ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 59, Вып. 5, 1995

УДК 539.3

© 1995 г. А.В. Манжиров

ОБЩАЯ БЕЗЫНЕРЦИОННАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНО НАРАЩИВАЕМОГО ВЯЗКОУПРУГОГО СТАРЕЮЩЕГО ТЕЛА

Исследуются процессы деформирования вязкоупругих тел при кусочно-непрерывном изменении их состава, массы или объема за счет притока к внешней поверхности нового материала. Моделирование таких процессов приводит к принципиально новым неклассическим задачам механики деформируемого твердого тела. Рассматривается постановка и предлагается метод построения решения общей безынерционной начально-краевой задачи для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела. Формулируются основные теоремы. Изучаются некоторые качественные моменты эволюции напряженно-деформированного состояния растущих тел.

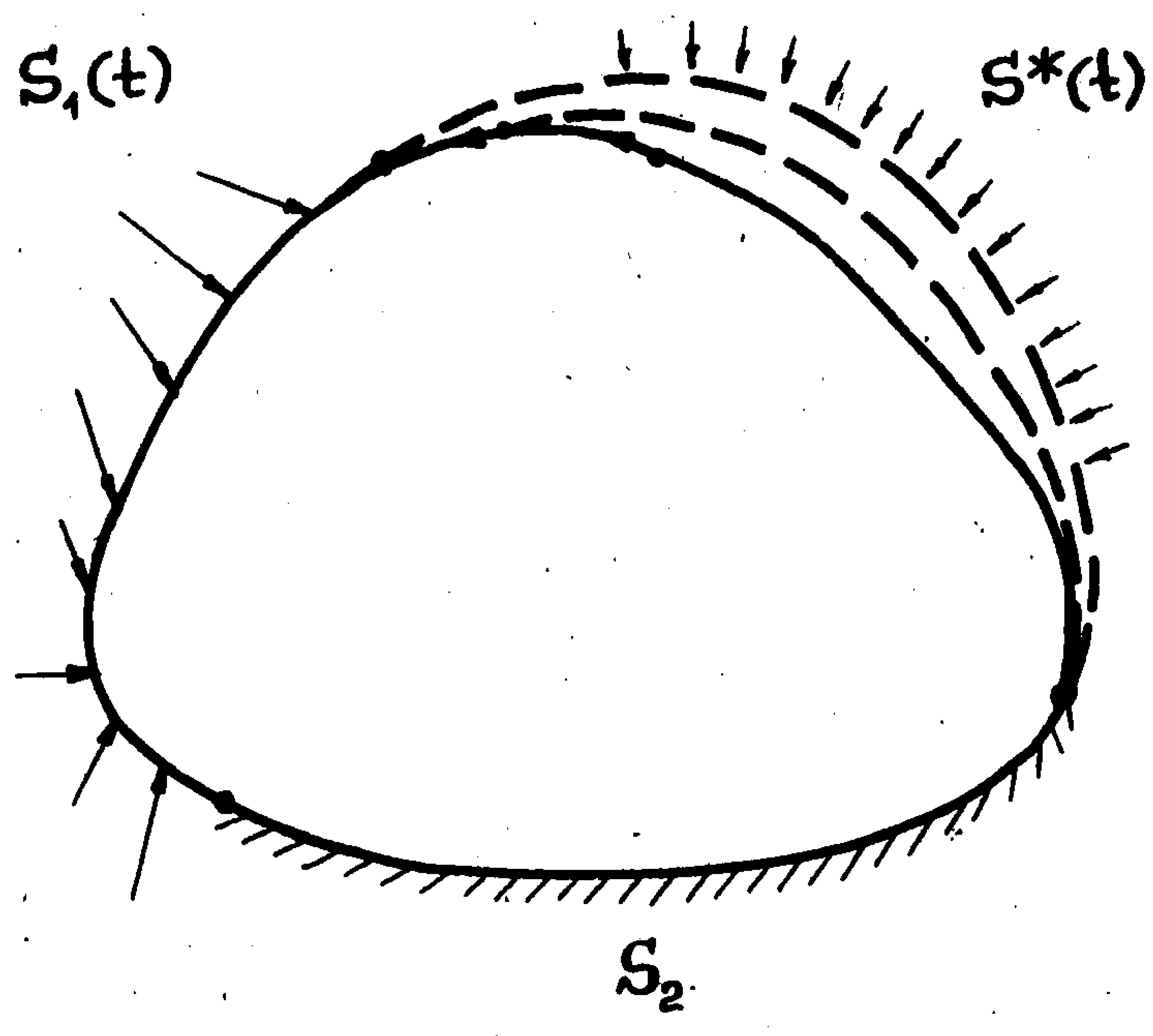
Прикладное значение и перспективы развития механики наращиваемых тел определяются тем обстоятельством, что практически все объекты механики деформируемого твердого тела (здания, сооружения, элементы конструкций, детали машин и др.) возникают в результате возведения, затвердевания, напыления, нарастания, намораживания, намотки и т.п. Конкретными примерами подобных процесов могут служить процессы непрерывного возведения строительных сооружений из бетона, затвердевания металла, напыления полупроводниковых пленок, роста кристаллов и т.д.

1. Особенности основных соотношений механики непрерывно наращиваемых тел и постановка задачи. Настоящий раздел содержит ряд общих определений, положений и соотношений механики растущих тел. Базирующийся на работах [1–3] и монографиях [4, 5], он не является, однако, их компиляцией, а представляет собой самостоятельное краткое изложение основ, предназначенное для эффективной формулировки и решения более сложной проблемы.

Под непрерывно (кусочно-непрерывно) *наращиваемым* или *растущим* телом понимается деформируемое твердое тело, состав, масса или объем которого изменяются вследствие процесса непрерывного (кусочно-непрерывного) притока материала к его поверхности (фигура). Процесс присоединения к телу новых элементов называется соответственно *наращиванием* или *ростом*.

При кусочно-непрерывном наращивании тела четко прослеживаются следующие *основные этапы* его деформирования: до начала процесса наращивания, в процессе непрерывного наращивания и чередующийся с последним этап деформирования тела после прекращения наращивания или остановки роста. Каждый из этих этапов характеризуется моментами своего начала и окончания. Первый – моментом приложения к телу нагрузки или загружения и моментом начала наращивания. Второй – моментом начала наращивания и моментом прекращения наращивания или остановки роста. Третий наоборот – моментами остановки роста и начала наращивания. Обычно исследуемый процесс заканчивается третьим этапом, для которого момент начала следующего этапа непрерывного наращивания полагается сколь угодно большим.

