

УДК 539.3

© 1995 г. Д.А. Пожарский

О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОГО КЛИНА С НЕИЗВЕСТНОЙ ОБЛАСТЬЮ КОНТАКТА

Исследуется контактная задача о вдавливании эллиптического параболоида в одну грань пространственного упругого клина, другая грань которого свободна от напряжений, без введения ограничений на удаленность штампа от ребра клина и на угол раствора клина. В случае близкого подхода штампа к ребру используется метод нелинейных граничных уравнений типа Гаммерштейна [1, 2], позволяющий одновременно определить нормальные контактные давления и неизвестную область контакта; при этом ядро интегрального уравнения контактной задачи регуляризуется как вне ребра, так и на ребре клина. Полученное решение хорошо согласуется с решением [3], построенным при помощи асимптотического метода "больших λ ", эффективного при достаточной удаленности штампа от ребра клина, когда область контакта можно считать эллипсом, а также с точным решением соответствующей контактной задачи для полупространства [4]. Численный анализ асимметрии пятна контакта, зависимости вдавливающей силы от осадки штампа, эффективных напряжений в точке первоначального контакта при разных углах раствора клина и двух ориентациях эллиптического параболоида относительно ребра выполнен при значениях параметров задачи, указанных одним из авторов монографии [5].

Ранее [6] методом типа конечных элементов изучалась контактная задача для четверти пространства в случае прямоугольной области контакта.

1. Пусть в грань $\varphi = \alpha$ упругого трехмерного клина с углом раствора α (r, φ, z — цилиндрические координаты, ось z совпадает с ребром клина) силой P , приложенной на оси r на расстоянии H от ребра, вдавливается жесткий штамп, поверхность которого — эллиптический параболоид $f(r, z) = (r - a)^2/(2R_1) + z^2/(2R_2)$. Под действием силы P штамп оседает на величину δ и поворачивается на угол γ вокруг прямой $r = a$. Вне зоны контакта грань $\varphi = \alpha$ не нагружена. Силами трения между клином и штампом пренебрегаем. Грань $\varphi = 0$ предполагается свободной от напряжений. При заданных величинах $\delta, \gamma, a, R_1, R_2$ требуется определить область контакта Ω , функцию распределения нормальных контактных напряжений $\sigma_\varphi(r, \alpha, z) = -q(r, z)$ ($(r, z) \in \Omega$), а также величины P и H .

Предположим, что область Ω полностью содержится в прямоугольнике S с центром на оси r и полуосями b и c ($b \geq c$). Интегральное уравнение и неравенство, к которым может быть сведено решение этой задачи, имеют вид [1, 3] (G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона):

$$\theta \int_S K(M, N) q(N) d\Omega_N = g(M); \quad q(M) \geq 0, \quad M \in \Omega \quad (1.1)$$

$$\theta \int_S K(M, N) q(N) d\Omega_N > g(M); \quad q(M) = 0, \quad M \in (S \setminus \Omega)$$

$$M=(r,z), N=(x,y), \theta=(1-\nu)/G, g(r,z)=2\pi(\delta+\gamma(r-a)-f(r,z))$$

$$K(r,z,x,y)=1/R+F(r,z,x,y), R=\sqrt{(r-x)^2+(z-y)^2}$$

$$F(r,z,x,y)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\operatorname{sh}\pi u(W(u)-\operatorname{cth}\pi u)K_{iu}(\beta x)+\right. \\ \left.+\operatorname{sh}\frac{\pi u}{2}[W_+(u)F_+(u,\beta x)-W_-(u)F_-(u,\beta x)]\right\}K_{iu}(\beta r)\cos\beta(z-y)d\beta du \quad (1.2)$$

$$F_\pm(u,\beta x)=(1-2\nu)\int_0^\infty L_\pm(u,y)[F_\pm(y,\beta x)+\operatorname{ch}\frac{\pi y}{2}K_{iy}(\beta x)]dy, \quad 0\leq u<\infty \quad (1.3)$$

