ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 59, Вып. 5, 1995

УДК 539.3

© 1995 г. Н.В. Генералова, Е.В. Коваленко

О ДЕЙСТВИИ ПОЛОСОВОГО ШТАМПА НА ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОЕ ОСНОВАНИЕ, УСИЛЕННОЕ ТОНКИМ ПОКРЫТИЕМ

Развиваются методы решения одного класса интегральных уравнений типа свертки на конечном интервале, встречающегося при изучении многих смешанных задач механики сплошных сред и математической физики. В частности, к уравнению такого рода сводится контактная задача теории упругости о передаче давления от полосового в плане штампа на линейно-деформируемое основание через накладку Мелана. Конечные результаты даны в виде аналитических формул, удобных при проведении конкретных расчетов, с выделенными особенностями на линиях смены граничных условий.

1. Рассмотрим комбинированное линейно-деформируемое основание, представляющее собой упругий (G_2 – модуль сдвига, ν_2 – коэффициент Пуассона) слой ($|x| < \infty$, $|y| < \infty$, $-H \leqslant z \leqslant 0$), армированный по верхней грани тонким упругим (G_1, ν_1) покрытием толщины h. Слой либо лежит без трения на недеформируемой подложке (случай 1), либо сцеплен с ней (случай 2). Пусть в границу $z = h$, $|x| < \infty$, $|y| < \infty$ такой составной среды вдавливается силой $P(y)$, отнесенной к единице длины и приложенной с эксцентриситетом b, жесткий полосовой в плане штамп, форма подошвы которого описывается функцией $z = g(x, y)$, а область контакта определяется неравенствами $|x| \leqslant a$, $|y| < \infty$. Предполагается, что силы трения между штампом и основанием отсутствуют, а вне штампа его поверхность не нагружена.

Допустим, что параметр $n = \theta_1\theta_2^{-1} \gg 1$ ($\theta_j = G_j(1-\nu_j)^{-1}$, $j = 1, 2$), но $n\lambda \sim 1$, где $\lambda = ha^{-1} \ll 1$. Тогда [1] физико-механические свойства покрытия можно моделировать двумерным аналогом уравнений накладки Мелана

$$2(\sigma^+ - \sigma^-) + h(\tau^-_{x,x} + \tau^-_{y,y}) = 0$$

$$4G_1 h\Delta(u_{1,x} + \upsilon_{1,y}) = 2(1-\nu_1)(\tau^-_{x,x} + \tau^-_{y,y}) - \nu_1 h\Delta(\sigma^+ + \sigma^-)$$

$$G_1 h\Delta(u_{1,y} - \upsilon_{1,x}) = \tau^-_{x,y} - \tau^-_{y,x}$$

Здесь Δ – двумерный оператор Лапласа, u_1 и υ_1 – компоненты вектора перемещений точек покрытия $\sigma_z = \sigma^\pm$, $\tau_{xz} = \tau^-_x$, $\tau_{yz} = \tau^-_y$ – заданные внешние напряжения, приложенные соответственно к нижней (знак минус) и верхней (знак плюс) граням покрытия.

Ограничимся далее исследованием важного частного случая поставленной задачи. Предположим, что функции $g(x, y)$ и $P(y)$ можно разложить в ряд или интеграл Фурье по y. Тогда достаточно рассмотреть $g(x, y) = g(x)e^{-i\beta y}$, $P(y) = Pe^{-i\beta y}$ и составить суперпозицию решений, полученных при различных значениях параметра β. Кроме того, следует считать $c = a|\beta| \leqslant D < \infty$, где $D\lambda \ll 1$ (D = const). Последнее неравенство является "условием применимости теории тонких пластин" [2] и указывает, что внешняя нагрузка плавно распределена по поверхности покрытия $z = h$. Случай $\beta = 0$ исследован [3], поэтому исключим его из рассмотрения.