Тело, к поверхности которого, начиная с момента начала наращивания, впервые происходит приток новых элементов, будем называть *основным* или *исходным* телом. Тело, составленное из материальных элементов, которые присоединились к основному телу за промежуток времени от момента начала наращивания до рассматриваемого момента времени, назовем *дополнительным* телом. Само дополнительное тело может иметь сложную структуру и состоять из совокупности тел, образовавшихся на разных временных промежутках этапа непрерывного наращивания. Их назовем *субтелами*. Очевидно, что объединение субтел составляет дополнительное тело, причем области, занимаемые как первыми, так и последним, могут быть несвязными. Объединение основного и дополнительного тел назовем *растущим* или *наращиваемым* телом. Заметим, что процесс наращивания может происходить и без участия основного тела, когда он начинается с зарождения бесконечно малого материального элемента тела.



Часть поверхности, к которой в текущий момент времени присоединяются бесконечно малые элементы материала, назовем поверхностью *наращивания* или *роста*. В общем случае поверхность роста не связна, а, в частности, ею может быть вся поверхность тела. Наконец, *базовой* поверхностью назовем ту часть поверхности исходного или растущего тел, которая совпадает с поверхностью наращивания в моменты его начала. Понятно, что базовая поверхность представляет из себя как раз ту часть поверхности тела, к которой предполагается организовать приток вещества на очередном этапе непрерывного наращивания. На разных этапах она, как правило, совпадает с поверхностью раздела основного и дополнительного тел, а также – с поверхностями раздела субтел.

Предположим, что основное тело, изготовленное из вязкоупругого стареющего материала, занимает область Ω_0 с поверхностью S_0 и до момента загружения τ_0 свободно от напряжений. От момента времени τ_0 до момента начала наращивания τ_1 на поверхности S_0 задаются классические граничные условия, вид которых конкретизируем ниже. В момент τ_1 начинается непрерывное наращивание деформируемого тела частицами, присоединяющимися к поверхности наращивания $S^*(t)$, причем в процессе наращивания оно занимает область $\Omega(t)$ с поверхностью $S(t)$. Очевидно, что $S^*(t) \subseteq S(t)$.

Момент времени, в который к телу присоединяется частица, характеризуемая радиусом-вектором x, будем обозначать $\tau^*(x)$ и называть моментом присоединения этой частицы к растущему телу. Функция пространственных координат $\tau^*(x)$ полностью определяет конфигурацию наращиваемого тела. Общими ограничениями, накладываемыми на функцию $\tau^*(x)$, обычно являются требования ограниченности и кусочной непрерывности.

Момент изготовления элемента растущего тела обозначим $\overset{*}{\tau}_1(x)$, момент начала его загружения $\tau_0(x)$. Естественно, что для элементов основного тела ($x \in \Omega_0$) $\overset{*}{\tau}_1(x) \leqslant \tau_0(x) = \tau_0$.

В области, занимаемой в любой момент времени растущим телом, выполняется, очевидно, векторное уравнение равновесия. Для квазистатических процессов оно имеет вид

$$x\in \Omega(t):\ \nabla\cdot T+f=0 \tag{1.1}$$

где T – тензор напряжений, f – вектор объемных сил, ∇ – оператор Гамильтона (здесь и далее используется символика тензорного анализа из [6]).

В области, занимаемой основным телом, всегда справедливы соотношения Коши и уравнения совместности деформаций:

$$x\in\Omega_0:\ E=\tfrac{1}{2}[\nabla u+(\nabla u)^T],\quad \nabla\times(\nabla\times E)^T=0 \tag{1.2}$$

где E – тензор деформации, u – вектор перемещения. В области же $\Omega^*(t)$, занимаемой дополнительным телом ($\Omega^*(t)=\Omega(t)/\Omega_0$), выполняются лишь их аналоги в скоростях соответствующих величин:

$$x\in\Omega^*(t):\ D=\tfrac{1}{2}[\nabla\upsilon+(\nabla\upsilon)^T],\quad \nabla\times(\nabla\times D)^T=0 \tag{1.3}$$

$$D=\partial E/\partial t,\quad \upsilon=\partial u/\partial t$$

т.е., вообще говоря, деформации несовместны.

Последнее обстоятельство отражает тот факт, что приращиваемые элементы до момента присоединения к основному телу могут подвергаться деформирующим воздействиям независимо от процессов, протекающих в самом теле.

Для исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) растущего тела необходимо знать закономерности деформирования основного тела от момента начала его загружения τ_0 до момента начала наращивания τ_1 и приращиваемых элементов от момента приложения к ним нагрузок $\tau_0(x)$ до момента присоединения к наращиваемому телу $\tau^*(x)$. Если указанное состояние исходного тела определяется из решения задачи с фиксированной границей, то для бесконечно тонких непрерывно приращиваемых элементов считаются известными предыстории их тензора деформации:

$$x\in\Omega^*(t),\ \tau_0(x)\leqslant\tau\leqslant\tau^*(x):\ E(x,\tau)=E_0(x,\tau) \tag{1.4}$$

Задаваемые предыстории тензора деформации приращиваемых элементов образуют в момент присоединения на растущей поверхности $S^*(t)$ специфическое *начально-краевое* условие:

$$x\in S^*(t):\ E(x,\tau^*(x))=E^*(x),\quad t=\tau^*(x) \tag{1.5}$$

В частности, на поверхности роста в силу уравнений состояния как правило определен и полный тензор напряжений $T^*(x)$, согласованный с внешними нагрузками и характеризующий натяг приращиваемых элементов.

Заметим, кроме того, что соотношение

$$\tau^*(x)=t \tag{1.6}$$

представляет собой уравнение поверхности роста, а

$$s_n=|\nabla\tau^*(x)|^{-1} \tag{1.7}$$

есть в силу (1.6) скорость движения поверхности $S^*(t)$ по нормали.

На неподвижных участках поверхности растущего тела задаются традиционные краевые условия для вектора перемещения и вектора поверхностных сил.

Для описания поведения материалов наращиваемых деформируемых тел воспользуемся определяющими соотношениями неоднородного стареющего тела (см. [7]). Доопределив $\tau_0(x)$ в области, занятой исходным телом, постоянной τ_0, запишем в виде

$$\operatorname{dev}E(x,t)=\frac{\operatorname{dev}T(x,t)}{2G(t-\tau_1^*(x),x)}-\int\limits_{\tau_0(x)}^{t}\frac{\operatorname{dev}T(x,\tau)}{2G(\tau-\tau_1^*(x),x)}K_1(t-\tau_1^*(x),\tau-\tau_1^*(x),x)\,d\tau \tag{1.8}$$

$$I_1[E(x,t)] = \frac{I_1[T(x,t)]}{\overset{*}{k}(t-\overset{*}{\tau}_1(x),x)} - \int\limits_{\tau_0(x)}^{t} \frac{I_1[T(x,\tau)]}{\overset{*}{k}(\tau-\overset{*}{\tau}_1(x),x)} K_2(t-\overset{*}{\tau}_1(x),\tau-\overset{*}{\tau}_1(x),x)\,d\tau \qquad (1.9)$$

где $G(t)$, $k^*(t)$ и $K_1(t,\tau)$, $K_2(t,\tau)$ – упругомгновенные модули деформации и ядра ползучести при чистом сдвиге и всестороннем сжатии соответственно, $I_1(M)$ – первый инвариант тензора M, а $\mathrm{dev}M$ – его девиатор.

