$

$$I^2=\frac{3}{2}\left(\sigma^{ij}-\frac{1}{3}g^{ij}\sigma^{kl}g_{kl}\right)\left(\sigma_{ij}-\frac{1}{3}g_{ij}\sigma^{pq}g_{pq}\right)$$

где наряду с обычными обозначениями принято, что f – функция нелинейности (если $f=1$ и $\partial k/\partial\omega=0$, то получаем линейное вязкоупругое тело), g_{ij} – компоненты метрического тензора, I – второй инвариант тензора напряжений.

Для определения параметра повреждаемости ω используется кинетическое уравнение повреждаемости, которое по аналогии с соотношением (1) возьмем в виде [2]

$$\omega=\int_0^t c(t-\tau)\varphi(I,\omega)d\tau \tag{2}$$

где φ – функция повреждаемости, $c(t)$ – ядро повреждаемости. Из полученных соотношений видно, что в случае постоянства напряжений во времени может происходить накопление повреждаемости, что соответствует исходным предпосылкам.

Рассматриваемая нелинейная задача усложняется при учете больших перемещений, что характерно для задач вязкоупругости. Для решения таких задач необходимо применять приближенные методы, в частности вариационный.

Приведем один из возможных функционалов

$$J=\int_V\left\{\frac{1}{2}\dot\sigma^{ij}(\ddot u_{i,j}+\ddot u_{j,i}+\ddot u^k_{,i}u_{k,j}+2\dot u^k_{,i}\dot u_{k,j}+u^k_{,i}\ddot u_{k,j})+\sigma^{ij}u^k_{,j}\ddot u_{k,i}-\right.$$

$$-\dot\sigma^{ij}\left(\frac{1+\nu}{E}\ddot\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}g_{ij}\ddot\sigma^{kl}g_{kl}\right)-\frac{3}{2}\dot\sigma^{ij}\left[\int_0^t K''_{tt}(t-\tau,\omega)f(I,\omega)\left(\sigma_{ij}-\frac{1}{3}g_{ij}\sigma^{kl}g_{kl}\right)d\tau+\right.$$

$$+[K(0,\omega)f(I,\omega)]'_\omega\dot\omega\left(\sigma_{ij}-\frac{1}{3}g_{ij}\sigma^{kl}g_{kl}\right)+\frac{1}{2}K(0,\omega)f'_I\frac{\partial I}{\partial\sigma^{pq}}\dot\sigma^{pq}\times$$

$$\times\left(\sigma_{ij}-\frac{1}{3}g_{ij}\sigma^{kl}g_{kl}\right)+\frac{1}{2}K(0,\omega)f(I,\omega)\left(\dot\sigma_{ij}-\frac{1}{3}g_{ij}\dot\sigma^{kl}g_{kl}\right)+$$

$$+K_t'(0,\omega)f(I,\omega)\left(\sigma_{ij}-\frac{1}{3}g_{ij}\sigma^{kl}g_{kl}\right)\Bigg]-$$

$$-\left(\ddot\omega-\int_0^t C_{tt}''(t-\tau)\varphi(I,\omega)d\tau-C_t'(0)\varphi(I,\omega)-C(0)\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\dot\omega\frac{1}{2}\right)\dot\omega C^{-1}(0)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial\varphi}{\partial I}\right)^{-1}I[K(0,\omega)f(I,\omega)]_\omega'\Bigg\}dV-\int_{S_\sigma}\dot{\bar T}^i\ddot u_i dS+\int_{S_u}\dot T^i(\ddot{\bar u}_i-\ddot i_i)dS \qquad (3)$$

где V – объем тела, u_i – компоненты вектора перемещений, запятая означает ковариантное дифференцирование, штрих – дифференцирование по указанному аргументу, точка – дифференцирование по t. При написании функционала (3) считалось, что задача формулируется для случая, когда граничные условия разделены, а именно: под S_σ подразумевается часть поверхности тела с объемом V, на которой заданы усилия $\bar T^k$, имеющие вид [1]

$$\bar T^k=\sigma^{ij}(\delta_j^k+u_{,j}^k)n_i$$

где n_i – компоненты вектора нормали, δ – символ Кронекера, а на оставшейся части поверхности, предполагается задание вектора перемещения $\bar u_i$. Варьируемыми величинами являются $\ddot u_i,\dot\sigma^{ij},\dot\omega$. При этом предполагается, что оператор варьирования δ действует лишь на варьируемые величины. Приведенный принцип гласит, что те функции, которые определяют стационарное значение функционала (3) при описанных условиях варьирования, определяют также нелинейное поведение вязкоупругого тела при учете повреждаемости, т.е. они удовлетворяют нелинейным уравнениям равновесия в декартовой системе координат

