

УДК 539.3

© 1995 г. Л.А. Фильштинский

### РАСТЯЖЕНИЕ СЛОЯ, ОСЛАБЛЕННОГО ТУННЕЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Рассматривается классическая пространственная задача теории упругости для слоя, ослабленного сквозными, в общем случае криволинейными, разрезами. Особенность настоящего исследования заключается в том, что для решения трехмерной краевой задачи привлекаются одномерные сингулярные интегральные уравнения, точнее бесконечная система таких уравнений. Однако проведенные численные эксперименты показали, что решение этой системы по методу редукции весьма быстро сходится почти во всем интервале изменения толщинной координаты и третье приближение практически не уточняет результатов в этой области. Таким образом, предлагаемая процедура фактически понижает размерность задачи на две единицы. Решение в непосредственной близости к основаниям слоя нуждается в уточнении, связанном с учетом особенности на ребре. В данной работе этот вопрос не рассматривается.

Задачи этого рода с той или иной степенью полноты рассматривались в [1–5]. Экспериментальное исследование характера напряженного состояния на выходящем к основанию слоя конце ребра содержится в [6].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим упругой слой  $-h \leq \bar{x}_3 \leq h$ ,  $-\infty < x_1, x_2 < \infty$ , ослабленный туннельными вдоль оси  $\bar{x}_3$  сквозными полостями – разрезами, поперечные сечения которых – гладкие разомкнутые дуги  $L_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ). Пусть на границах полостей действует поверхностная нагрузка  $X_n^\pm$  ( $X_n^+ = -X_n^- = X_n$ ,  $n = 1, 2, 3$ ). Предполагаем, что кривизны дуг и функции  $X_n$  – удовлетворяют условию Гельдера  $L_j$  и, кроме того,  $X_n$  разлагаются в ряде Фурье по координате  $\bar{x}_3$  на  $[-h, h]$ . Ниже рассмотрим симметричную (относительно срединной плоскости слоя) задачу теории упругости.

Будем исходить из однородных решений А.И. Лурье [7], которые представим в виде:

бигармоническое решение

$$u_1 - iu_2 = -2h \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) F, \quad u_3 = -h^2 (\sigma - 1) x_3 \nabla^2 \varphi$$

$$\sigma_1 = 2\mu h \nabla^2 F, \quad \sigma_2 = 8\mu h \partial^2 F / \partial z^2, \quad \sigma_3 = 0, \quad z = x_1 + ix_2$$

$$F = (3\sigma - 1) \varphi + \frac{h^2}{2} (\sigma - 1) \left( \frac{1}{3} - x_3^2 \right) \nabla^2 \varphi, \quad \nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad \bar{x}_3 = hx_3 \tag{1.1}$$

$$\partial_2^2 F_1 = -\partial_1^2 F_1 = 2\sigma \nabla^2 \varphi, \quad \partial / \partial z = \frac{1}{2} (\partial_1 - i\partial_2), \quad \partial_i = \partial / \partial x_i, \quad \sigma = (1 - 2\nu)^{-1}$$

вихревое решение

$$u_1 - iu_2 = 4i\sigma h \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \cos \rho_m x_3, \quad u_3 = 0$$

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -16i\mu\sigma h \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial z^2} \cos \rho_m x_3, \quad \sigma_{33} = 0 \quad (1.2)$$

$$\sigma_3 = -4i\mu\sigma \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \sin \rho_m x_3$$

$$\rho_m = \pi m, \quad \gamma_m = \rho_m / h, \quad (\nabla^2 - \gamma_m^2) \varphi_m = 0$$

потенциальное решение:

$$u_1 - iu_2 = 2h \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x_3) \Psi_k, \quad u_3 = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x_3) \Psi_k$$

$$\sigma_1 = \frac{2\mu}{h} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(x_3) \Psi_k, \quad \sigma_2 = -8\mu h \frac{\partial^2}{\partial z^2} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x_3) \Psi_k$$

$$\sigma_3 = 4\mu\sigma \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k(x_3) \Psi_k, \quad \sigma_{33} = \frac{2\mu\sigma}{h} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k(x_3) \Psi_k$$

$$\alpha_k(x_3) = (t_k / \delta_k - \sigma \tau_k) \cos \delta_k x_3 - \sigma x_3 t_k \sin \delta_k x_3$$

$$t_k = \sin \delta_k, \quad \tau_k = \cos \delta_k, \quad \operatorname{Re} \delta_k > 0, \quad \operatorname{Im} \delta_k > 0 \quad (1.3)$$

$$\beta_k(x_3) = ((2\sigma - 1) \delta_k t_k - \sigma \delta_k^2 \tau_k) \cos \delta_k x_3 - \sigma \delta_k^2 x_3 t_k \sin \delta_k x_3$$

$$\kappa_k(x_3) = \delta_k (\tau_k \sin \delta_k x_3 - x_3 t_k \cos \delta_k x_3), \quad \mu_k(x_3) = 2\sigma \kappa_k(x_3) - \alpha_k(x_3),$$

$$\nu_k(x_3) = (\delta_k t_k + \delta_k^2 \tau_k) \cos \delta_k x_3 + x_3 \delta_k^2 t_k \sin \delta_k x_3$$

$$\lambda_k = \delta_k / h, \quad (\nabla^2 - \lambda_k^2) \Psi_k = 0$$

Интегральные представления входящих в соотношения (1.1)–(1.3) функций должны обеспечивать существование скачков перемещений, непрерывность вектора напряжения при переходе через  $L_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) и затухание перемещений и напряжений на бесконечности. Ниже займемся построением таких представлений, корректных в указанном выше смысле.