$$L_\pm(u,y)=2\operatorname{ch}\frac{\pi u}{2}\operatorname{sh}\frac{\pi y}{2}W_\pm(y)\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}\pi t g_\pm(t)dt}{(\operatorname{ch}\pi t+\operatorname{ch}\pi u)(\operatorname{ch}\pi t+\operatorname{ch}\pi y)}$$

$$W_\pm(u)=\pm\frac{\operatorname{ch}\alpha u\mp\cos\alpha}{\operatorname{sh}\alpha u\pm u\sin\alpha}, \quad W(u)=\frac{W_+(u)-W_-(u)}{2}, \quad g_\pm(t)=\left(\operatorname{cth}\frac{\alpha t}{2}\right)^{\pm 1}\frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{ch}\alpha t\mp\cos 2\alpha}$$

Также предполагается, что существует ограниченная область $S_0 = \{M: g(M) > 0\}$, такая, что $\Omega \subset \bar{S}_0 \subset S$. Введем нелинейные операторы [1, 2]

$$v^+(M) = \sup\{v(M), 0\}, \quad v^-(M) = \inf\{v(M), 0\}$$

и рассмотрим операторное уравнение

$$Tv=0 \quad (M \in S), \quad Tv \equiv \mu v^- + \theta K v^+ - g, \quad \mu = \text{const} \quad (1.4)$$

где $v^\pm = v^\pm(M)$, $g = g(M)$, K – интегральный оператор вида

$$Kv^+ = \int_S K(M,N)v^+(N)dS_N \quad (1.5)$$

Теорема 1. Если $v_* = v_*(M)$ – решение уравнения (1.4), то $(q = q(M) = v_*^+, \Omega = \{M: v_* \geq 0\})$ – решение уравнения (1.1), причем $\Omega \neq \emptyset$ при $S_0 = \emptyset$; обратно, если (q, Ω) – решение уравнения (1.1), то $v_* = \mu^{-1}g + q - \theta\mu^{-1}Kq$, $M \in S$ – решение уравнения (1.4).

Теорема 2. Для существования единственного решения $v_* \in L_2(S)$ уравнения (1.4) необходимо и достаточно, чтобы функция $v_0 = v_0(M)$, служащая решением уравнения $(\varepsilon_* > 0)$

$$\varepsilon_* v^+ + \mu v^- + \theta K v^+ = g \quad (M \in S) \quad (1.6)$$

удовлетворяла условию

$$\|v_0\|_{L_2} \leq C, \quad \varepsilon_* \in (0, \varepsilon_0], \quad \varepsilon_0 = \text{const} > 0$$

где постоянная C не зависит от ε_* .

Уравнение (1.6) имеет решение в силу принципа сжатых отображений при достаточно больших значениях μ [2].

Теорема 3. Пусть $v_1(M)$ и $v_2(M)$ – решение уравнения (1.4) при $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_2$ соответственно ($\mu_1 \neq \mu_2$). Тогда $v_1^+(M) = v_2^+(M)$.

Доказательства этих трех ключевых для метода нелинейных граничных уравнений теорем повторяют доказательства соответствующих теорем из [1]. При этом используется, что интегральный оператор K вида (1.5) вполне непрерывный, самосопряженный, строго положительный, а его ядро $K(M, N)$ обладает слабой особенностью.

Для определения величин P и H к уравнению (1.4) следует присоединить два интегральных уравнения равновесия

$$\int_{\Omega} q(M) d\Omega_M = P, \quad \int_{\Omega} r q(M) d\Omega_M = PH \quad (1.7)$$

При численном решении уравнения (1.4) применим метод М.А. Красносельского [7], суть которого заключается в построении последовательных приближений по формулам

$$v_{n+1} = v_n - (Q'v_n)^{-1} T v_n \quad (1.8)$$

$$v_n = v_n(M), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad v_0 = g$$

где Q – дифференцируемый оператор, хорошо аппроксимирующий оператор T вида (1.4) по равномерной метрике, имеющий вид¹,

$$Qv = \mu(v - Q_1v) + \theta K Q_1v - g$$

$$Q_1v = \begin{cases} 0, & v < -\varepsilon_1 \\ \frac{1}{2}(v - \frac{1}{2}v^2/\varepsilon_1) + \frac{3}{4}\varepsilon_1, & |v| \leq \varepsilon_1 \\ v, & v > \varepsilon_1 > 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

причем выбором постоянной ε_1 можно добиться аппроксимации оператора T с любой наперед заданной точностью.