$$[\sigma^{ij}(\delta_j^k+u_{,j}^k)]_{,i}=0 \qquad (4)$$

определяют перемещения через напряжения

$$\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{,i}^k u_{k,j})=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}g_{ij}\sigma^{kl}g_{kl}+$$

$$+\frac{3}{2}\int_0^t K(t-\tau,\omega)f(I,\omega)\left(\sigma_{ij}-\frac{1}{3}g_{ij}\sigma^{kl}g_{kl}\right)d\tau \qquad (5)$$

удовлетворяют граничным условиям

$$T^i=\bar T^i,\quad x\in S_\sigma;\quad u_i=\bar u_i,\quad x\in S_u \qquad (6)$$

и при этом выполняется кинетическое уравнение повреждаемости (2).

Докажем приведенное утверждение. Для этого найдем первую вариацию функционала (3), учитывая условия варьирования. Получим:

$$\delta J=\int_V\Big\{\delta\dot\sigma^{ij}\,{}^1\!/\!_2(\ddot u_{i,j}+\ddot u_{j,i}+\ddot u_{,i}^k u_{k,j}+2\dot u_{,i}^k\dot u_{k,j}+u_{,i}^k\ddot u_{k,j})+\sigma^{ij}\dot u_{,j}^k\delta\ddot u_{k,i}+$$

$$+\dot\sigma^{ij}(\delta\ddot u_{i,j}+u_{k,j}\delta\ddot u_{,i}^k)-\delta\dot\sigma^{ij}({}^3\!/\!_2)\Bigg[\int_0^t K_{tt}''(t-\tau,\omega)f(I,\omega)(\sigma_{ij}-{}^1\!/\!_3 g_{ij}\sigma^{kl}g_{kl})d\tau+$$

$$+[K(0,\omega)f(I,\omega)]_\omega'\dot\omega(\sigma_{ij}-{}^1\!/\!_3 g_{ij}\sigma^{kl}g_{kl})+K(0,\omega)f_I'\frac{\partial I}{\partial\sigma^{pq}}\dot\sigma^{pq}\left(\sigma_{ij}-\frac{1}{3}g_{ij}\sigma^{kl}g_{kl}\right)+$$

$$+K(0,\omega)f(I,\omega)\left(\dot\sigma_{ij}-\frac{1}{3}g_{ij}\dot\sigma^{kl}g_{kl}\right)+K_t'(0,\omega)f(I,\omega)\left(\sigma_{ij}-\frac{1}{3}g_{ij}\sigma^{kl}g_{kl}\right)\Bigg]-$$

$$-\left(\ddot\omega-\int_0^t C_{tt}''(t-\tau)\varphi(I,\omega)d\tau-C_t'(0)\varphi(I,\omega)-C(0)\varphi_\omega'\dot\omega-\dot\sigma^{ij}C(0)\varphi_I'\frac{\partial I}{\partial\sigma^{ij}}\right)\times$$

$$\times\delta\dot\omega\left(\frac{\partial\varphi}{\partial I}\right)^{-1} C^{-1}(0)I[K(0,\omega)f(I,\omega)]'_{\omega}\Bigg\}dV-\int_{S_\sigma}\dot{\bar T}^i\delta\ddot u_i dS+\int_{S_u}[\delta\dot T^i(\ddot{\bar u}_i-\ddot u_i)-\dot T^i\delta\ddot u_i]dS$$

использована теорема Гаусса–Остроградского). При помощи основной леммы вариационного исчисления и соотношения

$$\sigma_{ij}-\frac{1}{3}g_{ij}\sigma^{kl}g_{kl}=\frac{2}{3}I\frac{\partial I}{\partial\sigma^{ij}} \tag{7}$$

равнение Эйлера в декартовой системе координат для функционала (3) получим в виде

$$\left\{\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u^k_{,i}u_{k,j})-\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}+\frac{\nu}{E}g_{ij}\sigma^{kl}g_{kl}-\frac{3}{2}\int_0^t K(t-\tau,\omega)f(I,\omega)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sigma_{ij}-\frac{1}{3}g_{ij}\sigma^{kl}g_{kl}\right)d\tau\right\}^{\cdot\cdot}=0$$

$$\left\{[\sigma^{ij}(\delta^k_j+u^k_{,j})]_{,i}\right\}^{\cdot}=0,\quad \left\{\omega-\int_0^t C(t-\tau)\varphi(\omega,I)d\tau\right\}^{\cdot\cdot}=0 \tag{8}$$

$$\{T^i-\bar T^i\}^{\cdot}=0,\quad x\in S_\sigma;\quad \{u_i-\bar u_i\}^{\cdot\cdot}=0,\quad x\in S_u$$

Таким образом, пришли к системе определяющих уравнений в дифференциальной форме.