Положим:

$$\varphi(z) = \operatorname{Re} \int_L \left( p(\zeta) \frac{\partial G}{\partial \zeta} + p^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla^2 G \right) d\zeta + \int_L q(\zeta) \nabla^2 G ds$$

$$F_1(z) = -4\sigma \operatorname{Re} \int_L p(\zeta) [\ln(\zeta - z) - 1 - \ln h] (\zeta - z) d\zeta$$

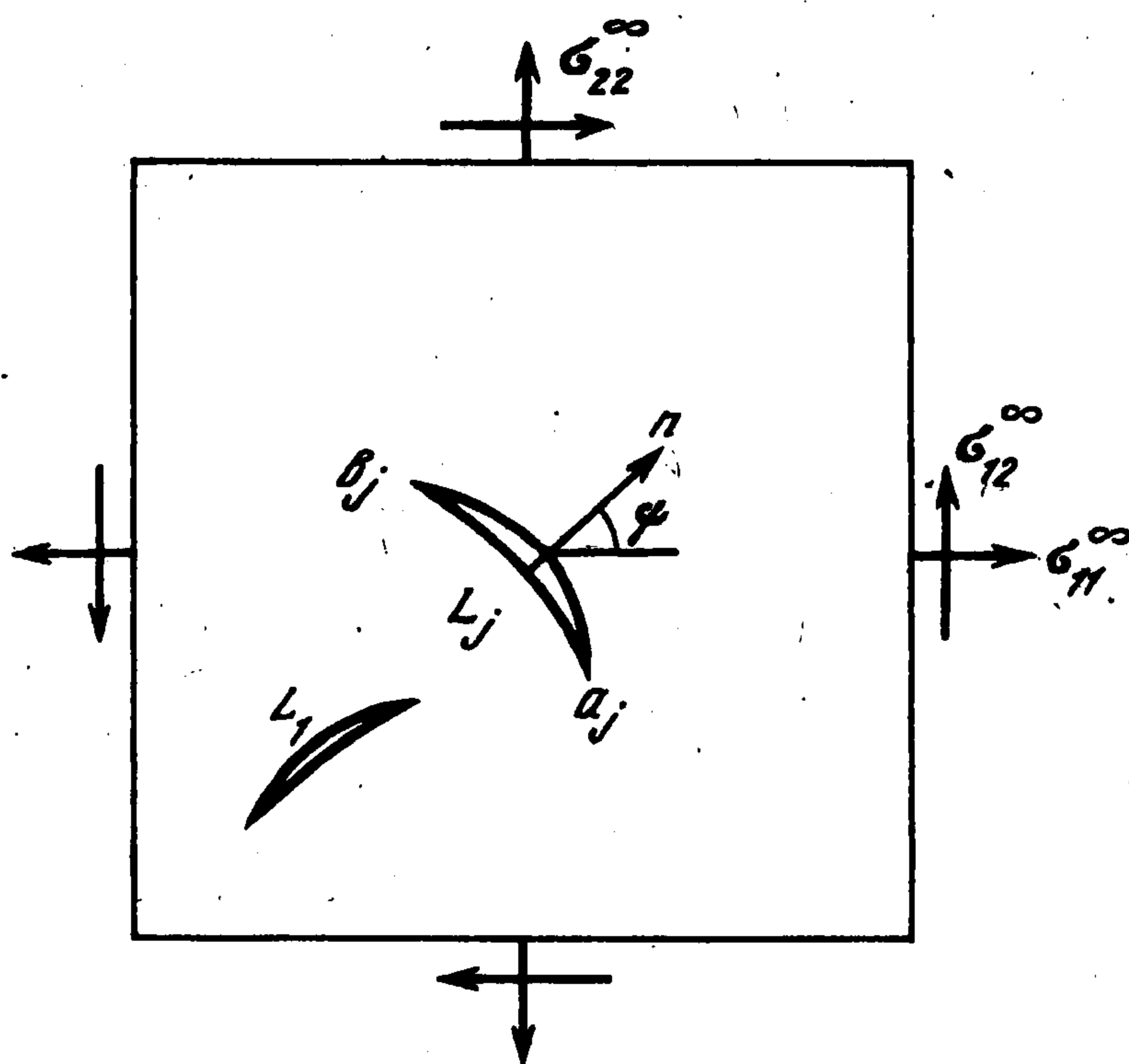
$$\Psi_k(z) = \int_L q_k(\zeta) K_0(\lambda_k r) ds + \int_L \left( p_k(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0(\lambda_k r) d\zeta + p_k^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0(\lambda_k r) d\bar{\zeta} \right) \quad (1.4)$$

$$\varphi_m(z) = \int_L q_m^*(\zeta) K_0(\gamma_m r) ds + 2 \operatorname{Re} \int_L R_m(\zeta) K_0(\gamma_m r) d\zeta$$

$$G = r^2 \ln \frac{r}{h}, \quad r = |\zeta - z|, \quad \zeta = \xi_1 + i\xi_2 \in L, \quad \operatorname{Im} q_m^*(\zeta) = 0$$

Функции  $p(\zeta) = \{p_j(\zeta), \zeta \in L_j\}, \dots, R_m(\zeta) = \{R_{mj}(\zeta), \zeta \in L_j\}$  подлежат определению из граничных условий, но сперва их необходимо выразить через скачки перемещений на контурах  $L_j$ .