В силу симметрии задачи по z достаточно рассматривать лишь верхнюю половину прямоугольника S , которую покроем сеткой из m узлов с шагом h_1 по оси r и h_2 по оси z (в расчетах $m = 81$). При вычислении значений функции $K(M, N)$ вида (1.2) в этих узлах ее особенность вне ребра клина сглаживается по формулам

$$1/R \rightarrow 1/R_*, \quad R_* = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y)^2 + \delta_*} \quad (1.10)$$

а на ребре

$$K(0, z, x, y) \rightarrow A_0/R_0, \quad R_0 = \sqrt{x^2 + (z-y)^2 + \delta_*} \quad (1.11)$$

$$A_0 = \pi \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2(\alpha^2 - \sin^2 \alpha)} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi u}{2} \{W_+(u)F_+(u) - W_-(u)F_-(u)\} \times$$

$$\times \cos[u \ln((R_0 + |z-y|)/(x + \sqrt{\delta_*}))] du$$

$$F_{\pm}(u) - (1-2\nu) \int_0^{\infty} L_{\pm}(u, y) F_{\pm}(y) dy = \frac{\pi}{2} (1-2\nu) L_{\pm}(u, 0), \quad 0 \leq u < \infty \quad (1.12)$$

$$L_{\pm}(u, 0) = \pm \pi \frac{1 \mp \cos \alpha}{\alpha \pm \sin \alpha} \operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} \int_0^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi t}{2} \frac{g_{\pm}(t)}{\operatorname{ch} \pi t + \operatorname{ch} \pi u} dt$$

При выводе формул (1.11), (1.12) учтено, что $K_{iu}(0) = \pi \delta(u)$ (δ – функция Дирака). Можно показать, что регуляризирующий параметр δ_* в формулах (1.10)–(1.12) должен быть связан с шагами сетки h_1 и h_2 (в расчетах полагали $\delta_* = h_1 h_2 / 16$).

2. Если прямоугольник S не выходит на ребро клина, то поместим его центр в точку $r = a, z = 0$ и введем следующие безразмерные величины и обозначения:

$$r-a = r'b, \quad x-a = x'b, \quad z = z'b, \quad y = y'b, \quad \delta = \delta'b, \quad H = H'b$$

$$A = b/(2R_1), \quad B = b/(2R_2), \quad \lambda = a/b, \quad \varepsilon = c/b \quad (2.1)$$

$$\theta q(r, z) = 2\pi q'(r', z'), \quad \theta P = 2\pi b^2 P', \quad S' \rightarrow S, \quad \Omega' \rightarrow \Omega$$

¹ Галанов Б.А. Метод нелинейных граничных уравнений в контактных задачах с неизвестными областями контакта. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Киев, 1987. 384 с.

Очевидно, формулы (2.1) имеют место при $\lambda > \varepsilon$, когда прямоугольник S вытянут вдоль оси z ($R_1 \leq R_2$) или $\lambda > 1$, когда он вытянут вдоль оси r ($R_1 \geq R_2$). При $\lambda \leq \varepsilon$ ($R_1 \leq R_2$) или $\lambda \leq 1$ ($R_1 \geq R_2$) будем считать, что одна сторона прямоугольника находится на ребре клина, и примем за его центр точку $r = c, z = 0$ при $R_1 \leq R_2$ или точку $r = b, z = 0$ при $R_1 \geq R_2$. В этих случаях также используем обозначения (2.1) с заменой первых двух равенств (2.1) на $r - c = r'b, x - c = x'b$ при $R_1 \leq R_2$ или $r - b = r'b, x - b = x'b$ при $R_1 \geq R_2$. Штрихи далее опускаем.

Безразмерный параметр λ характеризует относительную удаленность штампа от ребра клина.