Поэтому можно считать предложенный принцип доказанным.

При численном нахождении стационарного значения функционала (3) задача сводится к решению системы интегродифференциальных уравнений.

Из вида системы (8) заключаем, что ее можно проинтегрировать во времени. Для этого поставим начальные условия. Первоначально решим нелинейную вязкоупругую задачу с поставленными выше граничными условиями, но с ядром $K(t-\tau,0)$. За начальное условие для системы (8) примем решение построенной вязкоупругой задачи с этим ядром. Кроме того, сюда необходимо присовокупить начальные условия для повреждаемости, а именно:

$$\omega=0,\quad \dot\omega=C(0)\varphi(0,I(0))\quad \text{при}\quad t=0$$

Очевидно, что поставленное начальное условие позволяет проинтегрировать систему (8). В результате интегрирования получаем систему уравнений, совпадающую с (8), если в ней убрать фигурные скобки и точки над скобками. Эта система совпадает с уравнениями (2), (4)–(6), что доказывает предложенный принцип.

Относительно выбора начальных условий отметим, что для интегрирования системы (7) необходимо было знать не только напряженно-деформированное состояние в момент времени $t=0$, но и скорость изменения этого состояния в начальный момент.

Остановимся на особенностях предложенного принципа. В подынтегральном выражении этого функционала имеется член, содержащий сомножитель $(\partial\varphi/\partial I)^{-1}$. Если $\partial\varphi/\partial I=0$, то интеграл имеет особенность. В этом случае получаем, что φ не зависит от напряженного состояния. Тогда величину ω можно будет найти из кинетического уравнения независимо от решения поставленной задачи и отпадет необходимость использования вариационного принципа, поэтому случай $\partial\varphi/\partial I=0$ здесь не рассматривается.

Выбор такого типа функционала объясняется двумя причинами. Во-первых, получаемая система уравнений Эйлера (после дифференцирования второго уравнения системы (8) по t) квазилинейна относительно $\ddot u_i,\ddot\sigma^{ij},\ddot\omega$ и решение на ЭВМ соответствующей задачи Коши – хорошо изученная процедура. Во-вторых, в отличие от других функционалов [3] кинетическое уравнение повреждаемости в данном случае является уравнением Эйлера, а не дополнительным условием, что позволяет простыми функциями аппроксимировать как решение нелинейных уравнений равновесия, так и решение кинетического уравнения повреждаемости.

Отметим, что существует ряд функционала [4, 5, 6], аналогичных функционалу (3), когда в уравнение Эйлера входит и кинетическое уравнение повреждаемости. Отличие предложенного функционала (3) состоит в том, что он построен для нелинейно-вязкоупругих тел ($f \neq 1$), причем нет необходимости пользоваться некоторой комбинацией компонента тензора напряжений, преобразование которой при рассмотрении конкретных примеров приводит к громоздким выражениям.

Проиллюстрируем применение предложенного вариационного принципа на простейшем примере. Рассмотрим задачу о поведении длинной цилиндрической оболочки, длиной L, толщиной $2h$, радиусом внутренней поверхности R. Предположим, что оболочка находится под действием внутреннего давления, равномерно распределенного по поверхности, интенсивности $\dot{q}(t)$.

Физические соотношения вязкоупругости для одномерного случая возьмем в виде ($K(t) = \mathrm{const}$)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + A\int_0^t \frac{\sigma^n}{(1-\omega)^m}d\tau \tag{9}$$

а кинетическое уравнение повреждаемости запишем следующим образом ($c(t) = \mathrm{const}$):

$$\omega = B\int_0^t \sigma^f \frac{1}{(1-\omega)^g}d\tau \tag{10}$$

где A и B – механические параметры.