Отметим, что при описании процесса непрерывного наращивания вязкоупругого стареющего тела имеются три характерных момента времени: момент изготовления элемента с координатой $x - \overset{*}{\tau}_1(x)$, момент приложения нагрузки к этому элементу – $\tau_0(x)$ и момент его присоединения к основному телу $\tau^*(x)$. В общем случае все эти моменты времени различны.

Задание трех указанных моментов времени во многом определяет специфику наращивания. Если исследуются процессы непрерывного бетонирования, обледенения, роста кристаллов и т.п., то $\overset{*}{\tau}_1(x) = \tau_0(x) = \tau^*(x)$, т.е. приращиваемые элементы загружаются и присоединяются одновременно с их зарождением. Если процессом непрерывного наращивания моделируется напыление или возведение конструкции из большого количества блоков, то, как правило, $\tau_0(x) = \tau^*(x)$, а момент изготовления элементов $\overset{*}{\tau}_1(x)$ произволен. В случае, когда элементы начинают деформироваться с момента их зарождения, и только через некоторое время присоединяются к основному телу, $\overset{*}{\tau}_1(x) = \tau_0(x) \neq \tau^*(x)$ и т.д.

Переходя к формулировке проблемы, которая непосредственно исследуется в настоящей работе, особо выделим то обстоятельство, что задачи наращивания тел принципиальным образом отличаются от задач, где происходит снятие материала. Последние характеризуются лишь уменьшением области, занимаемой телом, при стандартных уравнениях и граничных условиях.

Пусть вязкоупругое однородное стареющее тело, изготовленное в момент времени $\overset{*}{\tau}_1(x) = 0$, занимает область Ω_0 с поверхностью $S_0(x \in \Omega_0)$ и до момента загружения $\tau_0 \geqslant 0$ свободно от напряжений. От момента загружения на поверхности тела задаются в общем случае четыре типа граничных условий (на $S_1(t)$ – поверхностные силы, на $S_2(t)$ – перемещения, на $S_3(t)$ – нормальные перемещения и касательные усилия, на $S_4(t)$ – нормальные усилия и касательные перемещения), а также объемные силы, зависящие от времени и координат.

Участки поверхности, на которых задаются разные граничные условия, не пересекаются и в целом занимают всю поверхность тела. Зависимость S_i от времени t позволяет учитывать возможную эволюцию систем нагрузок, штампов и т.п. на поверхности S_0 и считается кусочно-постоянной. Если поверхность тела не замкнута, то на бесконечности задается поведение напряжений или перемещений.

В момент $\tau_1 \geqslant \tau_0$ начинается непрерывное наращивание тела элементами, изготовленными одновременно с ним ($\overset{*}{\tau}_1(x) = 0$). В процессе роста оно занимает область $\Omega(t)$ с поверхностью $S(t)$. Поверхность роста $S^*(t)$ ($S^*(\tau_1) \subset S_0$) движется в пространстве, при этом участки задания граничных условий $S_i(t)$ ($i = 1, \ldots, 4$) могут изменяться и за счет загружения неподвижной поверхности дополнительного тела. Будем считать, что задаваемый на поверхности роста полный тензор напряжений согласован с известными поверхностными силами $p^*(x, t)$ на $S^*(t)$ (например, с давлением), а момент приложения нагрузки к приращиваемым элементам совпадает с моментом их присоединения к растущему телу ($\tau_0(x) = \tau^*(x)$).

В момент времени $\tau_2 > \tau_1$ наращивание тела прекращается и с этого момента на поверхности $S_1 = S(\tau_2)$ тела, занимающего область $\Omega_1 = \Omega(\tau_2)$, задаются (как и до начала наращивания) четыре типа граничных условий на участках $S_i(t)$.

Через некоторое время в момент $\tau_3 > \tau_2$ может вновь начаться наращивание тела, при этом допустимо появление поверхности наращивания, никак не связанной с существовавшей ранее. Затем можно рассмотреть остановку наращивания в момент τ_4 и так последовательно задачу кусочно-непрерывного наращивания деформируемого тела с n моментами начала роста и, естественно, с n его остановками.

Переходя к исследованию основных этапов процесса кусочно-непрерывного наращивания вязкоупругих тел, заметим, что всюду далее рассматриваются достаточно медленные процессы, такие, что в уравнениях равновесия можно пренебречь инерционными членами. Кроме того, во избежание громоздких записей на поверхности тела задаются условия только двух первых типов. Их последующие преобразования дают четкую схему работы по аналогии с краевыми условиями третьего и четвертого типов.

2. Напряженно-деформированное состояние основного тела до начала процесса наращивания. Исследуем НДС вязкоупругого стареющего тела Ω_0 на интервале времени $[\tau_0, \tau_1]$. Уравнение равновесия запишем в форме (1.1):

$$\nabla \cdot T + f = 0 \tag{2.1}$$

Оговоренные выше краевые условия представим в виде

$$x \in S_1(t){:}\ \ n \cdot T = p_0, \quad x \in S_2(t){:}\ \ u = u_0 \tag{2.2}$$

где p_i и u_i – задаваемые векторы поверхностных сил и перемещений, n – единичный вектор нормали к поверхности тела, а соотношения Коши – следующим выражением (см. (1.2)):

$$E = \tfrac{1}{2}[\nabla u + (\nabla u)^T] \tag{2.3}$$

Уравнения состояния возьмем в форме (1.8), (1.9) и будем считать, что коэффициенты поперечного сжатия упругомгновенной деформации и деформации ползучести стареющего материала совпадают и равны ν, тогда будем иметь (см. [5, 8])

$$T = G(I + N(\tau_0, t))\,[2E + (K - 1)\, I_1(E)\, \mathbf{1}] \tag{2.4}$$

$$(I + N(\tau_0, t))^{-1} = (I - L(\tau_0, t))$$

$$G = \frac{E_1}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{1}{(1-2\nu)}, \quad C(t,\tau) = \frac{\omega(t,\tau)}{2(1+\nu)}, \quad L(\tau_0, t)\, f(t) = \int\limits_{\tau_0}^{t} f(\tau)\, K(t,\tau)\, d\tau$$

$$K(t,\tau) = E_1(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau}[E_1^{-1}(\tau) + C(t,\tau)] = K_1(t,\tau) = G(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau}[G^{-1}(\tau) + \omega(t,\tau)]$$

где $E_1 = E_1(t)$ и $G = G(t)$ – модули упругомгновенной деформации при растяжении и сдвиге, $C(t, \tau)$ и $\omega(t, \tau)$ – меры ползучести при растяжении и сдвиге, $K(t, \tau)$ – ядро ползучести при растяжении, $\mathbf{1}$ – единичный тензор. Выше в ряде очевидных случаев аргументы опущены. Будем опускать их и далее, воспроизводя лишь в случаях, когда их отсутствие может затруднить понимание.