Для отладки созданной компьютерной программы использовались:

а) точное решение осесимметричной контактной задачи [8], которое при $\alpha = \pi, \gamma = 0, \varepsilon = \delta = A = B = 1$ (λ, ν – любые) имеет вид

$$q(r, z) = q_0 \sqrt{1 - (r/c_1)^2 - (z/c_2)^2} \quad (2.2)$$

$$q_0 = 2\sqrt{2}/\pi^2, \quad c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2}$$

б) точное решение задачи о вдавливании эллиптического параболоида в полупространство [4] ($\alpha = \pi, \varepsilon = 0,5, \delta = 1, \gamma = 0, A = 2, B = 1; \lambda, \nu$ – любые), определяемое формулой (2.2) при $q_0 = 0,348, c_1 = 0,469, c_2 = 0,744$;

в) решение, полученное при помощи асимптотического метода "больших λ " [3] ($\alpha = \pi/2, \nu = 0,3, \lambda = 2, \varepsilon = 0,5, \delta = 1, \gamma = -0,0450, A = 2,19, B = 1$), находящееся по формуле (2.2) при $q_0 = 0,326, c_1 = 0,422, c_2 = 0,704$.

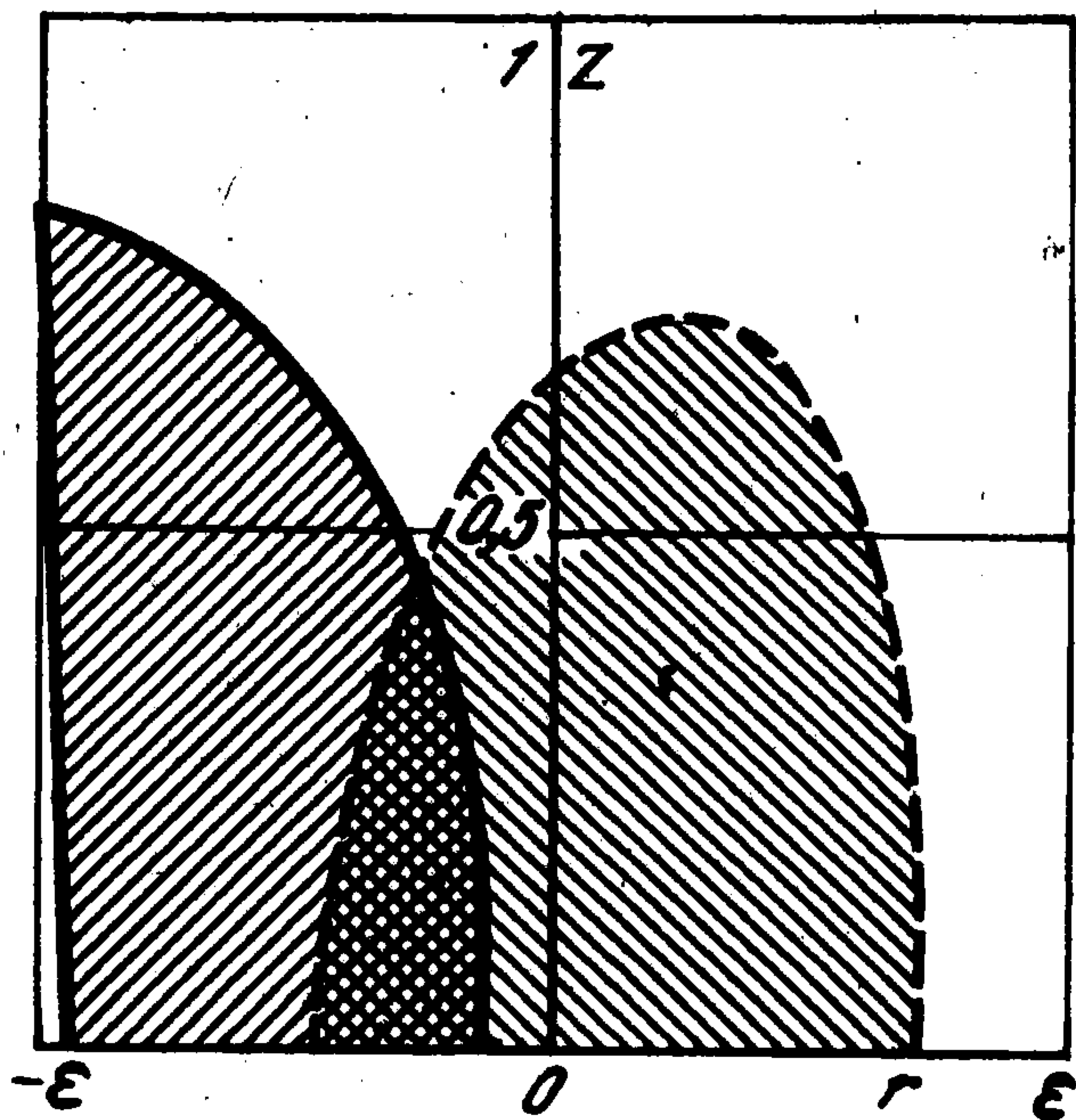
Результаты сравнения решений а–в в 9 узлах на оси r с соответствующими значениями, полученными при помощи компьютерной программы, показывают, что отличие в случаях а и б менее 3%, а в случае в не превосходит 12%.