Применимость одномерных уравнений (9) и (10) к рассматриваемой задаче обусловлена тем, что оболочка достаточно длинная, чтобы торцевыми эффектами можно было пренебречь, и задача осесимметрична, что следует из условия нагружения. При учете малости прогиба W функционал запишем в виде

$$J = \int_0^L \int_{-h}^{h} \left\{\dot{\sigma}\frac{\ddot{W}}{R} - \frac{1}{E}\dot{\sigma}\ddot{\sigma} - \frac{1}{2}\frac{nA\sigma^{n-1}}{(1-\omega)^m}\dot{\sigma}^2 - A(1-\omega)^{-m-1}m\sigma^n\dot{\omega}\dot{\sigma} + \right.$$

$$\left. + \left[\ddot{\omega} - \frac{1}{2}B\sigma^f g\dot{\omega}(1-\omega)^{-g-1}\right]\dot{\omega}\frac{A}{B}\frac{m}{f}\sigma^{-n-f+1}(1-\omega)^{-1+g-m} - \dot{q}\ddot{W}\frac{1}{2h}\right\}dzdx \tag{11}$$

где x – продольная координата.

Исходя из ожидаемой картины поведения оболочки, примем, что все искомые величины не зависят от координат:

$$\sigma = N_0/(2h), \qquad W = W_0, \qquad \omega = \omega_0 \tag{12}$$

где N_0, W_0, ω_0 – искомые функции времени и нагрузки. Учитывая приведенную выше аппроксимацию в функционале (11), получим следующую функцию от коэффициентов аппроксимации:

$$J = L\times 2h\left\{\ddot{W}_0\frac{1}{R}\frac{\dot{N}_0}{2h} - \frac{1}{E}\frac{\ddot{N}_0}{2h}\frac{\dot{N}_0}{2h} - \left(\frac{N_0}{2h}\right)^{n-1}\frac{n}{2}A(1-\omega_0)^{-m}\left(\frac{\dot{N}_0}{2h}\right)^2 - A(1-\omega_0)^{-m-1}m\times\right.$$

$$\times\left(\frac{N_0}{2h}\right)^n\dot{\omega}_0\frac{\dot{N}_0}{2h} + \left[\ddot{\omega}_0 - \frac{1}{2}B\left(\frac{N_0}{2h}\right)^f g\dot{\omega}_0(1-\omega_0)^{-g-1}\right]\dot{\omega}_0\frac{A}{B}\frac{m}{f}(1-\omega_0)^{-m-1+g}\times$$

$$\left.\times\left(\frac{N_0}{2h}\right)^{n-f+1} - \dot{q}\frac{\ddot{W}}{2h}\right\}$$

В дальнейшем нулевой индекс будет опущен. Так как варьируются функции $\dot{N}, \ddot{W}, \dot{\omega}$, то условие стационарности определяется из следующей системы:

$$\frac{\partial J}{\partial \ddot{W}} = \dot{N}\frac{1}{R} - \dot{q} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \dot{N}} = \frac{1}{R}\ddot{W} - \frac{1}{E}\frac{1}{2h}\ddot{N} - \frac{An}{(1-\omega)^m}\left(\frac{N}{2h}\right)^{n-1}\dot{N}\frac{1}{2h} - \frac{A}{(1-\omega)^{m+1}}m\left(\frac{N}{2h}\right)^n\dot{\omega} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial I}{\partial\dot\omega}=-A\frac{1}{(1-\omega)^{m+1}}m\frac{\dot N}{2h}\left(\frac{N}{2h}\right)^{n}+\left[\ddot\omega-B\left(\frac{N}{2h}\right)^{f}g\dot\omega(1-\omega)^{-g-1}\right]\times$$

$$\times\frac{A}{B}\frac{m}{f}\left(\frac{N}{2h}\right)^{n-f+1}(1-\omega)^{-m-1+g}=0$$

Для решения полученной системы уравнений поставим начальные условия. Исходя из приведенного вариационного принципа имеем, что они определяются из решения вышепоставленной задачи, но при следующем физическом соотношении, отличном от (9):

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}+A\int_0^t\sigma^n d\tau$$

Очевидно, что эту задачу необходимо решать в тех же предположениях, при которых строился функционал (11), с использованием аналогичного метода. В частности, можно воспользоваться вариационным принципом Рейснера для вязкоупругих тел [1]. Итак, функционал имеет вид

$$J=\int_0^L\int_{-h}^{h}\left\{\sigma\frac{W}{R}-\frac{1}{2E}\sigma^2-A\sigma\int_0^t\sigma^n d\tau-q\frac{W}{2h}\right\}dxdz$$

где варьируемыми величинами являются W, σ, а интеграл не варьируется.

