УДК 539.3

© 1995 г. В.А. Гришин, В.В. Реут

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КОРОБЧАТОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПАРОЙ СИММЕТРИЧНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ РЕБРУ ОБОЛОЧКИ

Решается задача о напряженном состоянии бесконечной коробчатой оболочки прямоугольного профиля. Оболочка подкреплена двумя тонкими и абсолютно жесткими включениями, расположенными на противоположных гранях и параллельными ребрам оболочками. Такую задачу можно свести [1] к задаче о совместном плоском и изгибном состоянии пластин с дефектами, роль которых выполняют ребра оболочки и включения. После применения полубесконечного косинус-преобразования Фурье задача сводится к системе двух интегральных уравнений относительно скачков обобщенной поперечной силы и касательных напряжений, не имеющей [2–4] решений в классе интегрируемых функций. Решение искали в пространстве функций, имеющих неинтегрируемые особенности, с применением аппарата регуляризации расходящихся интегралов [4]. Построены графики зависимости осадки от включений длины включений и геометрических размеров сечений оболочки.

Рассмотрим задачу о напряженном состоянии коробчатой оболочки бесконечной длины, прямоугольного сечения, подкрепленной двумя параллельными симметрично расположенными включениями. К серединам включений приложены сосредоточенные силы (фигура).

Задача сводится [1] к решению системы уравнений

$$\Delta^2 w(x,y)=0, \quad \Delta^2\sigma_x(x,y)=0, \quad -a<x<b, \quad x\neq 0, \quad |y|<\infty \tag{1}$$

удовлетворяющего условиям на ребрах оболочки

$$\langle \upsilon\rangle=\langle\tau_{xy}\rangle=\langle\varphi_x\rangle=\langle M_x\rangle=0$$

$$\langle u\rangle=-(w_+ + w_-), \quad \langle w\rangle=u_+ + u_- \tag{2}$$

$$\langle\sigma_x\rangle=-h^{-1}[(V_x)_+ + (V_x)_-], \quad \langle V_x\rangle=h[(\sigma_x)_+ + (\sigma_x)_-]$$