Итак, соотношения (2.1)–(2.4) представляют краевую задачу (КЗ) линейной теории вязкоупругости для однородного стареющего основного тела, решение которой позволяет описать его НДС при $t \in [\tau_0, \tau_1]$.

Преобразуем КЗ для основного тела. Введем обозначения

$$M^0 = H(\tau_0, t)\, M G^{-1}, \quad a^0 = H(\tau_0, t)\, a G^{-1}, \quad H(\psi, t) = (I - L(\psi, t)) \tag{2.5}$$

где M и a – произвольные тензор и вектор соответственно, и подействуем оператором $H(\tau_0, t)$ на соотношения из (2.1)–(2.4), содержащие T, предварительно разделив их на G. Тогда, учитывая коммутативность оператора $H(\tau_0, t)$ и оператора Гамильтона, получим с учетом (2.5) следующую КЗ ($\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$):

$$\nabla \cdot T^0 + f^0 = 0, \quad x \in S_1(t){:}\ \ n \cdot T^0 = p_0^0, \quad x \in S_2(t){:}\ \ u = u_0 \tag{2.6}$$

$$E = \tfrac{1}{2}[\nabla u + (\nabla u)^T], \quad T^0 = 2E + (K-1)\, I_1(E)\,\mathbf{1}$$

В КЗ (2.6) в отличие от задачи (2.1)–(2.4) время входит параметрически, и она математически эквивалентна КЗ теории упругости с некоторым параметром t. Для построения решения такой задачи пригодны все аналитические и численные методы теории упругости, и она безусловно предпочтительнее для исследования по сравнению с задачей теории вязкоупругости (2.1)–(2.4). Однако указанные преимущества КЗ (2.6) можно в полной мере использовать лишь при взаимно однозначном соответствии решений (2.1)–(2.4) и (2.6). Такое соответствие дается следующей теоремой.

Теорема 1. Для того чтобы T, E и u были решением КЗ (2.1)–(2.4), необходимо и достаточно, чтобы T^0, E и u давали решение КЗ (2.6), и при этом выполнялось соотношение ($\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$)

$$T(x,t) = G(t)\,[T^0(x,t) + \int_{\tau_0}^{t} T^0(x,\tau)\, R(t,\tau)\, d\tau] \tag{2.7}$$

где $R(t,\tau)$ – резольвента ядра $K(t,\tau)$.

Справедливость этой теоремы легко проверить непосредственно, воспользовавшись тем, что однородное уравнение Вольтерры второго рода имеет только тривиальное решение (см., например, [9, 10]). Здесь заметим только, что (2.5) и (2.7) дают примеры таких уравнений, записанных в прямой и резольвентной форме соответственно.

Таким образом, решив КЗ (2.6) с параметром t, можно восстановить истинные характеристики НДС исходного вязкоупругого стареющего тела (2.1)–(2.4) по теореме 1 при помощи формулы (2.7) (см. также принцип соответствия [8]).

Дальнейшие преобразования носят во многом формальный характер и предназначены для использования в следующих разделах с целью максимального упрощения и унификации основных расчетных формул процесса кусочно-непрерывного наращивания.

Продифференцируем по t (здесь и всюду далее будем понимать дифференцирование в смысле обобщенных функций) соотношения (2.6). Тогда будем иметь

$$\nabla \cdot S + h = 0, \quad x \in S_1(t)\colon\ n \cdot S = w_0, \quad x \in S_2(t)\colon\ \upsilon = \upsilon_0 \tag{2.8}$$

$$D = \tfrac{1}{2}[\nabla \upsilon + (\nabla \upsilon)^T], \quad S = 2D + (K-1)\, I_1(D)\,\mathbf{1}$$

$$S = \frac{\partial T^0}{\partial t}, \quad \upsilon_0 = \frac{\partial u_0}{\partial t}, \quad h = \frac{\partial f^0}{\partial t}, \quad w_0 = \frac{\partial p_0^0}{\partial t}$$

$$w_0 = \frac{1}{G(t)} \frac{\partial p_0(x,t)}{\partial t} + \int_{\tau_0}^{t} \frac{\partial p_0(x,\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \omega(t,\tau)}{\partial t}\, d\tau + p_0(x,\tau_0) \frac{\partial \omega(t,\tau)}{\partial t} \tag{2.9}$$

Очевидно, что соотношения (2.8), дополненные начальными условиями для продифференцированных функций, образуют так называемую начально-краевую задачу (НКЗ) (см., например, [11]), параметрически зависящую от времени t. Сами начальные условия могут быть найдены из решения (2.6), где следует положить $t = \tau_0$.

Теорема 2. Функции T^0, E и u являются решением КЗ (2.6) тогда и только тогда, когда S, D и υ удовлетворяют соотношениям НКЗ (2.8) и при этом ($\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$)

$$T^0(x,t) = T^0(x,\tau_0) + \int_{\tau_0}^{t} S(x,\tau)\, d\tau, \quad E(x,t) = E(x,\tau_0) + \int_{\tau_0}^{t} D(x,\tau)\, d\tau \tag{2.10}$$

$$u(x,t) = u(x,\tau_0) + \int_{\tau_0}^{t} \upsilon(x,\tau)\, d\tau$$

Теоремы 1 и 2 позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3. Для того, чтобы T, E и u были решением КЗ (2.1)–(2.4), необходимо и достаточно, чтобы S, D, и υ, давали решение задачи (2.8) и при этом выполнялись соотношения (см. (2.7), (2.10))

$$T(x,t) = G(t)\left\{\frac{T(x,\tau_0)}{G(\tau_0)}\left[1+\int_{\tau_0}^{t} R(t,\tau)\,d\tau\right]+\int_{\tau_0}^{t}\left[S(x,\tau)+\int_{\tau_0}^{\tau} S(x,\zeta)\,d\zeta\, R(t,\tau)\right]d\tau\right\}$$

$$u(x,t) = u(x,\tau_0)+\int_{\tau_0}^{t} \upsilon(x,\tau)\,d\tau \quad (x\in\Omega_0,\ t\in[\tau_0,\tau_1]) \tag{2.11}$$

Заметим, что соотношения (2.8) по форме совпадают с КЗ теории упругости, содержащей параметр t, и для их решения можно применить все известные (аналитические и численные) в теории упругости методы. После решения (2.8) истинные характеристики НДС основного тела могут быть восстановлены по формулам (2.11).

