

УДК 539.3

© 1995 г. Ю.Д. Каплунов, Е.В. Нольде

КВАЗИФРОНТ В ЗАДАЧЕ О ДЕЙСТВИИ МГНОВЕННОГО СОСРЕДОТОЧЕННОГО ИМПУЛЬСА НА КРАЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассматривается задача о действии продольного сосредоточенного импульса на край тонкой конической оболочки. Движение оболочки описывается двумерными уравнениями, соответствующими второму низкочастотному длинноволновому приближению уравнений теории упругости. К их исследованию применяется метод сращиваемых асимптотических разложений. Явление квазифронта в двумерной теории оболочек предлагается трактовать как пограничный слой в окрестности субхарактеристики.

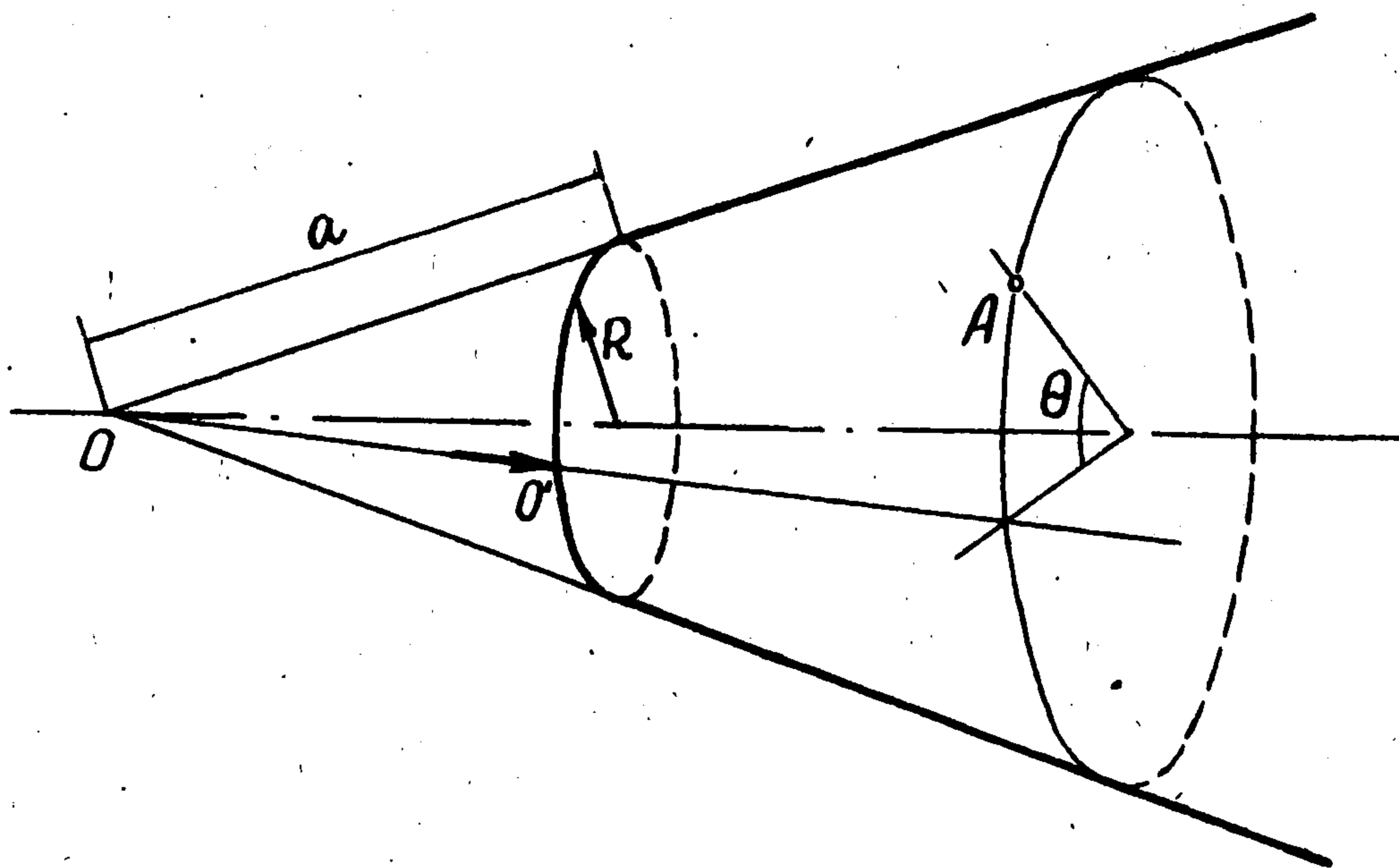
Известно, что классические теории вырожденных систем (стержней, пластин и оболочек) искажают скорость волны расширения по сравнению с трехмерной теорией упругости. В окрестности точек (или линий), в которых упомянутые теории предсказывают разрывы параметров напряженно-деформированного состояния, точное решение задачи имеет резко выраженные экстремумы, сохраняя при этом гладкость. Таким образом, фронт волны расширения, отвечающий классическим теориям, в действительности оказывается квазифронтом.