условиям симметрии

$$V_y=\varphi_y=\upsilon=\tau_{xy}=0, \quad y=0, \quad -a<x<b \tag{3}$$

$$V_x=\varphi_y=u=\tau_{xy}=0, \quad x=-a(|y|>c), \quad x=b \tag{4}$$

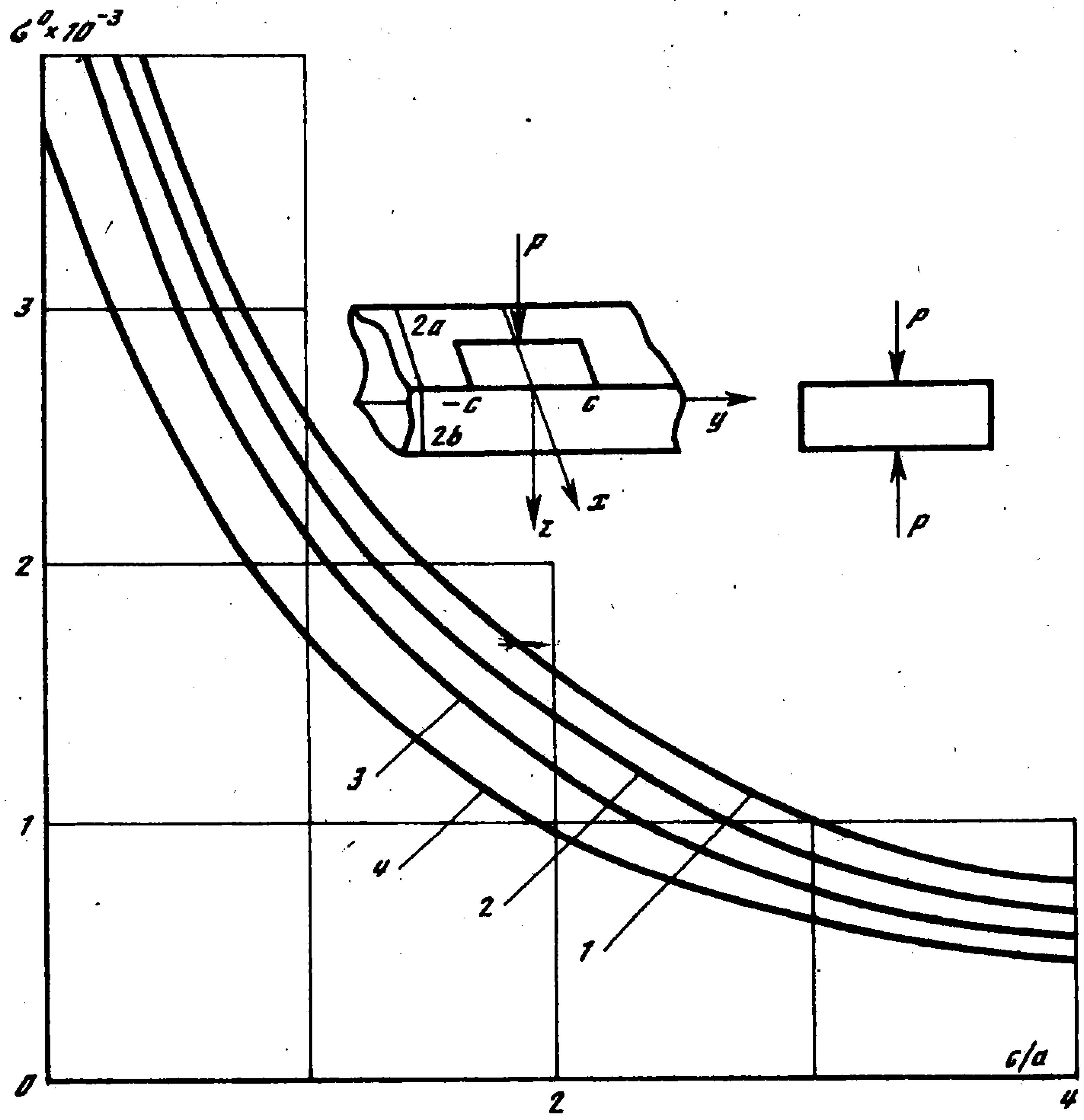
условиям на включении

$$u(-a,y)=\varphi_x(-a,y)=0, \quad \upsilon(-a,y)=0, \quad w(-a,y)=\delta, \quad |y|<c \tag{5}$$

и условиям равновесия включения

$$\int_{-c}^{c} V_x(-a,y)dy=-\frac{P}{2} \tag{6}$$

В силу симметрии остальные условия равновесия выполняются автоматически, а смещение δ заранее неизвестно. Здесь использованы обозначения [1].



Введем неизвестные функции

$$\chi(y)=V_x(-a,y),\qquad \mu(y)=\tau_{xy}(-a,y) \tag{7}$$

отличные от нуля только на включении $|y|<c$.

Применяя обобщенный метод интегральных преобразований [5], приходим к одномерной разрывной краевой задаче для трансформант Фурье, решение которой можно [1, 5] записать в виде:

$$f_\alpha^{\pm}(x)=-\mu_\alpha k_\mu^{\pm}(\alpha,x)-X_\alpha k_\chi'(\alpha,x) \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&k_\mu^{+}(\alpha,x)=\alpha R_2^{+}G_\alpha(x,-a)-f_{3\mu}^{+}T_0^{+}G_\alpha+f_{0\mu}^{+}T_3^{+}G_\alpha\\
&k_\mu^{-}(\alpha,x)=-f_{3\mu}^{-}T_0^{-}G_\alpha+f_{0\mu}^{-}T_3^{-}G_\alpha\\
&k_\chi^{+}(\alpha,x)=-f_{3\chi}^{+}T_0^{+}G_\alpha+f_{0\chi}^{+}T_3^{+}G_\alpha\\
&k_\chi^{-}(\alpha,x)=D^{-1}G_\alpha(x,-a)-f_{3\chi}^{-}T_0^{-}G_\alpha+f_{0\chi}^{-}T_3^{-}G_\alpha
\end{aligned} \tag{9}$$