Приняв аппроксимацию (12), определяющую систему представим следующим образом;

$$N=q-R,\quad \frac{W}{R}=\frac{1}{E}\frac{N}{2h}+A\int_0^t N^n d\tau\frac{1}{(2h)^n} \tag{14}$$

Итак, из системы (14) определяются начальные условия для решения системы уравнений (13), а именно: при $t=0$ из (14) находим $W,\dot W,N,\dot N$. Дополним эти начальные условия следующим:

$$t=0;\quad \omega=0,\quad \dot\omega=B\left[\frac{N(0)}{2h}\right]^f \tag{15}$$

Таким образом, для решения системы (13) имеем начальные условия (15) и условия, определенные из (14).

Продифференцируем первое уравнение системы (13) по t. Тогда имеем представление $\ddot N=R\ddot q$ позволяющее разрешить систему (13) относительно искомых величин $(\ddot N,\ddot W,\ddot\omega)$ и представить систему в каноническом виде. Получаемая таким образом задача Коши в общем случае решается численно (до достижения условия $\omega=1$, что соответствует разрушению).

Для данной задачи система (13) может быть решена аналитически. В самом деле, из системы (13) при учете полученных начальных условий имеем

$$N=qR;\quad \omega=1-\left[1-Bt(1+g)\left(q\frac{R}{2h}\right)^f\right]^{1/(1+g)}$$

$$\frac{W}{R}=\frac{1}{E}q\frac{R}{2h}+A\left(q\frac{R}{2h}\right)^n\int_0^t\left[1-B\left(q\frac{R}{2h}\right)^f\tau(1+g)\right]^{-m/(1+g)}d\tau \tag{16}$$

При написании (16) предполагалось, что $q(t)=\text{const}$. Из системы (16) можно найти значение критического времени разрушения

$$t_*=\left[B\left(q\frac{R}{2h}\right)^f(1+g)\right]^{-1} \tag{17}$$

Отметим, что t_* не зависит от механических параметров ползучести A, m, n.

Решим данную задачу с учетом нелинейности прогиба. Тогда функционал (3) примет вид

$$J=\int_0^L\int_{-h}^{h}\left\{\dot\sigma\left[\frac{\ddot W}{R}+\frac{\ddot W}{R}\frac{W}{R}+\left(\frac{\dot W}{R}\right)^2\right]+\sigma\frac{\dot W}{R}\frac{\ddot W}{R}-\frac{1}{E}\ddot\sigma\dot\sigma-\frac{1}{2}\frac{nA\sigma^{n-1}}{(1-\omega)^m}\dot\sigma^2-A(1-\omega)^{-m-1}m\sigma^n\dot\omega\dot\sigma+\right.$$

$$\left.+\left[\ddot\omega-\frac{1}{2}B\sigma^f g\dot\omega(1-\omega)^{-g-1}\right]\dot\omega\frac{A}{B}\frac{m}{f}\sigma^{n-f+1}(1-\omega)^{-1+g-m}-\dot q\frac{\dot W}{2h}\right\}dzdx \quad (18)$$

Для нахождения стационарного значения функционала (18) применим метод Ритца. Используя аппроксимацию (12), получим следующую функцию от координатов аппроксимации:

$$J=L\times 2h\left\{\frac{1}{2h}\dot N\left[\frac{\ddot W}{R}+\frac{\ddot W}{R}\frac{W}{R}+\left(\frac{\dot W}{R}\right)^2\right]+N\frac{1}{2h}\frac{\dot W}{R\cdot R}\frac{\ddot W}{}-\frac{1}{E}\frac{1}{4h^2}\ddot N\dot N-\right.$$

$$-\left(\frac{1}{2h}N\right)^{n-1}\frac{n}{2}\frac{A}{(1-\omega)^m}\frac{1}{4h^2}\dot N^2-A(1-\omega)^{-m-1}m\left(\frac{N}{2h}\right)^n\dot\omega\frac{\dot N}{2h}+$$

$$\left.+\left[\ddot\omega-\frac{1}{2}B\left(\frac{N}{2h}\right)^f g\dot\omega(1-\omega)^{-g-1}\right]\dot\omega\frac{A}{B}\frac{m}{f}(1-\omega)^{-m-1+g}\left(\frac{N}{2h}\right)^{n-f+1}-\dot q\dot W\frac{1}{2h}\right\}$$