Используя результаты [3, 4], получим интегральное уравнение относительно неизвестной под штампом амплитуды $\sigma(x)$ контактного давления $\sigma_z(x, y, h) = -\sigma(x)e^{-i\beta y}$. С учетом обозначений ($(\delta + \theta x)e^{-i\beta y}$ – жесткое перемещение штампа под действием приложенных к нему силы $Pe^{-i\beta y}$ и момента $Pbe^{-i\beta y}$)

$$\xi' = \xi a^{-1}, \quad x' = xa^{-1}, \quad \Lambda = Ha^{-1}, \quad q(x') = (\varepsilon\theta_2)^{-1}\sigma(x)$$

$$f(x') = \delta a^{-1} + \theta x' - g(x)a^{-1}, \quad \varepsilon_j = (1-2\nu_j)[2(1-\nu_j)]^{-1}$$

$$\mu_1 = n\lambda\Lambda^{-1}, \quad \mu_2 = 8\mu_1(1+\kappa_2)^{-2}, \quad \kappa_2 = 3-4\nu_2$$

$$\varepsilon = (1-\varepsilon_2^2)^{-1}, \quad P' = (\varepsilon\theta_2 a)^{-1}P, \quad M = P'ba^{-1}$$

(штрих далее опустим), запишем его в форме

$$\mathbf{F}q = f \quad (|x| \leq 1) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{F}q = \int_{-1}^{1} q(\xi)k\left(\frac{\xi - x}{\Lambda}\right)d\xi, \quad k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha)e^{i\alpha t}d\alpha \tag{1.2}$$

где

$$K(\alpha) = \frac{\varepsilon}{u}\times\begin{cases} \dfrac{\Psi_- + \mu_2 u\Gamma_-}{\mathrm{sh}\,2u + 2u + 2\mu_1 u\Psi_+} & \text{(случай 1)} \\ \dfrac{2\Gamma_- + 4\mu_2 u(\kappa_2^2\,\mathrm{sh}^2 u - u^2)}{2\kappa_2\Psi_- + (1+\kappa_2)^2 + 4u^2 + 4\mu_1 u\Gamma_+} & \text{(случай 2)} \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\Psi_\pm = \mathrm{ch}\,2u \pm 1, \quad \Gamma_\pm = \kappa_2\,\mathrm{sh}\,2u \pm 2u, \quad u = \sqrt{\alpha^2 + \eta^2}, \quad \eta = c\Lambda$$

Если при постановке задачи в качестве основания рассматривать упругое полупространство, то придем к интегральному уравнению (1.1), (1.2), в котором $\Lambda = 2\lambda n$ и

$$K(\alpha) = \frac{u + \varepsilon}{u(u+1)} \tag{1.4}$$

К уравнению (1.1), (1.2) нужно добавить условия статики

$$P = \int_{-1}^{1} q(x)dx, \quad M = \int_{-1}^{1} xq(x)dx \tag{1.5}$$

выражающие равновесие штампа на основании.

Заметим, что структура решения интегрального уравнения (1.1), (1.2) и его свойства определяются главным образом поведением символа ядра (1.3), (1.4) на действительной оси. Ниже предположим, что $K(\alpha)$ – вещественная, четная, непрерывная и положительная при $|\alpha| < \infty$ функция, имеющая следующую асимптотику:

$$\begin{aligned} &K(\alpha) = A + B\alpha^2 + O(\alpha^4) \quad (\alpha \to 0) \\ &K(\alpha) = |\alpha|^{-1}[1 + C|\alpha|^{-1} + O(\alpha^{-2})] \quad (|\alpha| \to \infty) \end{aligned} \tag{1.6}$$

(В асимптотических формулах (1.7) статьи [3] обнаружена неточность. Их следует заменить приведеными здесь выражениями (1.6)).