При этом $f_{j\chi}^{\pm}(j=0,3)$ – решение системы линийных алгебраических уравнений:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -C_{33}^{-} & C_{30}^{-}\\ 0 & \alpha^{-4}D & -C_{03}^{-} & C_{00}^{-}\\ -C_{33}^{+} & C_{30}^{+} & -\alpha^{4}D & 0\\ -C_{03}^{+} & C_{00}^{+} & 0 & 1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} f_{0\chi}^{+}\\ f_{3\chi}^{+}\\ f_{0\chi}^{-}\\ f_{3\chi}^{-}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} D^{-1}H_3^{-}G_\alpha(x,-a)\\ D^{-}H_0^{-}G_\alpha(x,-a)\\ 0\\ 0\end{Vmatrix} \tag{10}$$

$$C_{ij}^{\pm}=H_i^{\pm}T_j^{\pm}[G_\alpha^{\pm}]$$

а $f_{j\mu}^{\pm}(j=0,3)$ – решение системы (10) для правой части

$$\begin{Vmatrix}0, & 0, & \alpha H_3^{+}R_2^{+}G_\alpha(x,-a), & -\alpha H_0^{+}R_2^{+}G_\alpha(x,-a)\end{Vmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

$G_\alpha(x,\xi)$ – функция Грина краевой задачи

$$L^2u(x)=0,\quad u'=u'''=0,\quad x=-a,b \tag{12}$$

Для отыскания неизвестных функций $\chi(y)$ и $\mu(y)$, воспользуемся условиями [5], первые два из которых выполняются автоматически, за счет выбора функции $G_\alpha(x,\xi)$, а при реализации двух последних приходим к системе двух интегральных уравнений относительно искомых функций. Выделим сингулярные части из ядер этих уравнений, используя интегралы

$$\int_0^\infty \cos\alpha y\sin\alpha y\frac{d\alpha}{\alpha}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+\eta}{y-\eta}\right|$$
$$\int_0^\infty\left[\cos\alpha t-\theta(A-\alpha)+\frac{1}{2}\alpha^2t^2e^{-\alpha b}\right]\frac{d\alpha}{\alpha}=\frac{1}{2}t^2\ln|t|-t^2\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln b\right)+\frac{1}{2A^3} \tag{13}$$
$$A=\text{const}>0$$

последний из которых может быть получен в результате двухкратного интегрирования по параметру t несобственного интеграла

$$\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha b}-\cos\alpha t}{\alpha}d\alpha=\ln|t|-\ln b,\quad b>0$$

В результате приходим к системе интегральных уравнений вида

$$\int_{-1}^{1}\begin{Vmatrix}(y-\eta)^2\ln|y-\eta| & 0\\ 0 & \ln\dfrac{1}{|y-\eta|}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\chi(\eta)\\ \mu(\eta)\end{Vmatrix}d\eta+$$
$$+\int_{-1}^{1}\begin{Vmatrix}K_{11}(y',\eta) & K_{12}(y,\eta)\\ K_{21}(y,\eta) & K_{22}(y,\eta)\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\chi(\eta)\\ \mu(\eta)\end{Vmatrix}d\eta\begin{Vmatrix}4\pi D\delta\\ 0\end{Vmatrix} \tag{14}$$

$$K_{11}(y,\eta)=A^{-2}-(y-\eta)^2(3/2+\ln b)+$$
$$+\int_0^\infty[k_{11}(\alpha)\cos\alpha y\cos\alpha\eta+2\alpha^{-3}\theta(A-\alpha)+\alpha^{-1}(y-\eta)^2e^{-\alpha b}]d\alpha$$