Разложим все четные компоненты вектора перемещения, тензора напряжения и внешней нагрузки в ряды Фурье вида  $u = \sum u^{(m)} \cos \rho_m x_3$ , а все нечетные компоненты — в ряды вида  $U = \sum U^{(m)} \sin \rho_m x_3$ . При определении по функциям (1.4) коэффициен-



Фиг. 1

тов Фурье  $\sigma_{ij}^{(m)}$  в ядрах интегральных представлений появляются особенности типа  $(\zeta - z)^{-3}$ . Для того чтобы избавиться от них, введем связи между плотностями, фигурирующими в представлениях (1.4)

$$4(1 - 3\sigma) p_*(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^{(0)} p_k(\zeta) + \overline{\alpha_k^{(0)}} \overline{p_k^*(\zeta)})$$

$$\frac{8(-1)^m (\sigma - 1) h^2}{\pi^2 m^2} p(\zeta) - 4i\sigma R_m(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^{(m)} p_k(\zeta) + \overline{\alpha_k^{(m)}} \overline{p_k^*(\zeta)}) \quad (1.5)$$

Граничные условия на  $L$  имеют вид

$$\{\sigma_1^{(m)} - e^{2i\psi} \sigma_2^{(m)}\}^{\pm} = \pm 2e^{i\psi} \{X_1^{(m)} - iX_2^{(m)}\}^{\pm}, \quad m = 0, 1, \dots$$

$$\text{Re}\{e^{i\psi} (\sigma_3^{(m)})^{\pm}\} = \pm (X_3^{(m)})^{\pm}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

$$\sigma_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}, \quad \sigma_3 = \sigma_{13} - i\sigma_{23}$$

Верхний знак относится к левому берегу разреза при движении от вершины  $a_j$  к  $b_j$ ,  $\psi$  — угол между нормалью к левому берегу и осью  $Ox_1$  (фиг. 1).

Условия непрерывности вектора напряжения при переходе через разрез (в этом случае граничные равенства (1.6) достаточно будет выполнить лишь на одном из берегов разреза) и требование существования разрывов вектора перемещения на  $L$  приводят к соотношениям

$$q_m^*(\zeta) = -\frac{[u_3^{(m)}]}{4\pi\sigma h}, \quad q(\zeta) = [4(1 - 3\sigma)]^{-1} \text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(0)} q_k(\zeta)$$

$$p(\zeta) = -\frac{U^{(0)} + iV^{(0)}}{8\pi\sigma h}, \quad U^{(m)} = \frac{d[u_n^{(m)}]}{ds} - \frac{[u_s^{(m)}]}{\rho} \quad (1.7)$$

$$V^{(m)} = \frac{d[u_s^{(m)}]}{ds} + \frac{[u_n^{(m)}]}{\rho}, \quad R_m = \frac{ih(U^{(m)} + iV^{(m)})}{2\sigma\pi^3 m^2}$$

согласно которым плотности  $q_m^*(\zeta)$ ,  $p(\zeta)$ ,  $R_m(\zeta)$  непосредственно выражаются через

скачки перемещений на разрезах, а также к трем парам бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, связывающих остальные плотности со скачками.

Вводя представления

$$q_k(\zeta) = \frac{1}{2\pi h} \sum_{j=1}^{\infty} q_{kj} [u_n^{(j)}] \quad (1.8)$$

$$p_k + p_k^* = \frac{2h}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ q_{kj} \frac{1}{\pi j^2} \left( U^{(j)} - (-1)^j \frac{\sigma-1}{2\sigma} U^{(0)} \right) + \frac{q_{kj}^*}{2\sigma j} U^{(j)} \right\} \quad (1.9)$$

$$p_k - p_k^* = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{h}{\pi \sigma j^2} S_{kj} V^{(j)} + S_{kj}^* \left( \frac{[u_3^{(j)}]}{j} - \frac{(-1)^j h(\sigma-1)}{\pi \sigma j^2} V^{(0)} \right) \right\} \quad (1.10)$$

получаем следующие "стандартные" системы ( $m, j = 1, 2, \dots$ ; суммирование ведется по  $k$  от единицы до бесконечности):

$$\operatorname{Re} \sum \alpha_k^{(m)} q_{kj} = \delta_{mj}, \quad \operatorname{Re} \sum \kappa_k^{(m)} q_{kj} = 0 \quad (1.11)$$

$$\operatorname{Re} \sum \alpha_k^{(m)} q_{kj}^* = 0, \quad \operatorname{Re} \sum \kappa_k^{(m)} q_{kj}^* = -\delta_{mj} \quad (1.12)$$

$$\operatorname{Im} \sum \Lambda_k^{(m)} S_{kj} = -\delta_{mj}, \quad \operatorname{Im} \sum \mu_k^{(m)} S_{kj} = 0 \quad (1.13)$$

$$\operatorname{Im} \sum \Lambda_k^{(m)} S_{kj}^* = 0, \quad \operatorname{Im} \sum \mu_k^{(m)} S_{kj}^* = \delta_{mj} \quad (1.14)$$

где величина  $q_{kj}, q_{kj}^*, S_{kj}, S_{kj}^*$  подлежат определению,  $\delta_{mj}$  – символ Кронекера.