Значения вдавливающей силы $10^3 P$ в зависимости от осадки штампа $10^3 \delta$ даны в табл. 1 при разных α и двух ориентациях штампа относительно ребра. При этом $\nu = 0,3, \lambda = 0, \varepsilon = 0,15, \gamma = 0$ и $A = 0,005, B = 0,1$ (до значения $\alpha = 180^\circ$ включительно) или $A = 0,1, B = 0,005$ (ниже строки, соответствующей $\alpha = 180^\circ$); при $\alpha = 180^\circ$ приведены точные значения [4]. В силу регуляризации (1.11), (1.12) значение $\lambda = 0$ отвечает случаю, когда точка первоначального касания штампа и клина "почти" выходит на ребро. Анализ этих данных, а также соответствующих расчетов, проведенных при $\varepsilon = 0,1$ и $\varepsilon = 0,25$, показывает, что при $\alpha \approx 90^\circ$ значение $P = P(\delta)$ при $\lambda \rightarrow 0$ не зависит от того вдоль какой из осей координат (r или z) вытянут эллиптический параболоид.

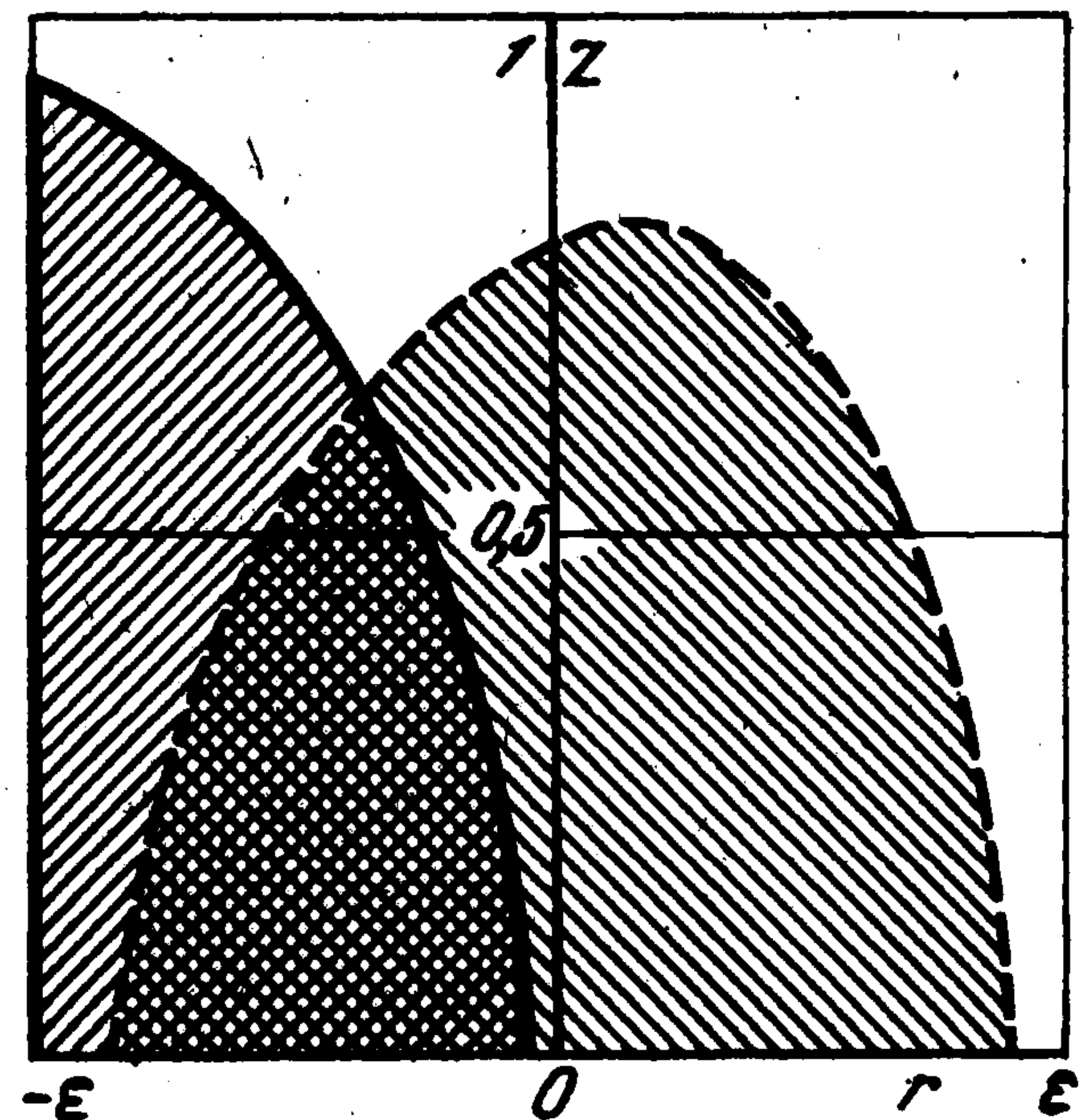