В рамки указанного варианта укладывается поставленная контактная задача о передаче давления на линейно-деформируемое основание через накладку. Символы $K(\alpha)$ вида (1.3) и (1.4) удовлетворяют условиям (1.6), в которых, например, для случая

(1.4) нужно положить

$$A=\frac{\varepsilon+\eta}{\eta(1+\eta)},\quad B=-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon+2\eta\varepsilon+\eta^2}{\eta^3(1+\eta)^2},\quad C=\varepsilon-1 \tag{1.7}$$

На основании (1.6) доказано [5], что если $f(x)\in H_1^r(-1, 1)$ $(0 < r \leqslant 1)$, интегральное уравнение (1.1), (1.2) однозначно разрешимо в пространстве $L_p(-1, 1)$ функций, суммируемых на отрезке $[-1, 1]$ со степенью p $(1 < p < 2)$, и его решение $q(x)$ представимо в форме

$$q(x)=(1-x^2)^{-1/2}\omega(x) \tag{1.8}$$
$$\omega(x)\in H_0^s(-1,1),\quad s=\inf(r,(p-1)/p)$$

При этом имеют место соотношения корректности

$$\|q\|_{L_p}\leqslant D_1(\Lambda)\|f\|_{H_1^r},\quad \|\omega\|_{H_0^s}\leqslant D_2(\Lambda)\|f\|_{H_1^r} \tag{1.9}$$

Здесь $D_1(\Lambda)$ и $D_2(\Lambda)$ – ограниченные при любом фиксированном $\Lambda\in(0,\infty)$ постоянные, а $H_m^\gamma(-1, 1)$ – пространство функций, m-я производная которых удовлетворяет при $|x|\leqslant 1$ условию Гельдера с показателем γ.

2. Для построения решения интегрального уравнения (1.1), (1.2) с символом ядра (1.6) воспользуемся модификацией проекционного метода Галеркина [6, 7]. Введем в рассмотрение гильбертовы пространства $H_{-1/2}(-1,1)$ и $L_2(-1, 1)$ и зададим в них две полные системы координатных (базисных) функций

$$\{\varphi_m(x)\},\ \{\psi_m(x)\}\quad (m=0,1,2...) \tag{2.1}$$

линейные оболочки которых – предельно плотные последовательности подпространств.

Пространство $H_{-1/2}(-1,1)$ определено в [5, 7] так замыкание $L_p(-1, 1)$ $(1 < p < 2)$ по норме

$$\|\varphi\|^2_{H_{-1/2}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(\alpha)|\Phi(\alpha)|^2d\alpha,\quad \Phi(\alpha)=\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)e^{i\alpha\xi/\Lambda}d\xi$$

Поскольку, согласно формуле (1.8), решение $q(x)$ имеет корневую особенность в точках $x = \pm1$, то в первом случае следует воспользоваться системой функций, несущей особенность заданного типа. Во второй системе особенность вводить не следует, так как правая часть уравнения (1.1) $f(x)$ и невязка $z_N(x)$ (см. ниже) – гладкие функции.

Приближенное решение представим в форме

$$q_N(x)=\sum_{m=0}^{N}a_m\varphi_m(x) \tag{2.2}$$

где коэффициент a_m определяются из условия ортогональности $z_N=\mathbf{F}q_N-f$ элементам второй координатной последовательности

$$(z_N,\psi_j)_{L_2}=0\quad (j=0,1,2,...,N) \tag{2.3}$$

Соотношения (2.3) приводит к системе линейных алгебраических уравнений $(N+1)$-го порядка относительно неизвестных a_m

$$\sum_{m=0}^{N}c_{jm}a_m=b_j\quad (j=0,1,2,...,N) \tag{2.4}$$

$$c_{jm}=(\mathbf{F}\varphi_m,\psi_j)_{L_2},\quad b_j=(f,\psi_j)_{L_2}$$

которя, как можно показать [7] на основании корректной разрешимости интегрального уравнения (1.1), (1.2), (1.6) в $L_p(-1, 1)$ $(1 < p < 2)$, имеет невырожденную матрицу. Кроме того, в силу (1.9) и свойств координатных функций, изложенных выше, запишем

$$\|q-q_N\|_{L_p}\leqslant C_1(\Lambda)\|q-q_N\|_{H_{-1/2}}\leqslant C_2(\Lambda)\|z_N\|_{H_1^r}\leqslant C_3(\Lambda)\|z_N\|_{L_2}\to 0\ (N\to\infty)$$

($C_1(\Lambda)$, $C_2(\Lambda)$, $C_3(\Lambda)$ – постоянные), что говорит о применимости метода Галеркина для решения исходного интегрального уравнения при всех значениях параметра $\Lambda\in(0,\infty)$.