Полученные системы допускают точное решение. Остановимся на уравнениях (1.11). Умножив первую систему построчно на  $\cos \rho_m x_3$ , вторую – на  $\sin \rho_m x_3$  и сворачивая результаты по  $m$ , находим

$$\sum q_{kj} (\alpha_k(x_3) - \alpha_k^{(0)}) = f_j, \quad \sum q_{kj} \kappa_k(x_3) = 0$$

$$f_j = 2 \cos \rho_j x_3, \quad \operatorname{Re} \delta_k > 0 \quad (1.15)$$

Функции  $\alpha_k(x_3), \mu_k(x_3)$  являются решением следующей (несамосопряженной) краевой задачи:

$$\alpha_3''(x_3) + (1 + \sigma) \delta_k^2 \alpha_k(x_3) + \sigma \mu_k'(x_3) = 0$$

$$(1 + \sigma) \mu_k''(x_3) + \delta_k^2 \mu_k(x_3) + \sigma \delta_k^2 \alpha_k'(x_3) = 0 \quad (1.16)$$

$$\alpha_k'(\pm 1) + \mu_k(\pm 1) = 0, \quad (\sigma - 1) \delta_k^2 \alpha_k(\pm 1) + (\sigma + 1) \mu_k'(\pm 1) = 0$$

Используя соотношения (1.16), можно свести функциональные уравнения (1.15) к следующему равносильному виду:

$$\sum q_{kj} Y_k(x_3) = -\frac{4\sigma}{\sigma+1} f_j''(x_3), \quad \sum q_{kj} \delta_k^2 Y_k(x_3) = \frac{8\sigma}{\sigma+1} f_j^{(4)}(x_3) \quad (1.17)$$

Причем  $Y_k$  – решение краевой задачи

$$Y_k^{(4)} + 2\delta_k^2 Y_k'' + \delta_k^4 Y_k = 0, \quad Y_k(\pm 1) = Y_k'(\pm 1) = 0 \quad (1.18)$$

Обобщенное условие ортогональности здесь имеет вид

$$\int_{-1}^1 \{2Y_k' Y_m' - (\delta_k^2 + \delta_m^2) Y_k Y_m\} dx_3 = 0, \quad m \neq k \quad (1.19)$$

Используя уравнения (1.18), (1.19) и схему, развитую в [8], получаем

$$q_{kj} = \frac{2\sigma\delta_k^2}{\sigma+1} \int_{-1}^1 f_j'(x_3) Y_k(x_3) dx_3 / \int_{-1}^1 \{(Y_k')^2 - \delta_k^2 Y_k\} dx_3$$

Вычисляя входящие сюда интегралы, находим окончательно

$$q_{kj} = (-1)^{j+1} \frac{4\pi^2 j^2 \delta_k^2}{(\sigma+1)(l_{kj}\tau_k)^2}, \quad l_{kj} = \delta_k^2 - \rho_j^2 \quad (1.20)$$

Действуя аналогичным образом, находим решения "стандартных" систем (1.12)–(1.14)

$$q_{kj}^* = (-1)^{j+1} \frac{2\pi j}{(l_{kj}\tau_k)^2} \left( \pi^2 j^2 - \frac{3\sigma+1}{\sigma+1} \delta_k^2 \right)$$

$$S_{kj} = i(2\sigma q_{kj} + \pi j q_{kj}^*), \quad S_{kj}^* = i q_{kj} \quad (1.21)$$

Таким образом, разрешимость бесконечных систем уравнений (1.11)–(1.14) установлена. Решения получены в замкнутом виде и определяются формулами (1.20)–(1.21), причем все плотности, фигурирующие в интегральных представлениях (1.4), выражаются через физические величины – скачки "перемещений" на  $L$ .

Формулы (1.9), (1.10) можно существенно упростить, подставив в них значения коэффициентов из (1.20), (1.21) и просуммировав некоторые ряды. Имеем

$$p_k + p_k^* = -\frac{h}{\pi^3 \sigma} \left\{ E_k U^{(0)} + i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{S_{kj}}{j^2} U^{(j)} \right\},$$

$$p_k - p_k^* = -\frac{h}{\sigma\pi^3} \left\{ i E_k V^{(0)} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{S_{kj}}{j^2} V^{(j)} - \frac{i\pi\sigma}{h} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_{kj}}{j} [u_3^{(j)}] \right\}, \quad E_k = \frac{2(\sigma-1)\pi^2}{(\sigma+1)\delta_k^2\tau_k^2} \quad (1.22)$$

Отметим, что представления (1.4) остаются в силе и для второй основной задачи, например при наличии в полости жесткой вставки. Однако в этом последнем случае плотности будут выражаться через скачки вектора напряжения на  $L$ .