3. Начально-краевая задача для непрерывно растущего тела. Рассмотрим теперь непосредственно процесс непрерывного наращивания деформируемого тела ($\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$). Для растущего тела имеем:

уравнение равновесия

$$\nabla\cdot T + f = 0 \tag{3.1}$$

краевые условия на неподвижной части поверхности

$$x\in S_1(t):\ n\cdot T = p_0, \quad x\in S_2(t):\ u = u_0 \tag{3.2}$$

начально-краевое условие на растущей поверхности

$$x\in S^*(t):\ T = T^*, \quad n\cdot T^* = p^* \quad (t = \tau^*(x)) \tag{3.3}$$

соотношение между скоростями деформации и перемещения

$$D = \tfrac{1}{2}[\nabla\upsilon + (\nabla\upsilon)^T] \tag{3.4}$$

уравнение состояния в форме

$$T = G(I+N(\tau_0(x),t))\,[2E+(K-1)\,I_1(E)\,\mathbf{1}] \tag{3.5}$$

$$\tau_0(x) = \begin{cases}\tau_0, & x\in\Omega_0\\ \tau^*(x), & x\in\Omega^*(t)\end{cases}$$

Соотношения (3.1)–(3.5) представляют собой общую безынерционную НКЗ для непрерывно растущего тела, где $T^* = T(x, \tau^*(x))$ – задаваемый на $S^*(t)$ полный тензор напряжений, согласованный с внешними силами p^*, а оператор $(I - L(\tau_0(x), t)) = H(\tau_0(x), t))$ и обратный ему $(I + N(\tau_0(x), t))$ определяются из (2.4), (2.5) заменой τ_0 на $\tau_0(x)$. Заметим (см. (3.5)), что исследуемый процесс наращивания основного тела новыми элементами в общем случае приводит к определяющим соотношениям, содержащим разрывы на поверхности раздела исходного и дополнительного тел.

Преобразуем НКЗ для непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела к задаче с параметром времени, по форме совпадающей с КЗ теории упругости (см. также [1–5]). На первом этапе преобразуем задачу наращивания вязкоупругого тела с определяющими соотношениями (3.5) к задаче наращивания упругого тела, описываемого законом Гука.

Представим уравнение базовой поверхности $S_* = S^*(\tau_1)$ в форме (см. (1.6))

$$x\in S_*:\ \tau^*(x)\,\tau_1^{-1} - 1 = 0 \tag{3.6}$$

где $\tau^*(x)\,\tau_1^{-1} - 1 < 0$ при $x\in\Omega_0$ и $\tau^*(x)\,\tau_1^{-1} - 1 \geqslant 0$ при $x\in\Omega^*$. Будем считать, что $\tau^*(x)$ – достаточно гладкая функция, такая, что $\nabla\tau^*(x) \neq 0$ при $\tau^*(x)\,\tau_1^{-1} - 1 = 0$ (т.е.

на поверхности S_* нет особых точек). Введем характеристическую функцию $\theta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1}-1)$, равную единице в случае, когда ее аргумент больше, либо равен нулю, и равную нулю при отрицательном аргументе [12]. Теперь оператор $H(\tau_0(x), t)$ можно представить в виде

$$H(\tau_0(x),t)\,\varphi(t)=(I-L(\tau^0(x),t))\,\varphi(t)-[1-\theta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1}-1)]\,L^t(\tau_0,\tau_1)\,\varphi(t) \tag{3.7}$$

$$L^t(\tau_0,\tau_1)\,f(t)=\int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\tau)\,K(t,\tau)\,d\tau,\quad \tau^0(x)=\tau_1+\theta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1}-1)\,(\tau^*(x)-\tau_1) \tag{3.8}$$

причем $\tau^*(x)=\tau_1$ при $x\in S_*$ (см. (3.6)).

Подействуем оператором $H(\tau_0(x), t)$ на соотношения из (3.1)–(3.5), содержащие T, предварительно разделив их на G. Тогда

$$\begin{gathered}H\nabla\cdot TG^{-1}+f^0=0,\quad x\in S_1(t)\colon\ n\cdot T^0=p_0,\quad x\in S_2(t)\colon\ u=u_0\\ x\in S^*(t)\colon\ T^0=T^{*0}=T^*(x)\,G^{-1}(\tau^*(x))\\ n\cdot T^{*0}=p^{*0}=p^*(x)\,G^{-1}(\tau^*(x))\quad (t=\tau^*(x))\\ D=\tfrac{1}{2}[\nabla\upsilon+(\nabla\upsilon)^T],\quad T^0=2E+(K-1)\,I_1(E)\,\mathbf{1}\end{gathered} \tag{3.9}$$

Теперь при учете (3.7)–(3.8) преобразуем соотношения (3.9) к НКЗ относительно величин T^0, E и u, где время t играет роль параметра.

Можно показать, что (см. (1.6), (1.7), (3.6)–(3.8))

$$\begin{gathered}H\nabla\cdot TG^{-1}=\nabla\cdot T^0-\theta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1}-1)\,s_n^{-1}n\cdot T^*(x)\,G^{-1}(\tau^*(x))\,K(t,\tau^*(x))-\\ -\delta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1}-1)\,\tau_1^{-1}s_n^{-1}\int_{\tau_0}^{\tau_1} n\cdot T(x,\tau)\,G^{-1}(\tau)\,K(t,\tau)\,d\tau\\ \nabla\tau^0(x)=\theta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1}-1)\,\nabla\tau^*(x),\quad \nabla\tau^*(x)=s_n^{-1}n\end{gathered} \tag{3.10}$$

Заметим, что второе слагаемое в правой части выражения (3.10) известно по условию задачи (см. (3.9)), а третье слагаемое определено из решения задачи для основного тела при $t\in[\tau_0,\tau_1]$. Полагая

$$x\in S_*\colon\ n\cdot T(x,\tau)=p_*(x,\tau),\quad p_*^0(x,\tau)=p_*(x,\tau)\,G^{-1}(\tau)\quad (\tau_0\leqslant\tau\leqslant\tau_1) \tag{3.11}$$

где $p_*(x,\tau)$ – нагрузка, действующая вплоть до момента начала наращивания на базовой поверхности основного тела, получим

$$H\nabla\cdot TG^{-1}=\nabla\cdot T^0-\theta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1}-1)\,f_1^0(x,t)-\delta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1}-1)\,f_2^0(x,t) \tag{3.12}$$

$$f_1^0(x,t)=s_n^{-1}p^{*0}(x)\,K(t,\tau^*(x)),\quad f_2^0(x,t)=s_n^{-1}\tau_1^{-1}\int_{\tau_0}^{\tau_1} p_*^0(x,\tau)\,K(t,\tau)\,d\tau$$

где $f_1^0(x,t)$ и $f_2^0(x,t)$ – известные векторные функции.