На фиг. 1 и 2 заштрихованы верхние половины областей контакта Ω для углов $\alpha = 65^\circ$ (фиг. 1) и $\alpha = 135^\circ$ (фиг. 2). При этом $\nu = 0,3, \varepsilon = 0,15, \delta = 0,005, \gamma = 0, A = 0,1, B = 0,005$; при $\lambda = 0$ граница области Ω показана сплошной линией, а при $\lambda = \varepsilon$ – штрихами. Видно, что при $\alpha = 65^\circ$ площадь области Ω значительно меньше, чем при

Таблица 1

α , град	$10^3 \delta = 4$	4,5	5	5,5	6	6,5
65	0,116	0,141	0,167	0,194	0,222	0,250
90	0,210	0,255	0,302	0,351	0,400	0,453
110	0,253	0,306	0,361	0,419	0,478	0,541
135	0,311	0,374	0,441	0,510	0,581	0,657
180	0,601	0,717	0,840	0,969	1,10	1,24
135	0,440	0,527	0,616	0,713	0,812	0,913
110	0,314	0,376	0,441	0,509	0,581	0,654
90	0,215	0,257	0,302	0,348	0,396	0,447
65	0,0813	0,0967	0,113	0,131	0,150	0,168



Фиг. 1



Фиг. 2

$\alpha = 135^\circ$ (этот факт имеет место и в случае $A < B$). Для достаточно острых углов α и $\lambda \rightarrow 0$ наблюдается эффект нарушения контакта в окрестности точки первоначального касания (ребро как бы отходит), особенно при вытянутости штампа вдоль ребра (фиг. 1).