Определяющая система по аналогии с (13) имеет вид

$$\frac{\partial J}{\partial\dot W}=\dot N\frac{1}{R}\left(1+\frac{W}{R}\right)+N\frac{1}{R^2}\dot W-\dot q=0$$

$$\frac{\partial J}{\partial\dot N}=\frac{1}{R}\left(\ddot W+\ddot W\frac{W}{R}+\frac{\dot W^2}{R}\right)-\frac{1}{E}\frac{1}{2h}\ddot N-\frac{An}{(1-\omega)^m}\left(\frac{N}{2h}\right)^{n-1}\dot N\frac{1}{2h}-\frac{A}{(1-\omega)^{m+1}}m\left(\frac{N}{2h}\right)^n\dot\omega=0$$

$$\frac{\partial J}{\partial\dot\omega}=-A\frac{1}{(1-\omega)^{m+1}}m\frac{\dot N}{2h}\left(\frac{N}{2h}\right)^n+\left[\ddot\omega-B\left(\frac{N}{2h}\right)^f g\dot\omega(1-\omega)^{-g-1}\right]\times$$

$$\times\frac{A}{B}\frac{m}{f}\left(\frac{N}{2h}\right)^{n-f+1}(1-\omega)^{-m-1-g}=0 \quad (19)$$

Для определения начальных условий для системы (19) приведем функционал Рейснера в случае нелинейности теории

$$J=\int_0^L\int_{-h}^{h}\left\{\sigma\frac{W}{R}\left(1+\frac{W}{R}\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2E}\sigma^2-A\sigma\int_0^t\sigma^n d\tau-q\frac{W}{2h}\right\}dxdz$$

Стационарное значение этого функционала, используя метод Ритца и аппроксимацию (12), определяем из следующей системы:

$$N=qR\left(1+\frac{W}{R}\right)^{-1},\quad \frac{W}{R}\left(1+\frac{1}{2}\frac{W}{R}\right)=\frac{1}{E}\frac{N}{2h}+A\left(\frac{1}{2h}\right)^n\int_0^t N^n d\tau \quad (20)$$

Итак, решение нелинейной задачи сводится к решению системы уравнений (19) с начальным условием (20).

Предположим, что $q(t)$ = const и что упругой деформацией можно пренебречь. Тогда система (19) упрощается и второе уравнение приводится к виду

$$\frac{dc}{d\omega}=\frac{A}{B}\left(q\frac{R}{2h}\right)^{n-f}(1-\omega)^{g-m}(1+c)^{f-n-1},\quad c=\frac{W}{R}$$

Кинетическое уравнение не меняется.

Из этих двух уравнений получаем решение поставленной задачи в виде

$$t=\frac{1}{B}\left(q\frac{R}{2h}\right)^{-f}\int_0^\omega(1-\omega)^g\left\{\frac{A}{B}\left(q\frac{R}{2h}\right)^{n-f}\frac{n+2-f}{g-m+1}\left[1-(1-\omega)^{g-m+1}\right]+1\right\}^{f/(n+2-f)}d\omega \quad (21)$$

Отсюда из условия $\omega = 1$ можно получить выражение для критического времени разрушения t_*. Сопоставляя выражение (21) при $\omega = 1$ с соотношением (17), заметим, что в нелинейном случае если t_* существует, в отличие от линейной теории, оно зависит от механических параметров ползучести. Кроме того, если в линейной теории критическое время существовало при всех параметрах, то в нелинейной теории необходимо специально рассматривать существование t_*, т.е. существование интеграла (21) при $\omega = 1$. Анализ рассмотренной задачи указывает на необходимость учета больших перемещений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязко-упругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
3. *Сергеев М.В.* Смешанный вариационный принцип теории ползучести в задачах длительной прочности // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 6. С. 112–116.
4. *Эюбов Я.А.* Об одном вариационном принципе для вязкоупругих тел в задачах длительной прочности // Докл. АН СССР. Т. 303. № 5. 1988. С. 1078–1081.
5. *Эюбов Я.А.* Об учете повреждаемости при расчете конструкций, проявляющих вязкоупругие свойства // Изв. Вузов. Строительство и Архитектура. № 2. 1989. С. 39–42.
6. *Эюбов Я.А.* Об одном вариационном принципе для вязкоупругих тел с учетом повреждаемости и геометрической нелинейности // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 78–82.
7. Закономерности ползучести и длительной прочности. Справочник / Под редакцией *С.А. Шестерикова*. М.: Машиностроение, 1983. 101 с.

Баку

Поступила в редакцию
25.III.1993