**2. Интегральные уравнения краевой задачи (1.6).** Интегральные представления для напряжений  $\sigma_{ij}$  получим вводя в соотношения (1.1)–(1.3) формулы для фигурирующих там функций из (1.4). Раскладывая найденные выражения в ряды Фурье по координате  $x_3$ , определим интегральные представления коэффициентов Фурье  $\sigma_{ij}^{(m)}$ . Удовлетворяя затем граничным условиям (1.6) на одном из берегов  $L$  и учитывая при этом формулы (1.5), (1.7), (1.8) и (1.22), приходим к бесконечной системе одномерных сингулярных интегродифференциальных уравнений первого рода

$$\int_L X^{(0)}(\zeta) g(\zeta, \zeta_0) ds + \dots = \frac{4\pi\sigma}{3\sigma-1} F_0(\zeta_0)$$

$$\int_L \left( \frac{2\sigma}{\pi} X^{(m)}(\zeta) - im(\sigma-1)\omega_3^{(m)}(\zeta) \right) g(\zeta, \zeta_0) ds + \dots = \quad (2.1)$$

$$= 2(\sigma+1) F_m(\zeta_0) + \frac{4(-1)^m(\sigma-1)^2}{3\sigma-1} F_0(\zeta_0)$$

$$\int_L \left( \frac{h}{\pi} \frac{d\omega_3^{(m)}}{ds} - m\omega_4^{(m)} \right) g(\zeta, \zeta_0) ds + \dots = 4F_m^*(\zeta_0), \quad m = 1, 2, \dots$$

Здесь

$$\mu F_0(\zeta) = N^{(0)} - iT^{(0)} - \frac{1}{2} \{ \sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^* - e^{2i\psi} (\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} + 2i\sigma_{12}^{\infty}) \}$$

$$\mu F_m(\zeta) = N^{(m)} - iT^{(m)}, \quad 2\mu F_m^*(\zeta) = X_3^{(m)}, \quad N^{(m)} - iT^{(m)} = e^{i\psi} (X_1^{(m)} - iX_2^{(m)})$$

$$X^{(m)}(\zeta) = U^{(m)} - iV^{(m)}, \quad U^{(m)} = \omega_1^{(m)}(\zeta), \quad V^{(m)} = \omega_2^{(m)}(\zeta), \quad m = 0, 1, \dots$$

$$h\omega_3^{(m)}(\zeta) = [u_3^{(m)}], \quad h\omega_4^{(m)}(\zeta) = [u_s^{(m)}], \quad g(\zeta, \zeta_0) = \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi}}{\zeta - \zeta_0}$$

В выражениях (2.1) не выписаны члены с регулярными ядрами. Структура системы такова, что все неизвестные "завязаны" в ее регулярной части, характеристическая же часть системы при каждом фиксированном  $m = 1, 2, \dots$  содержит ровно три функции  $[u_n^{(m)}]$ ,  $[u_s^{(m)}]$ ,  $[u_3^{(m)}]$ , а при  $m = 0$  — две функции  $[u_n^{(0)}]$  и  $[u_s^{(0)}]$ .

Скачки перемещений в вершинах дуг  $L_j$  обращаются в нуль, поэтому систему уравнений (2.1) необходимо рассматривать совместно с дополнительными условиями

$$\int_{L_j} (U^{(m)} + iV^{(m)}) d\zeta = 0, \quad \int_{L_j} d[u_3^{(m)}] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, m = 0, 1, \dots \quad (2.2)$$

и разыскивать функции  $U^{(m)}$ ,  $V^{(m)}$  и  $d[u_3^{(m)}]/ds$  в классе  $h_0$  [9].

Рассмотрим сингулярную часть системы (2.1) несколько подробнее. Для простоты предположим, что контур  $L$  представляет собой отрезок  $x_2 = 0$ ,  $-l \leq x_1 \leq l$ . Тогда имеем уравнения:

при  $m = 0$

$$\int_{-l}^l \frac{d[u_2^{(0)} + iu_1^{(0)}]}{x - x_0} = N_0(x_0), \quad -l < x_0 < l \quad (2.3)$$

при  $m = 1, 2, \dots$

$$\int_{-l}^l \frac{d[u_2^{(m)}]}{x - x_0} = N_m(x_0), \quad -l < x_0 < l \quad (2.4)$$

$$\int_{-l}^l y_{im}(x) \frac{dx}{x - x_0} = N_{im}(x_0), \quad i = 1, 2 \quad (2.5)$$

Здесь

$$y_{1m}(x) = \frac{d}{dx} [u_1^{(m)}] + \alpha_m [u_3^{(m)}], \quad \alpha_m = \frac{\sigma - 1}{2\sigma} \gamma_m$$

$$y_{2m}(x) = \frac{d}{dx} [u_3^{(m)}] - \gamma_m [u_1^{(m)}]$$

Функции  $N_m(x)$ ,  $N_{im}(x)$  — известны.

Уравнения (2.3), (2.4) разрешимы, их решения фиксируются дополнительными условиями типа (2.2). Оставшуюся систему (2.5) заменой

$$\omega_{1m} = \frac{d}{dx} [u_1^{(m)}], \quad \omega_{2m} = \frac{d}{dx} [u_3^{(m)}]$$

приводим к стандартному виду [9, 10]

$$\int_{-l}^l \frac{\omega_{1m} dx}{x - x_0} + \alpha_m \int_{-l}^l \omega_{2m} \ln \left| \frac{l - x_0}{x - x_0} \right| dx = N_{1m}(x_0), \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\int_{-l}^l \frac{\omega_{2m} dx}{x-x_0} - \gamma_m \int_{-l}^l \omega_{1m} \ln \left| \frac{l-x_0}{x-x_0} \right| dx = N_{2m}(x_0)$$