$$K_{12}(y,\eta)=\int_0^\infty k_{12}(\alpha)\cos\alpha y\sin\alpha\eta d\alpha,\quad K_{21}(y,\eta)=\int_0^\infty k_{21}(\alpha)\sin\alpha y\cos\alpha\eta d\alpha$$

$$k_{11}(\alpha)=4\left\{\left[-\frac{a+b}{2\alpha}LG_\alpha(-a,b)+G_\alpha(-a,b)\right]e^{-\alpha(a+b)}+D[f_{0\chi}^-w_{\alpha3}-f_{3\chi}^-w_{\alpha0}]\right.$$

$$k_{12}(\alpha)=4D[f_{0\mu}^-w_{23}-f_{3\mu}^-w_{\alpha0}],\quad k_{21}(\alpha)=-2\kappa^{-1}E[f_{0\chi}^+\upsilon_{\alpha3}-f_{3\chi}\upsilon_{\alpha0}]$$

$$k_{22}(\alpha)=-(3-\nu)^{-1}\{[4-(1+\nu)\alpha(a+b)]LG_\alpha(-a,b)+2(1+\nu)\alpha^2G_\alpha(-a,b)\}-$$
$$-2\kappa^{-1}E[f_{0\mu}^+\upsilon_{\alpha3}-f_{3\mu}^+\upsilon_{\alpha0}]$$

$$w_{\alpha j}=T_j^-[G_\alpha(-a,t)],\quad \upsilon_{\alpha j}=(-\alpha^3E)^{-1}R_2^+T_j^+G_\alpha(-a,t)],\quad j=0,3$$

Первое из интегральных уравнений (14), как было показано в работах [2–4], не имеет решений в классе интегрируемых функций. Там же было предложено искать его решение в пространстве функций, имеющих неинтегрируемые особенности вида $(1-y^2)^{-3/2}$ с применением аппарата регуляризации расходящихся интегралов.

Для решения системы (14) воспользуемся методом ортогональных многочленов [5], причем будем искать функцию $\mu(y)$ в виде ряда по многочленам Чебышева первого рода, а функцию $\chi(y)$ – по многочленам специального вида $\pi_n(y)$ [4]

$$\mu(\eta)=\sum_{l=0}^\infty\mu_l\frac{T_{2l+1}(\eta)}{(1-\eta^2)^{1/2}},\quad \chi(\eta)=\sum_{l=0}^\infty\chi_l\pi_{2l}(\eta) \tag{15}$$

$$\pi_0(t) = (1-t^2)^{-1/2}, \quad \pi_{2n}(t) = \frac{2\sqrt{\pi}(2n)!\,P_{2n}^{-3/2,-3/2}(t)}{\Gamma(2n-1/2)(1-t^2)^{3/2}}$$

В результате приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения (15).

Подставляя выражения (15) в условия равновесия (6) при учете (7), находим

$$\delta = \frac{P}{2\Psi_{00}\chi_0} \tag{16}$$

где χ_j – решение полученной алгебраической системы при $\delta = 1$.

На фигуре приведены графики зависимости осадки включения $\delta^0 = \delta EhP^{-1}$ от длины включения c/a при $\nu = 0{,}3$, $h/a = 0{,}01$ и разных a/b. Отметим, что при $c \to 0$ осадка включения стремится к значению прогиба под точкой приложения силы в задаче о нагружении оболочки парой симметричных сосредоточенных сил.

Авторы благодарят Г.Я. Попова за ценные указания и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гришин В.А., Попов Г.Я., Реут В.В.* Расчет коробчатых оболочек прямоугольного сечения // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 605–612.
2. *Григолюк Э.И., Толкачев В.М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.
3. *Попов Г.Я., Толкачев В.М.* Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 192–206.
4. *Онищук О.В., Попов Г.Я.* О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 141–150.
5. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.

Одесса

Поступила в редакцию
23. XI. 1993