Было показано [1], что для адекватного описания квазифронта в одномерных задачах динамики оболочек вращения (случай кольцевой нагрузки) можно использовать уравнения так называемого плоского динамического пограничного слоя, совпадающие в главном с уравнениями плоской задачи теории упругости на меридиональном сечении оболочки (случай плоской деформации). Альтернативный подход к исследованию квазифронта в оболочках вращения был применен в [2], где было предложено для сглаживания разрыва на квазифронте использовать высшие низкочастотные длинноволновые приближения уравнений теории упругости. При этом оказывается, что переход от классических уравнений движения, являющихся главным низкочастотным длинноволновым приближением, к уравнениям высших приближений связан лишь с коррекцией инерционных членов (подробнее об этом см. [3, 4]).

Подход [2] был распространен в [5] на двумерную задачу о действии продольного сосредоточенного импульса на край полубесконечной пластины (обобщение плоской задачи Лэмба). Квазифронт в этом случае распространяется от источника по полуокружностям, лежащим в срединной плоскости.

В развитие [5] в предлагаемой работе на основе метода сращиваемых асимптотических разложений [6, 7] рассматривается задача о действии мгновенного сосредоточенного импульса на край полубесконечной усеченной круговой конической оболочки толщины $2h$. Считается, что импульс направлен вдоль образующей конуса и равномерно распределен по толщине.

1. Основные соотношения задачи и их преобразование. Пусть положение произвольной точки A на срединной поверхности оболочки Γ определяется расстоянием α вдоль образующей от этой точки до края $\partial\Gamma$ (считается, что $\partial\Gamma$ – окружность радиуса R) и углом θ между осевыми плоскостями, проходящими через начало отсчета и точку A (фиг. 1).



Фиг. 1

Основные уравнения задачи возьмем в виде:
уравнения движения ($\mathbf{u} = u_\alpha(\alpha, \theta, t)\mathbf{i}_\alpha + u_\theta(\alpha, \theta, t)\mathbf{i}_\theta$)

$$Eh \left[\frac{1}{1+\nu} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-\nu} \text{grad div } \mathbf{u} \right] - 2\rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\mathbf{u} - h^2 D_0 \text{grad div } \mathbf{u}] = 0, \quad \left(D_0 = \frac{\nu^2}{3(1-\nu)^2} \right) \quad (1.1)$$

формулы "усилия – перемещения"

$$T_{\alpha\alpha} = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \nu \left(\frac{1}{R(1+\alpha/a)} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{a+\alpha} u_\alpha \right) \right]$$

$$T_{\alpha\theta} = \frac{Eh}{1+\nu} \left[\frac{1}{R(1+\alpha/a)} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \alpha} - \frac{1}{a+\alpha} u_\theta \right] \quad (1.2)$$