Возьмем в качестве базисных следующие системы функций ($m = 0, 1, 2,\ldots$):

$$\left\{\frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right\},\quad \{P_m^*(x)\},\quad P_m^*(x)=\sqrt{\frac{2m+1}{2}}P_m(x)$$

где $T_m(x)$ и $P_m(x)$ – полиномы Чебышева и Лежандра. Принимая во внимание значения интегралов [8] ($J_\nu(x)$ – функции Бессел)

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}e^{\pm i\alpha x}dx=\pi e^{\pm\pi mi/2}J_m(\alpha)$$

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)e^{\pm i\alpha x}dx=\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}e^{\pm\pi mi/2}J_{m+1/2}(\alpha)$$

представим элементы матрицы системы (2.4) в форме

$$c_{jm}=\sqrt{\pi\Lambda(2j+1)}\cos\frac{\pi(m-j)}{2}\int_0^\infty\frac{K(\alpha)}{\sqrt{\alpha}}\zeta_{jm}\left(\frac{\alpha}{\Lambda}\right)d\alpha$$
$$\zeta_{jm}(x)=J_{j+1/2}(x)J_m(x)\tag{2.5}$$

Если в качестве координатных функций взять сплайны

$$\varphi_m(x)=\frac{\psi_m(x)}{\sqrt{1-x^2}},\quad \psi_m(x)=\psi\left(\frac{x-x_m}{r}\right)\quad(m=0,1,2,\ldots,N)$$
$$\psi(x)\begin{cases}1-|x| & (|x|<1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}\tag{2.6}$$

то придем к вариационно-разностному методу [7] решения интегрального уравнения (1.1), (1.2), (1.6). Здесь узлы $x_m = -1 + r(2m + 1)/2$ ($m = 0, 1, 2,\ldots, N$) покрывают отрезок $[-1, 1]$ с шагом $r = 2(N + 1)^{-1}$.

Внося функции (2.6) во вторую и третью формулы (2.4) и используя приближенное значение квадратуры при $r\to 0$ [8]

$$\int_{-1}^{1}\frac{\psi(x)e^{-i\alpha x}dx}{\sqrt{|1-(rx+x_m)^2|}}\approx\frac{2}{\sqrt{1-x_m^2}}\int_0^1\psi(x)\cos\alpha x dx=\frac{2(1-\cos\alpha)}{\alpha^2\sqrt{1-x_m^2}}$$

будем иметь

$$c_{jm}=c_{mj}=\frac{4r\Lambda}{\pi\sqrt{1-x_m^2}}\int_0^\infty K\left(\frac{\Lambda}{r}\alpha\right)\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\alpha^4}\cos\left(\alpha\frac{x_m-x_j}{r}\right)d\alpha$$
$$b_j=\int_{x_j-r}^{x_j+r}f(x)\psi\left(\frac{x-x_j}{r}\right)dx\approx rf(x_j)\tag{2.7}$$

В последнем соотношении (2.7) учтена δ-образность системы координатных функций $\psi_m(x)$.

Ключевым моментом используемых вариантов проекционного метода Галеркина является вычисление интегралов от быстро осциллирующих функций в (2.5) и (2.7). Преодолеть эту трудность помогает алгоритм [9], который, например, для квадратуры в формуле (2.5) дает

$$\int_0^\infty \frac{K(\alpha)}{\sqrt{\alpha}}\zeta_{jm}\left(\frac{\alpha}{\Lambda}\right)d\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\alpha_n}K(\alpha_n)\left[S_{jm}\left(\frac{e_n}{\Lambda}\right)-S_{jm}\left(\frac{c_n}{\Lambda}\right)\right]$$

$$c_n=nl,\quad e_n=(1+n)l,\quad \alpha_n=(c_n+e_n)/2$$

$$S_{jm}(x)=-\frac{x[\zeta_{j,m+1}(x)-\zeta_{j+1,m}(x)]}{m^2-(j+½)^2}+\frac{\zeta_{jm}(x)}{m+j+½}$$

Здесь l – достаточно малое число, характеризующее расстояние между узлами c_n и e_n.