Соотношения (3.12) позволяют записать задачу (3.9) в виде

$$\begin{gathered}\nabla\cdot T^0+f^0-\theta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1}-1)\,f_1^0(x,t)-\delta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1}-1)\,f_2^0(x,t)=0\\ x\in S_1(t)\colon\ n\cdot T^0=p_0^0,\quad x\in S_2(t)\colon\ u=u_0\\ x\in S^*(t)\colon\ T^0=T^{*0},\quad n\cdot T^{*0}=p^{*0}\quad (t=\tau^*(x))\\ D=\tfrac{1}{2}[\nabla\upsilon+(\nabla\upsilon)^T],\quad T^0=2E+(K-1)\,I_1(E)\,\mathbf{1}\end{gathered} \tag{3.13}$$

Теорема 4. Для того чтобы T, E и u были решениями НКЗ (3.1)–(3.5), необходимо и достаточно, чтобы T^0, E и u давали решение НКЗ (3.13), и при этом выполнялось соотношение ($t \geqslant \tau_1$)

$$T(x,t) = G(t)\,[T^0(x,t) + \int_{\tau_0(x)}^{t} T^0(x,\tau)\, R(t,\tau)\, d\tau] \tag{3.14}$$

Аналогично указанному для теоремы 1 доказательство теоремы 4 может быть получено подстановкой при помощи известного факта о тривиальности решения однородного уравнения Вольтерры второго рода. Теорема 4 позволяет привести НКЗ непрерывного наращивания вязкоупругого стареющего тела (в общем случае с разрывными уравнениями состояния) к задаче (3.13), совпадающей по форме с НКЗ непрерывного наращивания упругого тела.

Заметим, что в уравнении равновесия НКЗ (3.13) появляются новые (по сравнению с задачей (3.1)–(3.5)), однако известные слагаемые, содержащие некоторые сосредоточенные в области дополнительного тела (функция $\overset{0}{f_1}(x, t)$) и на базовой поверхности (функция $\overset{0}{f_2}(x, t)$) нагрузки.

Преобразуем теперь НКЗ (3.13) к КЗ относительно скоростей T^0, E и u. Для этого продифференцируем по t первое уравнение. Тогда

$$\nabla \cdot S + h - \theta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1} - 1)\, h_1 - \delta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1} - 1)\, h_2 = 0 \tag{3.15}$$

$$h = Rf, \quad h_1 = s_n^{-1} p^*(x) \frac{\partial}{\partial \tau} \left.\frac{\partial \omega(t,\tau)}{\partial t}\right|_{\tau=\tau^*(x)}, \quad h_2 = s_n^{-1}\tau_1^{-1} \int_{\tau_0}^{\tau_1} p_*(x,\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \omega(t,\tau)}{\partial t}\, d\tau \tag{3.16}$$

причем оператор R действует на произвольный вектор $a(x, t)$ по правилу (см. также (2.9))

$$Ra(x,t) = \frac{1}{G(t)} \frac{\partial a(x,t)}{\partial t} + \int_{\tau_0(x)}^{t} \frac{\partial a(x,\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \omega(t,\tau)}{\partial t}\, d\tau + a(x,\tau_0(x)) \frac{\partial \omega(t,\tau_0(x))}{\partial t} \tag{3.17}$$

Продифференцируем по t также краевые условия на $S_i(t)$ (i = 1, 2) и уравнение состояния. Будем иметь

$$x \in S_1(t)\colon\ n \cdot S = w_0 (w_0 = Rp_0), \quad x \in S_2(t)\colon\ \upsilon = \upsilon_0 \tag{3.18}$$

$$S = 2D + (K - 1)\, I_1(D)\, \mathbf{1}$$

Для вывода граничного условия на $S^*(t)$ подействуем аналогично [1, 3–5] оператором Гамильтона на начально-краевое условие $T^0(x, \tau^*(x)) = T^{*0}(x)$. Тогда после ряда преобразований при учете (3.9)–(3.13) получим

$$x \in S^*(t)\colon\ n \cdot S = [\nabla \cdot T^*(x) + f^*(x)]\, G^{-1}(t)\, s_n - \theta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1} - 1)\, p^*(x) \times$$

$$\times \left.\frac{\partial \omega(t,\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=\tau^*(x)} - \delta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1} - 1)\,\tau_1^{-1} \int_{\tau_0}^{\tau_1} p_*(x,\tau) \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{1}{G(\tau)} + \omega(t,\tau)\right] d\tau \tag{3.19}$$

$$n \cdot T^*(x) = p^*(x) \quad (f(x,\tau^*(x)) = f^*(x), t = \tau^*(x))$$

Теперь, добавляя к (3.15), (3.18) и (3.19) соотношения Коши в скоростях из (3.13), получим КЗ для S, D и υ в форме

$$\nabla \cdot S + h - \theta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1} - 1)\, h_1 - \delta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1} - 1)\, h_2 = 0$$

$$x \in S_1(t)\colon\ n \cdot S = w_0, \quad x \in S_2(t)\colon\ \upsilon = \upsilon_0$$

$$x \in S^*(t)\colon\ n \cdot S = [\nabla \cdot T^*(x)\, G^{-1}(t) + f^*(x)\, G^{-1}(t) - \theta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1} - 1)\, f_1^0(x,t) - \tag{3.20}$$

$$-\delta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1}-1)\,f_2^0(x,t)]s_n,\quad n\cdot T^*(x)=p^*(x)\ \ (t=\tau^*(x))$$

$$D=\tfrac{1}{2}[\nabla\upsilon+(\nabla\upsilon)^T],\quad S=2D+(K-1)\,I_1(D)\,\mathbf{1}$$

причем f_1^0, f_2^0 и h, h_1, h_2 определены формулами (3.12) и (3.16), (3.17), а условия на поверхностях $S_1(t)$ и $S^*(t)$ совершенно идентичны.

Дополненные начальными условиями для основного тела при $t=\tau_1$ соотношения (3.20), содержащие и начально-краевое условие на поверхности роста, образуют НКЗ с параметром времени t.

Теорема 5. Функции T^0, E и u являются решением НКЗ (3.13) тогда и только тогда, когда S, D и υ удовлетворяют соотношениям (3.20) и при этом ($\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$)

$$T^0(x,t)=T^0(x,\tau^0(x))+\int\limits_{\tau^0(x)}^{t} S(x,\tau)\,d\tau,\quad \dot{E}(x,t)=E(x,\tau^0(x))+\int\limits_{\tau^0(x)}^{t} D(x,\tau)\,d\tau \tag{3.21}$$

$$u(x,t)=u(x,\tau^0(x))+\int\limits_{\tau^0(x)}^{t} \upsilon(x,\tau)\,d\tau$$

Естественно, что значения напряжений, деформаций и перемещений при $t=\tau_1$ берутся из решения задачи для основного нерастущего тела, полученного ранее.