граничные условия ($\alpha = 0$)

$$T_{\alpha\alpha} = -P\delta(t)\delta(\theta), \quad T_{\alpha\theta} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь $t \geq 0$ – время, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала оболочки, $u_\alpha(\alpha, \theta, t)$, $u_\theta(\alpha, \theta, t)$ – перемещения срединной поверхности Γ в направлении осей криволинейной системы координат (α, θ) , $T_{\alpha\alpha}(\alpha, \theta, t)$, $T_{\alpha\theta}(\alpha, \theta, t)$ – напряжения на срединной поверхности, P – амплитуда силы, δ – дельта-функция, Δ и grad div – двумерные операторы на Γ , a – расстояние вдоль образующей от вершины конуса Γ до торцевого сечения радиуса R .

Начальные условия будем полагать нулевыми.

Считается, что полутолщина оболочки мала по сравнению с радиусом R , т.е. $\eta = h/R \rightarrow 0$.

При $D_0 \equiv 0$ уравнения (1.1) совпадают с хорошо изученными в рамках классической теории Кирхгофа – Лява (см., например, [8]) уравнениями квазитангенциальных колебаний оболочек, т.е. колебаний, при которых преобладают перемещения в срединной поверхности. С точностью до метрики они совпадают с уравнениями плоского напряженного состояния. Поправочный член с множителем D_0 , введенный в [3, 4], "портит" гиперболичность обсуждаемых уравнений и, как будет видно далее, позволяет сгладить разрыв на квазифронте. Продолжая аналогию с плоской задачей теории упругости, можно трактовать уравнения (1.1) как второе асимптотическое приближение трехмерных уравнений теории упругости для случая плоского напряженного состояния [3, 4].

Область применимости уравнений (1.1) заведомо ограничена двусторонним неравенством

$$\eta \ll l \ll 1 \quad (1.4)$$

накладываемым на l – отнесенную к радиусу R длину волны деформации. Верхний предел этого неравенства определяет диапазон, в котором можно в первом приближении пренебречь влиянием искривленности оболочки. Нижний его предел дает грубую оценку области применимости любой двумерной теории оболочек как длинноволнового приближения уравнений теории упругости. Более точные значения нижнего предела неравенства (1.4) (при учете погрешности, накапливающейся в фазе распространяющихся мод колебаний) приведены в [3, 4, 9, 10] и др. для длинноволновых приближений теории упругости различных порядков. При некоторых дополнительных ограничениях соответствующее уточнение неравенства (1.4) выглядит так

$$\eta^{4/5} \ll l \ll 1 \quad (1.5)$$

Введем обычным образом потенциалы ϕ и ψ

$$u_\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{1}{R(1+\alpha/a)} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{1}{R(1+\alpha/a)} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (1.6)$$

Подставив (1.6) в уравнение (1.1), последнее можно преобразовать к виду

$$\Delta \phi - \frac{1}{c_3^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + D_0 \frac{h^2}{c_3^2} \frac{\partial^2 \Delta \phi}{\partial t^2} = 0 \quad \left(c_3^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)\rho} \right) \quad (1.7)$$

$$\Delta \psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad \left(c_2^2 = \frac{E}{2(1+\nu)\rho} \right) \quad (1.8)$$

Уравнение (1.7) описывает распространение волны расширения, а (1.8) – волны сдвига. Будем в дальнейшем называть потенциалы ϕ и ψ соответственно потенциалами волн расширения и сдвига. Как видно из (1.7), (1.8), введенное в (1.1) уточнение влияет только на волну расширения; уравнение, описывающее волну сдвига, остается при этом гиперболическим. Анализ волны расширения занимает центральное место в настоящем изложении.