Построив функцию $q_N(x)$ согласно (2.2), нейдем затем амплитудные значения силы P и момента M, приложенных к штампу. Для первой и второй систем координатных функций они соответственно примут вид

$$P=\pi a_0,\quad r\sum_{j=0}^{N}\frac{a_j}{\sqrt{1-x_j^2}};\quad M=\frac{\pi}{2}a_1,\quad r\sum_{j=0}^{N}\frac{x_j a_j}{\sqrt{1-x_j^2}}$$

Выше было отмечено, что предложенный метод Галеркина работает при всех значениях параметра $\Lambda\in(0,\infty)$. Однако при $\Lambda\to 0$, как показывает численный анализ конкретных задач, эффективность его падает за счет существенного увеличения числа уравнений в системе (2.4) для получения приближенного решения (2.2) с заданной точностью. Поэтому приведем алгоритм исследования интегрального уравнения (1.1), (1.2), (1.6), который рационально использовать при малых значениях Λ.

Принимая в расчет известный [10] результат М.Г. Крейна, ограничимся рассмотрением случая $f(x)\equiv f=\text{const}$. Тогда главный член асимптотики решения исходного интегрального уравнения можно представить в форме [5]

$$q(x)=\frac{f}{\Lambda}\left[\chi\left(\frac{1+x}{\Lambda}\right)+\chi\left(\frac{1-x}{\Lambda}\right)-\upsilon\left(\frac{x}{\Lambda}\right)\right] \tag{2.8}$$

где функции $\chi(t)$ и $\upsilon(t)$ определяются из интегральных уравнений

$$\int_0^\infty \chi(\tau)k(\tau-t)d\tau=1\quad (0\leqslant t<\infty) \tag{2.9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \upsilon(\tau)k(\tau-t)d\tau=1\quad (|t|<\infty) \tag{2.10}$$

Решение уравнения (2.10) строится при помощи теоремы о свертке для преобразования Фурье и имеет вид

$$\upsilon(x\Lambda^{-1})=A^{-1} \tag{2.11}$$

Решение уравнения (2.9) можно получить методом Винера–Хопфа, при использовании которого следует приблизить символ ядра $K(\alpha)$, в соответствии с формулами (1.6), выражением

$$K_*(\alpha)=\frac{\sqrt{\alpha^2+h_3^2}}{\alpha^2+h_4^2}\exp\left(\frac{h_1}{\sqrt{\alpha^2+h_2^2}}\right),\quad K_*(0)=A \tag{2.12}$$

Опираясь на результаты [5], запишем

$$\chi(t)=\frac{1}{K_-(0)}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{-i\zeta t}d\zeta}{K_+(\zeta)\zeta} \tag{2.13}$$

В (2.13) контур Г – прямая, лежащая чуть выше действительной оси в плоскости комплексного переменного $\zeta=\alpha+i\sigma$, а

$$K_*(\zeta)=K_+(\zeta)K_-(\zeta)$$

причем $K_+(\zeta)$ и $K_-(\zeta)$ регулярны соответственно в верхней $\operatorname{Im}\zeta>-\sigma_+$ и нижней $\operatorname{Im}\zeta<$ $<\sigma_-$ полуплоскостях и не имеют там нулей.