3. После решения контактной задачи при знании функции $q(r, z)$ и площадки контакта Ω возможно определение играющего важную роль в приложениях безразмерного эффективного напряжения $\sigma'_e = \theta \sigma_e / (2\pi)$. В качестве примера (в рамках понятия поверхностной прочности) определим σ'_e в точке первоначального касания $r = a_0$, $\varphi = \alpha$, $z = 0$ ($a_0 = \lambda - \varepsilon$ при $\lambda \leq \varepsilon$ и $R_1 \leq R_2$, $a_0 = \lambda - 1$ при $\lambda \leq 1$ и $R_1 \geq R_2$, в других случаях $a_0 = 0$) по формулам (штрих опустим):

$$\sigma_e = 2^{-1/2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2} \quad (3.1)$$

$$\sigma_1 = \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\nu}{1-\nu} q_0, \quad \sigma_2 = -q_0$$

$$\sigma_3 = \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\nu}{1-\nu} q_0, \quad q_0 = q(a_0, 0)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{4(1-\nu)} \chi_1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \chi_2$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} + \frac{\lambda}{4(1-\nu)} \chi_3$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} = -\frac{2(1-2\nu)}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty E_1(p, t, \tau) K_*(p, t) dp dt d\tau$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} = -\frac{2(1-2\nu)}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty E_1(p, t, \tau) p K_{it}(\lambda t) dp dt d\tau \quad (3.2)$$

$$\chi_1 = \sin \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} - \cos \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2} = -\frac{4(1-\nu)}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty E_2(p, t) K_*(p, t) dp dt$$

$$\chi_2 = \sin \frac{\alpha}{2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \cos \frac{\alpha}{2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} = -\frac{4(1-\nu)}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty E_2(p, t) p \operatorname{Re} K_{1+it}(\lambda p) dp dt$$

Таблица 2

α , град	$10^3\delta = 4$	4,5	5	5,5	6	6,5
65	1,08	1,35	1,33	1,36	1,33	1,61
90	1,48	1,45	1,70	1,74	1,71	2,06
110	1,48	1,70	1,74	1,75	1,96	1,69
135	1,21	1,44	1,44	1,74	1,31	0,924
180	1,17	1,24	1,31	1,37	1,43	1,49
135	1,03	1,08	1,15	1,21	1,26	1,33
110	0,952	1,02	1,08	1,15	1,21	1,28
90	0,832	0,894	0,943	0,996	1,05	1,10
65	0,501	0,525	0,549	0,573	0,595	0,610

$$\chi_3 = \sin \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - \cos \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} = -\frac{4(1-\nu)}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty E_2(p, t) p K_{it}(\lambda p) dp dt$$

$$K_*(p, t) = p K_{it}(\lambda p) - (t \operatorname{Im} K_{1+it}(\lambda p) - \operatorname{Re} K_{1+it}(\lambda p)) / \lambda$$

$$E_1(p, t, \tau) = \frac{\operatorname{sh} \pi t \operatorname{sh} \pi \tau}{\operatorname{ch} \pi t + \operatorname{ch} \pi \tau} \left[W_+(\tau) \operatorname{cth} \frac{\alpha \tau}{2} E_+(\tau, p) - W_-(\tau) \operatorname{th} \frac{\alpha \tau}{2} E_-(\tau, p) \right]$$

$$E_2(p, t) = -2p \sin \alpha \operatorname{sh} \pi t \left[\frac{E_+(t, p)}{\operatorname{sh} \alpha t + t \sin \alpha} - \frac{E_-(t, p)}{\operatorname{sh} \alpha t - t \sin \alpha} \right]$$

$$E_\pm(t, p) = \frac{\Phi_\pm(t, p)}{\operatorname{ch} \pi t / 2} + S(t, p), \quad S(t, p) = -\frac{1}{2\pi} \iint_\Omega q(r, z) K_{it}(p(r+b_0)) \cos pz dr dz$$

$$\Phi_\pm(t, p) = (1-2\nu) \int_0^\infty L_\pm(t, y) \left[\Phi_\pm(y, p) + \operatorname{ch} \frac{\pi y}{2} S(y, p) \right] dy, \quad 0 \leq t < \infty \quad (3.3)$$

Здесь σ_n ($n = 1, 2, 3$) – главные напряжения; u_r, u_z – компоненты вектора перемещений; $\Phi_n = \Phi_n(r, \varphi, z)$ ($n = 0, 1, 2$) – функции, входящие в представление Папковича–Нейбера [3]; $b_0 = \lambda - a_0$.

При решении интегральных уравнений Фредгольма второго рода (3.3), а также (1.3), (1.12) применяется метод механических квадратур с использованием квадратурной формулы Гаусса.