где во вторых слагаемых ядра уже регулярны. Таким образом, характеристическая часть системы (2.1) разрешима в классе  $h_0$  при любом фиксированном  $m = 0, 1, \dots$

**3. Коэффициенты интенсивности напряжений.** Введем параметризацию контура  $L_j$  (ниже индекс  $j$  опускаем)  $\zeta = \zeta(\delta)$ ,  $\zeta_0 = \zeta(\delta_0)$ ,  $-1 \leq \delta, \delta_0 \leq 1$ . Соответственно этому положим

$$\omega_p^{(m)}(\zeta) = \frac{\Omega_p^{(m)}(\delta)}{s'(\delta) \sqrt{1-\delta^2}}, \quad p=1,2; \quad m=0,1,\dots$$

$$\frac{d\omega_3^{(m)}}{ds} = \frac{\Omega_3^{(m)}(\delta)}{s'(\delta) \sqrt{1-\delta^2}}, \quad s'(\delta) = \frac{ds}{d\delta} > 0 \quad (\Omega_p^{(m)}(\delta) \in H[-1,1])$$

Используя эти выражения, соотношения (1.7), (1.8), (1.12), связывающие плотности в интегральных представлениях (1.4) со скачками перемещений, а также формулы (1.1)–(1.3), находим в результате детального асимптотического анализа интегральных представлений для напряжений

$$K_I - iK_{II} = -\frac{\mu\sigma}{\sigma+1} \sqrt{\frac{\pi}{s'(\mp 1)}} \sum_{m=0}^{\infty} (\Omega_1^{(m)}(\mp 1) - i\Omega_2^{(m)}(\mp 1)) \cos m\pi x_3$$

$$K_{III} = -\frac{\mu h}{2} \sqrt{\frac{\pi}{s'(\mp 1)}} \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_3^{(m)}(\mp 1) \sin m\pi x_3$$

$$K_I = \sqrt{2\pi r} \sigma_n, \quad K_{II} = \sqrt{2\pi r} \sigma_{ns}, \quad K_{III} = \sqrt{2\pi r} \sigma_{n3} \quad (r \rightarrow 0)$$

Здесь  $\sigma_n$ ,  $\sigma_{ns}$  и  $\sigma_{n3}$  – нормальное и касательные напряжения на площадке за вершиной трещины, верхний знак соответствует началу трещины  $a$  нижний – концу  $b$  (фиг. 1).

Таким образом, коэффициенты интенсивности напряжений естественным образом выражаются через функции

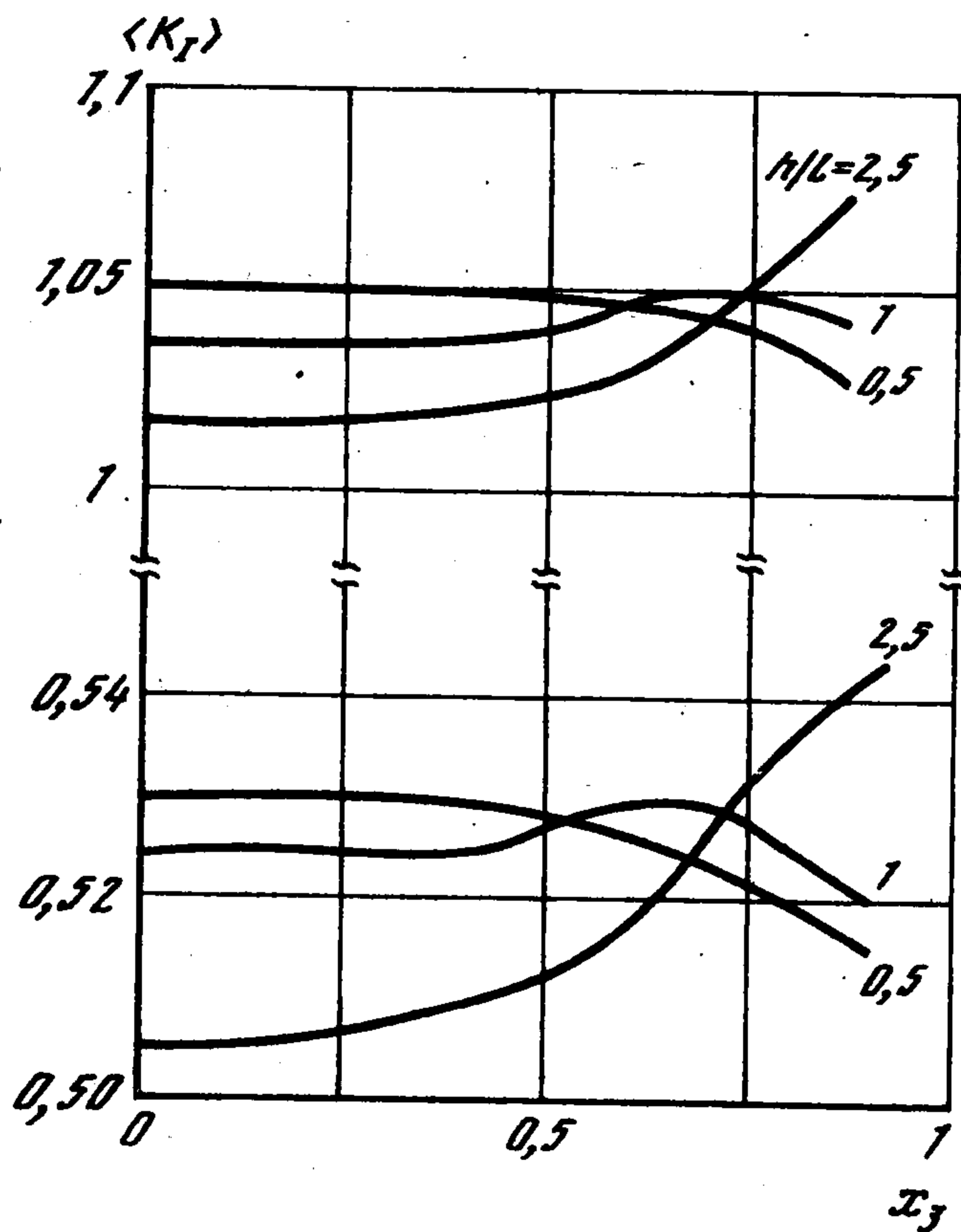
$$U = \frac{d}{ds} [u_n(\zeta, x_3)] - \frac{1}{\rho} [u_s(\zeta, x_3)], \quad \frac{d}{ds} [u_3(\zeta, x_3)]$$