Поскольку техника факторизации функций вида (2.12) известна [3, 11], приведем окончательный результат

$$K_\pm(\zeta)=\frac{\sqrt{\zeta\pm ih_3}}{\zeta\pm ih_4}e^{h_1\mu_\pm(\zeta)},\quad \mu_\pm(\zeta)=\frac{\pm i}{\pi\sqrt{\zeta^2+h_2^2}}\ln\frac{\zeta+\sqrt{\zeta^2+h_2^2}}{\pm ih_2} \tag{2.14}$$

Из равенств (2.12), (2.14) следует

$$K_-(0)=\overline{K_+(0)}=\sqrt{Ai} \tag{2.15}$$

Подставим (2.14), (2.15) в формулу (2.13) и перейдем в последней для удобства от интегрального преобразования Фурье к преобразованию Лапласа–Карсона, положив $\zeta=ip$. Будем иметь

$$\chi(t)=\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{X(p)}{p}e^{pt}dp$$

$$X(p)=\frac{p+h_4}{\sqrt{p+h_3}}e^{-h_1\mu(p)},\quad \mu(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2-h_2^2}}\ln\frac{p+\sqrt{p^2-h_2^2}}{h_2} \tag{2.16}$$

Здесь L – прямая, лежащая чуть правее мнимой оси в плоскости комплексного переменнюго p.

Далее с целью получения практически приемлемых результатов приблизим экспоненту во второй формуле (2.16) выражением [11]

$$\exp[-h_1\mu(p)]\approx 1-h_1\mu(p) \tag{2.17}$$

Отметим, что погрешность аппроксимации (2.17) при $\operatorname{Re}p>0$, $\operatorname{Im}p=0$ не превосходит 1% для найденных ниже значений постоянных h_1 и h_2.

Внося (2.17) в (2.16) и используя таблицы [12], запишем

$$\chi(t)=\frac{1}{\sqrt{A}}\left[\frac{e^{-h_3t}}{\sqrt{\pi t}}+\frac{h_4}{\sqrt{h_3}}\operatorname{erf}\sqrt{h_3t}+I_1(t)\right]$$

$$I_1(t)=-\frac{h_1}{\pi\sqrt{h_3}}\int_0^t \operatorname{erf}\sqrt{h_3(t-\tau)}R_1(\tau)d\tau \tag{2.18}$$

$$R_1(t)=K_0(h_2t)+h_4\left[\frac{\pi}{2h_2}-\int_t^\infty K_0(h_2s)ds\right]$$

где $K_0(x)$ – функция Макдональда.

Интегральную характеристику построенного решения P определим, подставив (2.8) в (1.5). Принимая во внимание соотношения (2.11) и (2.18), будем иметь

$$P=2f\int_0^\kappa \chi(\tau)d\tau-\frac{f\kappa}{A}=\frac{2f}{\sqrt{Ah_3}}[\operatorname{erf}\sqrt{h_3\kappa}+h_4R_2(\kappa)+I_2(\kappa)]-\frac{f\kappa}{A}$$

				$\varepsilon q(x)f^{-1}$				
Λ	$x=0$	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	εPf^{-1}
0 [5, 13]	1,101	1,112	1,151	1,245	1,521	1,974	2,665	2,994
	1,097	1,110	1,147	1,253	1,527	1,966	2,658	2,983
0,25	1,109	1,123	1,159	1,251	1,525	1,988	2,684	3,016
	1,166	1,179	1,219	1,318	1,608	2,086	2,813	3,164
	1,163	1,176	1,219	1,315	1,605	2,089	2,815	3,175
0,5	1,165	1,175	1,215	1,317	1,609	2,091	2,813	3,173
	1,175	1,185	1,226	1,326	1,618	2,098	2,826	3,184
	1,246	1,265	1,305	1,409	1,685	2,170	2,899	3,337
1	1,250	1,268	1,309	1,407	1,694	2,173	2,905	3,342
	1,252	1,264	1,303	1,401	1,687	2,166	2,894	3,335
	1,210	1,221	1,269	1,375	1,680	2,159	2,870	3,286
2	1,213	1,225	1,271	1,373	1,678	2,160	2,873	3,292
	1,203	1,215	1,257	1,360	1,661	2,156	2,865	3,271
4	1,203	1,213	1,261	1,366	1,668	2,149	2,858	3,269
	1,207	1,215	1,260	1,365	1,669	2,150	2,861	3,270
8	1,189	1,201	1,243	1,347	1,649	2,130	2,839	3,235
	1,191	1,203	1,242	1,347	1,645	2,135	2,842	3,239