Воспользовавшись представлением решения для основного тела в виде (2.10), приведем еще одну форму связи функций T^0, E и u с их скоростями, справедливую для всего растущего тела:

$$T^0(x,t)=T^0(x,\tau_0(x))+\int\limits_{\tau_0(x)}^{t} S(x,\tau)\,d\tau,\quad E(x,t)=E(x,\tau_0(x))+\int\limits_{\tau_0(x)}^{t} D(x,\tau)\,d\tau \tag{3.22}$$

$$u(x,t)=u(x,\tau_0(x))+\int\limits_{\tau_0(x)}^{t} \upsilon(x,\tau)\,d\tau$$

Значения скоростей соответствующих функций на интервале времени $[\tau_0, \tau_1]$ для основного тела известны из решения задачи (2.8).

Теорема 6. Для того, чтобы T, E и u были решениями НКЗ (3.1)–(3.5), необходимо и достаточно, чтобы S, D и υ давали решение задачи (3.20) и при этом выполнялись соотношения (см. (2.11))

$$T(x,t)=G(t)\left\{\frac{T(x,\tau_0(x))}{G(\tau_0(x))}\left[1+\int\limits_{\tau_0(x)}^{t} R(t,\tau)\,d\tau\right]+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\tau_0(x)}^{t}\left[S(x,\tau)+\int\limits_{\tau_0(x)}^{\tau} S(x,\zeta)\,d\zeta\,R(t,\tau)\right]d\tau\right\} \tag{3.23}$$

$$u(x,t)=u(x,\tau_0(x))+\int\limits_{\tau_0(x)}^{t} \upsilon(x,\tau)\,d\tau$$

Доказательство этой теоремы можно построить на основании теорем 4 и 5, а также представления (3.22).

Таким образом, решение задачи наращивания вязкоупругого стареющего тела на интервале времени $[\tau_0, \tau_2]$ может быть получено путем последовательного решения математически совершенно идентичных задач (2.1)–(2.4) при $t=\tau_0$ и (2.8), (3.20) с параметром t, которые по форме совпадают с КЗ теории упругости. Истинные напряжения и перемещения в растущем теле могут быть затем восстановлены по формулам (3.23).

Видно, что соотношения (3.23) предназначены для использования решений формально преобразованной задачи (2.8), когда на интервале времени $[\tau_0, \tau_1]$ определяются скорости операторных напряжений S и перемещений υ для основного тела. Формулы расшифровки эквивалентные (3.23) могут быть получены и на основании (2.6), (2.7) и (3.21). Они более громоздки и не столь универсальны, как (3.23), поэтому приводить их не будем.

Соотношения (3.23) показывают, что на НДС растущего вязкоупругого тела влияет вся история его загружения и наращивания. Заметим, что начальные значения перемещений приращиваемых элементов $u(x, \tau^*(x))$ в (3.23) (поскольку НДС растущего тела от них не зависит), обычно полагают равными нулю.

4. О деформировании вязкоупругого тела, наращивание которого прекращено. Пусть в момент времени τ_2 наращивание тела прекращается. В этот момент оно занимает область Ω_1 с поверхностью S_1, на которой как и в случае задачи для основного тела задаются два типа граничных условий, причем $S^*(\tau_2) = S_1^* \subseteq \cup\, S_i(t)$ $(i = 1, 2)$. В этом случае на интервале времени $[\tau_2, \tau_3]$ (τ_3 – момент начала следующего этапа процесса наращивания) задача для неизменяемого тела, занимающего область Ω_1, имеет вид, аналогичный задаче (3.1)–(3.5), где отсутствует начально-краевое условие на $S^*(t)$:

$$\nabla\cdot T + f = 0,\quad x\in S_1(t)\colon\ n\cdot T = p_0,\quad x\in S_2(t)\colon\ u = u_0 \tag{4.1}$$

$$D = \tfrac{1}{2}[\nabla\upsilon + (\nabla\upsilon)^T],\quad T = G(I + N(\tau_0(x), t))\,[2E + (K-1)\,I_1(E)\,\mathbf{1}]$$

причем $\tau^*(x) = \tau_2$ при $x \in S_1^*$, а начальными условиями служат значения при $t = \tau_2$ напряжений, деформаций и перемещений, найденных при решении задачи наращивания на предыдущем шаге.

Аналогично проделанному ранее можно получить следующую КЗ (см. (3.20)):

$$\nabla\cdot S + h - \theta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1} - 1)\,h_1 - \delta(\tau^*(x)\,\tau_1^{-1} - 1)\,h_2 = 0$$

$$x\in S_1(t)\colon\ n\cdot S = w_0,\quad x\in S_2(t)\colon\ \upsilon = \upsilon_0 \tag{4.2}$$

$$D = \tfrac{1}{2}[\nabla\upsilon + (\nabla\upsilon)^T],\quad S = 2D + (K-1)\,I_1(D)\,\mathbf{1}$$

где h, h_1 и h_2 определены формулами (3.16), (3.17), выражение для w_i дано в (3.18), а начальные условия остаются прежними.

Можно доказать следующую теорему.

Теорема 7. Для того чтобы T, E и u были решениями НКЗ (4.1), необходимо и достаточно, чтобы S, D и υ давали решение задачи (4.2) и при этом выполнялись соотношения (3.23).

Доказательство этой теоремы опустим, сославшись на аналогию с исследованиями, выполненными в предыдущем разделе.

Итак, для построения решения задачи на интервале времени $[\tau_0, \tau_3]$ необходимо построить решения четырех идентичных задач (совпадающих по форме с КЗ теории упругости, имеющей параметр t): задачи (2.1)–(2.4) при $t = \tau_0$ и задач (2.8), (3.20) и (4.2). После этого НДС растущего тела при любом $t \in [\tau_0, \tau_3]$ восстанавливается по формулам (3.23).

5. Кусочно-непрерывное наращивание вязкоупругого тела и основные выводы. Пусть в момент времени τ_3 процесс наращивания возобновляется и к поверхности (или ее части) тела S_1, занимающего область Ω_1, начинается приток новых элементов. Тогда совершенно аналогично проделанному в разд. 3 можно получить задачу вида (3.20), описывающую поведение растущего вязкоупругого тела вплоть до момента второй остановки процесса наращивания τ_4. Естественно, что новая поверхность роста может быть никак не связана с прежней, функции и параметры из (3.20) примут новые значения, а в уравнении равновесия могут появиться новые известные слагаемые, содержащие некоторые сосредоточенные в областях, занимаемых субтелами, и на базовых поверхностях нагрузки. После решения такой задачи НДС растущего тела может быть определено при помощи формулы (3.23).

Точно так же задача для $t \geqslant \tau_4$, когда тело не растет, может быть приведена к виду (4.2) и далее использованы соотношения (3.23).