$$V = \frac{d}{ds} [u_s(\zeta, x_3)] + \frac{1}{\rho} [u_n(\zeta, x_3)], \quad (\zeta = a_j \vee b_j, x_3 \in [-1, 1])$$

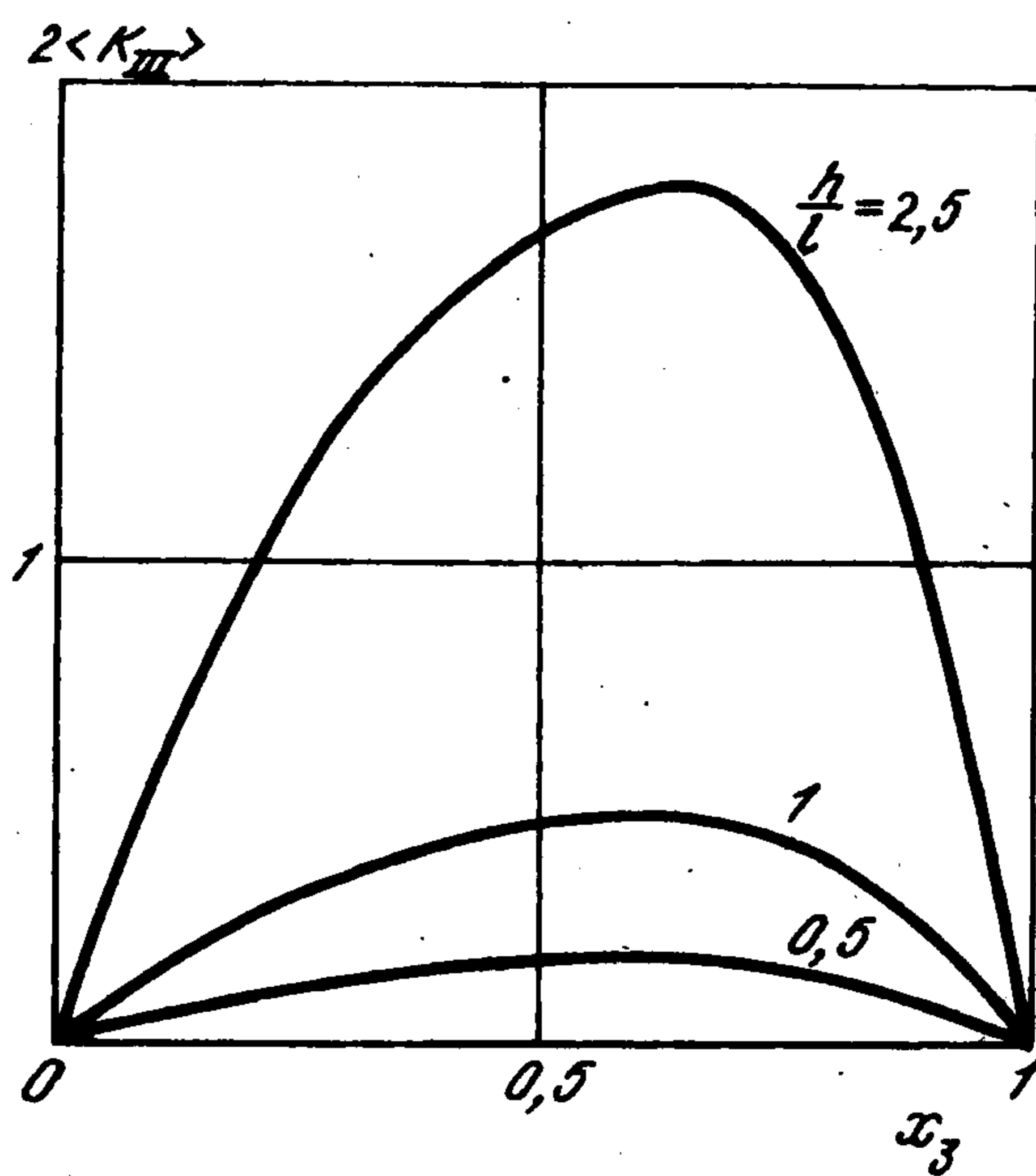
**4. Некоторые численные результаты.** В качестве примера рассмотрим слой, ослабленный туннельным параболическим разрезом  $\xi_1 = p_1\delta$ ,  $\xi_2 = p_2\delta^2$  ( $-1 \leq \delta \leq 1$ ) при действии однородного поля  $\sigma_{ij}^{\infty}$ . На поверхностях разреза допускается нагрузка  $X_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ).