$$\kappa=\frac{1}{\Lambda},\quad R_2(t)=\frac{2h_3t-1}{2h_3}\operatorname{erf}\sqrt{h_3t}+\sqrt{\frac{t}{\pi h_3}}e^{-h_3t}$$

$$I_2(t)=-\frac{h_1}{\pi}\int_0^t R_2(t-\tau)R_1(\tau)d\tau$$

3. В качестве примера приведем числовые расчеты задачи (1.1), (1.2), (1.4) тремя способами, изложенными в разд. 2, при $f(x)=f=\text{const}$ и различных значениях безразмерного параметра $\Lambda\in(0,\infty)$. Пусть в (1.4) $\nu_2=0{,}3$ ($\varepsilon=1{,}08889$), $c=1$. Подберем в (2.12) постоянные h_j ($j=1,2,3,4$), используя равенства (1.7), соотношения

$$A=\frac{h_3}{h_4^2}\exp\left(\frac{h_1}{h_2}\right),\quad h_3\left(\frac{B}{A}+\frac{h_1}{2h_2^3}\right)=\frac{1}{2h_3}-A\exp\left(-\frac{h_1}{h_2}\right),\quad C=h_1$$

и требование минимума величины $|1-K_*(\alpha)K^{-1}(\alpha)|$ при $|\alpha|<\infty$.

Результаты вычислений даны ниже ($h_1=0{,}08889$ при всех указанных значениях Λ).

Λ	0,25	0,5	1	2
h_2	2,1413	2,4137	0,8193	18007
h_3	0,2024	0,4237	0,9321	1,9478
h_4	0,2219	0,4555	0,9974	1,9937

Заметим, что относительная погрешность аппроксимации (2.12) при данных значениях h_j не превосходит 0,25% на всей действительной оси. Тогда погрешность приближенного решения (2.8), (2.11), (2.18) при учете (2.17) составляет около 1%.

Значения амплитуды безразмерного контактного давления $\varepsilon q(x)f^{-1}$ и амплитуды вдавливающей штамп силы εPf^{-1} занесены в таблицу. В первых строках приведены ниже горизонтальных линий результаты расчетов при помощи первого алгоритма, во вторых – второго, в третьих – третьего.

Данные таблицы позволяют сделать следующие выводы:

1) первый и второй методы рационально использовать для $0{,}5 \leqslant \Lambda < \infty$; при таких значениях параметра Λ число уравнений в системе (2.4) не превышает соответственно 5 и 20, а относительная погрешность результатов составляет менее 2%;

2) метод малых Λ работает при $\Lambda \leqslant 2$;

3) стыковка результатов наблюдается при $0{,}5 \leqslant \Lambda \leqslant 2$;

4) неучет влияния усиливающего покрытия при расчете контактных напряжений в случае $\Lambda = 1$, как показывает сравнение с результатами [5, 13], приводит к погрешности более чем в 14%.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-00181-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коваленко Е.В.* Контактные задачи для тел с покрытиями (постановки и методы решения) // Изв. АН АрмССР. Механика. 1988. Т. 41. № 1. С. 40–50.
2. *Петрашень Г.И.* К теории колебаний тонких пластин // Учен. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. 1951. № 149. Вып. 24. С. 172–249.
3. *Александров В.М., Броновец М.А., Коваленко Е.В.* Плоские контактные задачи для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающем покрытием // Прикл. механика. 1988. Т. 24. № 8. С. 60–67.
4. *Александров В.М., Ромалис Б.Л.* Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.
5. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 329 с.
6. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 455 с.
7. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
8. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
9. *Манжиров А.В., Черныш В.А.* Контактная задача для слоистого неоднородного стареющего цилиндра, подкрепленного жестким кольцом // ПМТФ. 1990. № 6. С. 101–109.
10. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967. 508 с.
11. *Александров В.М.* Контактная задача с учетом износа, вызванного локальным оплавлением // Физ.-хим. механика материалов. 1986. Т. 22. № 1. С. 116–124.
12. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. шк., 1965. 466 с.
13. *Рвачев В.Л., Проценко В.С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наук. думка, 1977. 235 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.IX.1994