Для решения задачи о произвольном кусочно-непрерывном наращивании применима следующая пошаговая схема. Вначале, решается задача (2.1)–(2.4) при $t = \tau_0$ и задача (2.8). Затем на каждом этапе непрерывного наращивания либо отсутствия роста строятся решения задач вида (3.20) и (4.2) соответственно. Окончательные результаты получаются при помощи (3.23).

Таким образом, на основании предложенного метода можно рассматривать процесс кусочно-непрерывного наращивания вязкоупругого стареющего тела с любым конечным числом моментов начала роста и остановки. Задачу с n моментами начала роста (и, естественно, с n остановками) можно привести к исследованию $2n + 2$ однотипных задач, совпадающих по форме с КЗ теории упругости, содержащей параметр t (строго говоря, первая задача для основного тела при $t = \tau_0$ является просто КЗ теории упругости). После решения этих $2n + 2$ задач НДС изучаемого вязкоупругого стареющего тела в любой момент времени легко восстановить по указанным выше формулам.

Установленное в настоящем разделе взаимно однозначное соответствие между решениями задачи кусочно-непрерывного наращивания вязкоупругих стареющих тел и КЗ теории упругости позволяет сделать вывод о существовании и единственности решения НКЗ кусочно-непрерывного наращивания вязкоупругих тел постольку, поскольку существует и единственно решение КЗ теории упругости (см., например, [13]).

Рассмотрим некоторые характерные способы наращивания деформируемых тел. Предположим, что базовая поверхность растущего тела на временных интервалах этапа остановки роста не загружается, т.е. при $x \in S_* \subset S_1(\tau)$ имеем $n \cdot T(x, \tau) = p_*(x, \tau) = 0$ (см. (3.11)). Тогда в соотношениях (3.20) следует положить $\overset{0}{f_2}$ и h_2 нулями (см. (3.12), (3.16)). Пусть, кроме того, сама поверхность роста не загружается в процессе наращивания, т.е. тензор T^* согласован с нулевыми внешними силами. В этом случае $n \cdot T^*(x) = p^*(x) = 0$ (см. (3.3)) и $\overset{0}{f_1}$, h_1 полагаются в (3.20) нулями (см. (3.12) и (3.16)). Оговоренные выше естественные для прикладных задач условия (см., например [4, 5, 14, 15]) приводят в итоге к тому, что задачи (3.20) и (4.2) при $t \geqslant \tau_1$ существенно упрощаются для аналитического или численного анализа, лишаясь членов, включающих сосредоточенные на поверхности раздела основного и дополнительного тел и в области дополнительного тела нагрузки.

Следует отметить, что при наличии даже постоянных действующих на тело объемных сил итоговые разрешающие соотношения вида (3.20) и (4.2) эквивалентны некоторым КЗ теории упругости с параметром t, содержащим неоднородные по координатам объемные силы (см. (3.16), (3.17)).

На основании свойства ограниченной ползучести вязкоупругого материала (см. [5, 7, 8]) можно при помощи (3.20), (3.12), (3.16), (3.17) получить еще ряд интересных выводов. Так, если предположить, что загружается поверхность только основного тела, воздействия стационарны и наращивание происходит без натяга, то существует такой момент времени t^0, начиная с которого взаимным влиянием вновь приращиваемых частиц и сформировавшегося к этому моменту тела можно пренебречь. Другими словами, начиная с этого момента времени процесс наращивания уже мало влияет на состояние сформировавшейся к моменту t^0 части тела, а другая, образующаяся при $t > t^0$ часть, практически не напряжена. В частности, если при прочих равных условиях момент начала загружения основного тела стационарными нагрузками будет гораздо меньше момента начала наращивания, то влияние наращивания на состояние основного тела будет весьма мало, а все дополнительное тело практически не деформировано. К аналогичным выводам можно прийти, рассмотрев режим загружения исходного тела, при котором воздействия длительное время до начала наращивания остаются постоянными, независимо от их изменения в предыдущие моменты.

Рассмотренные эффекты имеют ясный механический смысл. Действительно, вязкоупругое тело в условиях ограниченной ползучести при стационарных воздействиях с течением времени практически перестает деформироваться. Его последующее наращивание ненапряженными элементами приводит к ситуации, когда взаимное влияние сформировавшейся и образующейся в процессе наращивания частей тела несущественно.

Соотношения (2.8), (3.20), (3.23), (4.2) позволяют предсказать и такие органически присущие растущим телам явления, как возникновение остаточных напряжений после снятия нагрузок, появление в наращиваемом теле поверхностей разрыва напряжений, зависимость НДС вязкоупругих тел от скорости их роста (в упругом случае имеет значение только последовательность актов возведения и загружения) (см. [1–5]).

В заключение обсудим еще один важный аспект проблемы наращивания деформируемых тел. Он касается соответствия решения НКЗ наращивания и КЗ вязкоупругости для тела с переменной границей. Вопрос заключается в следующем: когда решения неклассической задачи наращивания и классической задачи механики деформируемого твердого тела в области, изменяющейся со временем, совпадают? Оказывается, что такое совпадение происходит только в том случае, когда удается обеспечить совместность деформаций растущего тела и приращиваемых элементов [1–5]. Ясно, что такой режим наращивания на практике неосуществим, и именно он является вырожденным случаем НКЗ наращивания деформируемых тел.

Особо отметим, что в отличие от вырожденного случая совместности деформаций во всем теле при наращивании, случай наращивания тела ненапряженными элементами ($x \in S^*(t)$: $T = T^* = 0$, $n{\cdot}T^* = 0$ $(t = \tau^*(x))$) является полноценной версией процесса роста, мало упрощает задачу, позволяет ярко продемонстрировать эффекты, связанные с наращиванием в модельных примерах, и часто встречается в приложениях. Здесь имеем нетрадиционную для КЗ механики деформируемого твердого тела ситуацию, когда тривиальным, в определенном смысле, является не нулевое, а некоторое отличное от нулевого условие.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-00181-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н.Х., Метлов В.В.* Нелинейные задачи теории ползучести наращиваемых тел, подверженных старению // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 142–152.
2. *Тринчер В.К.* О постановке задачи определения напряженно-деформированного состояния растущего тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. С. 119–124.
3. *Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В.* Контактные задачи механики растущих тел // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 145–158.
4. *Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э.* Механика растущих вязкоупругопластических тел. М.: Наука, 1987. 471 с.
5. *Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э.* Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 175 с.
6. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
7. *Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
8. *Арутюнян Н.Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 324 с.
9. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.
10. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.
11. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
12. *Гельфанд И.Н., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
13. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
14. *Манжиров А.В.* О кручении растущего цилиндра жестким штампом // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 842–850.
15. *Манжиров А.В., Черныш В.А.* Задача об усилении заглубленной арочной конструкции методом наращивания // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С. 25–37.

Москва

Поступила в редакцию
26.V.1994