При численной реализации алгоритма система интегральных уравнений (2.1) методом механических квадратур [11] сводилась к линейной системе алгебраических уравнений, которая затем решалась методом редукции. Приближению с номером  $N$  отвечает удержание в системе первых  $3N + 2$  вещественных уравнений и соответственно  $3N + 2$  неизвестных  $[u_1^{(0)}]$ ,  $[u_2^{(0)}]$ ,  $[u_1^{(m)}]$ ,  $[u_2^{(m)}]$ ,  $[u_3^{(m)}]$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ). В нулевом приближении удерживается два интегральных уравнения и, соответственно, две плотности  $[u_1^{(0)}]$ ,  $[u_2^{(0)}]$ . Расчеты проводились при  $N = 0, 1, 2, 3, 4$ , причем, третье приближение практически не уточняло результатов для величин  $K_I, K_{II}$  в интервале  $|x_3| < 0,9$ . Для величины  $K_{III}$  наблюдалась еще более быстрая сходимость в интервале  $|x_3| \leq 1$ .

Пусть  $\sigma_{22}^{\infty} \neq 0$ ,  $\sigma_{11}^{\infty} = \sigma_{12}^{\infty} = X_n = 0$  ( $n = 1, 2, 3$ ). На фиг. 2 приведены эпюры распределения относительного коэффициента интенсивности напряжений  $\langle K_I \rangle = K_I / (\sigma_{22}^{\infty} \sqrt{\pi l})$  по толщинной



Фиг. 2



Фиг. 3

координате для различных  $p_2$  и  $h/l$  ( $2l$  – длина трещины). Верхние три графика отвечают прямой трещине ( $p_2 = 0$ ), нижние – параболической ( $p_2 = 0,5$ ). При  $p_2 = 1$  эти три кривые весьма близки друг к другу и к отметке  $\langle K_I \rangle = 0,2$ . Здесь и ниже в расчетах принималось  $p_1 = 1, \nu = 0,3$ .

Пусть теперь  $\sigma_{12}^{\infty} \neq 0, \sigma_{11}^{\infty} = \sigma_{22}^{\infty} = X_n = 0$ . Отметим, что в этом случае величина  $\langle K_{II} \rangle$  практически не зависит от координаты  $x_3$ . Значения  $\langle K_{II} \rangle$  для прямой трещины при  $h/l = 2,5$  и  $h/l = 1$  изменяются в пределах от 1,020 до 1,013 и от 1,030 до 1,024 соответственно. Для параболической трещины значения  $\langle K_{II} \rangle$  при  $h/l = 0,5; 1; 2,5$  приблизительно равны. Для  $p_2 = 0,5$  имеем  $0,47 < \langle K_{II} \rangle < 0,48$ , для  $p_2 = 1, 0,08 < \langle K_{II} \rangle < 0,10$ .

Рассмотрим еще случай, когда  $\sigma_{ij}^{\infty} = 0$ , а на поверхности прямой трещины действуют сдвигающие усилия  $X_3 = X_3^{(1)} \sin \pi x_3, X_1 = X_2 = 0$ . Эпюры величины  $\langle K_{III} \rangle = K_{III} (X_3^{(1)} \sqrt{\pi l})^{-1}$  изображены на фиг. 3.

Предлагаемая в этой статье процедура решения первой каревой задачи теории упругости для слоя со сквозными туннельными разрезами без всяких принципиальных изменений может быть применена для решения второй краевой задачи, например для слоя с жесткими тонкими криволинейными вставками. Она может быть обобщена также на случай многосвязного конечного цилиндра, содержащего как трещины, так и полости – отверстия.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аксентян О.К., Ворович И.И. Напряженное состояние плиты малой толщины // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1057–1074.
2. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Точное решение задачи Кирша // Прикл. механика. 1970. Т. 6. № 5. С. 10–17.
3. Yamamoto J., Sumi Y. Stress intensity factors for three-dimensional cracks // Intern. J. Fract. 1978. V. 14. № 1. P. 17–38.
4. Rao M.N.B. Three-dimensional stress problem of a finite thick plate with a through-crack under tension // Advances Fracture Research: Proc. 6th Intern. Conf. Fract. New Delhi, 1984 Oxford, etc.: Pergamon Press, 1984. V. 2. P. 963–970.

5. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные пластины, Киев: Наук. думка, 1978. 239.
6. Villarreal G., Sih G.C., Hartranft R.J. Photoelastic investigation of a thick plate with a transverse crack // Trans. ASME. J. Appl. mech. 1975. V. 42. № 1. P. 9–14.
7. Лурье А.И. К теории толстых плит // ПММ. 1942. Т. 6. Вып. 2/3. С. 151–168.
8. Гринберг Г.А. О методе, предложенном П.Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 2. С. 211–228.
9. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
10. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.
11. Erdogan F., Gupta G.D. On the numerical solution of singular integral equations // Quart. Appl. Math. 1972. V. 29. № 4. P. 525–534.

Сумы

Поступила в редакцию  
12.IV.1994