Если в формулах (3.1)–(3.3) положить $\alpha = \pi$ и считать, что функция $q(r, z)$ определена в эллиптической области Ω по закону

$$q(r, z) = q_0 \sqrt{1 - (r - a_0)^2 / a_*^2 - z^2 / b_*^2} \quad (3.4)$$

то приходим к формуле [9]

$$\sigma_e = (1-2\nu) q_0 \sqrt{1 - \beta + \beta^2} / (1 + \beta) \quad (3.5)$$

где $\beta = b_*/a_*$, если $a_* \geq b_*$, и $\beta = a_*/b_*$, если $a_* \leq b_*$.

При выводе формулы (3.5) учтены значения интегралов [10, N 8.432.4, N 3.984.4]

$$\frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \pi t \operatorname{sh} \pi \tau}{\operatorname{ch} \pi t + \operatorname{ch} \pi \tau} \left[\operatorname{cth} \frac{\pi \tau}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi t}{2} + \operatorname{th} \frac{\pi \tau}{2} \operatorname{th} \frac{\pi t}{2} \right] K_*(p, t) \times \\ \times K_{it}(p(r+b_0)) \cos pz dp dt d\tau = \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(r-a_0)^2 + z^2} \right] - 2\pi \delta(r-a_0) \delta(z) \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_\Omega q(r, z) \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(r-a_0)^2 + z^2} \right] dr dz = \frac{a_* q_0}{a_* + b_*}$$

Во втором интеграле (3.6) функция $q(r, z)$ определяется формулой (3.4), а Ω – соответствующий эллипс с центром в точке $r = a_0, z = 0$.

В табл. 2 приведены значения эффективных напряжений $10^3\sigma_e$ в точке $r = a_0, \varphi = \alpha, z = 0$ в зависимости от $10^3\delta$ при разных α и двух ориентациях штампа. При этом $\nu = 0,3, \varepsilon = 0,15, \gamma = 0$ и $\lambda = 0,25, A = 0,005, B = 0,1$ до значения $\alpha = 180^\circ$ включительно или $\lambda = 0,15, A = 0,1, B = 0,005$ ниже строки, соответствующей $\alpha = 180^\circ$. При $\alpha = 180^\circ$, когда ориентация штампа и значение λ не играют роли, расчеты сделаны по формуле (3.5) согласно точному решению задачи [4]. Расчеты показывают, что вблизи ребра зависимость σ_e от δ , а также от λ может быть немонотонной. Когда эллиптический параболоид приближается к ребру своей большей полуосью, значения σ_e , как правило, больше, чем при подходе меньшей полуосью. Из сравнения первой и третьей строк таблицы 2 видно, что при $\alpha = 110^\circ$ возникают более опасные эффективные напряжения, чем при $\alpha = 65^\circ$. Как следует из формул (3.1)–(3.3), $\sigma_e \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 0$, если только $q_0 \neq 0$ при $\lambda = 0$, т.е. контакт не нарушается. Если же при $\lambda \rightarrow 0$ и достаточно острых углах α наблюдается нарушение контакта в окрестности точки первоначального касания, то в этой точке будем иметь $\sigma_e = 0$ [11].

Автор благодарит В.М. Александрова и Б.А. Галанова за обсуждение метода [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Галанов Б.А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 827–835.
2. Галанов Б.А. Нелинейные граничные уравнения контактных задач теории упругости // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296. № 4. С. 812–815.
3. Лубягин И.А., Пожарский Д.А., Чебаков М.И. Внедрение штампа в форме эллиптического параболоида в упругий пространственный клин // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 286–295.
4. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
5. Короткин В.И., Харитонов Ю.Д. Зубчатые передачи Новикова. Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1991. 207 с.
6. Keer L.M., Lee J.C., Mura T. A contact problem for the elastic quarter space // Intern. J. Solids and Struct. 1984. V. 20. № 5. P. 513–524.
7. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рудицкий Я.Б., Стеценко В.А. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.
8. Ворovich И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
9. Беллев Н.М. Местные напряжения при сжатии упругих тел // Инженерные сооружения и строительная механика. Л.: Путь, 1924. С. 27–108.
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
11. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.