Скорость волны расширения c_3 , соответствующая вырожденному ($D_0 \equiv 0$) гиперболическому уравнению (1.7), определяет упоминавшийся выше квазифронт. Уже априори ясно, что введенное в уравнение потенциала волны расширения уточнение будет существенным лишь в окрестности квазифронта, где асимптотически главные члены в левой части уравнения (1.7) (члены без множителя h^2) сокращаются.

Подставляя представления (1.6) в (1.2), а затем в (1.3), запишем граничные условия в потенциалах

$$\frac{Eh}{1+\nu} \left[\frac{2}{R} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha \partial \theta} - \frac{2}{Ra} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right] = 0$$

$$\frac{2Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\nu}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} - \frac{1-\nu}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \theta} + \frac{1-\nu}{Ra} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] = -P\delta(t)\delta(\theta) \quad (\alpha = 0) \quad (1.9)$$

Итак, исходная задача свелась к решению уравнений (1.7), (1.8) при граничных условиях (1.9) и нулевых начальных данных. Применим к ее решению метод сжимаемых асимптотических разложений [6, 7]. Для рассматриваемой здесь задачи реализация этого метода заключается в построении разложений двух типов: пограничного (для уравнения (1.7)), действующего в некоторой окрестности квазифронта, и внешнего разложения задачи (1.7)–(1.9), конструируемого вне указанной окрестности.

При этом оказывается, что существует переходная область, в которой эти разложения сращиваются, а главный вклад во все получаемые асимптотические разложения вносят длины волн, удовлетворяющие неравенству (1.5).

2. Пограничный слой в окрестности квазифронта. Обратимся к уравнению (1.7) и перейдем к безразмерным координатам

$$\alpha_1 = \alpha/R, \quad \theta_1 = \theta, \quad t_1 = tc_3/R \quad (2.1)$$

выбирая в качестве характерного линейного размера задачи радиус R .

Уравнение (1.7) в безразмерных переменных примет вид

$$\Delta_1 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2} + D_0 \eta^2 \frac{\partial^2 \Delta_1 \varphi}{\partial t_1^2} = 0 \quad (2.2)$$

$$\left(\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1}{a_1 + \alpha_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{a_1^2}{(a_1 + \alpha_1)^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2}, \quad a_1 = \frac{a}{R} \right)$$

Применим к исследованию уравнения (2.2) теорию сингулярных возмущений [6].

В силу симметрии задачи ограничим рассмотрение областью $0 < \theta_1 < \pi$. Кроме того, для определенности примем, что

$$\alpha_1 < t_1, \quad t_1 \sim 1 \quad (2.3)$$

Второе условие (2.3) означает, что рассматриваются только такие моменты времени, для которых расстояние tc_3 , проходимое квазифронтом, соизмеримо с характерным линейным размером R .

Естественными для изучения пограничного слоя оказываются координаты вида:

$$\zeta = a_1 \arccos \left[1 - \frac{t_1^2 - \alpha_1^2}{2a_1(a_1 + \alpha_1)} \right] - \theta_1 \quad (2.4)$$

$$\beta = \arcsin \left[\frac{1}{2a_1 t_1} (2a_1 \alpha_1 + \alpha_1^2 - t_1^2) \right], \quad \tau = t_1$$

Физический смысл координат ζ и β прояснен (фиг. 2). Срединная поверхность Γ изображена развернутой на плоскость. Штриховая линия очерчивает квазифронт волны расширения в момент времени t_1 ; O' – точка приложения нагрузки; A – рассматриваемая точка на Γ с координатами $(\alpha_1, \theta_1, t_1)$; M – точка пересечения линии, очерчивающей квазифронт, и θ_1 – линии, проходящей через точку A . Переменная ζ – это длина дуги $A'M'$, т.е. нормированное определенным образом расстояние от квазифронта, отсчитываемое вдоль θ_1 – линии ($\zeta > 0$, если рассматриваемая точка на Γ находится позади квазифронта).

В области пограничного слоя следует считать, что производная $\partial/\partial \zeta$ велика, так что можно ввести погранслойную координату

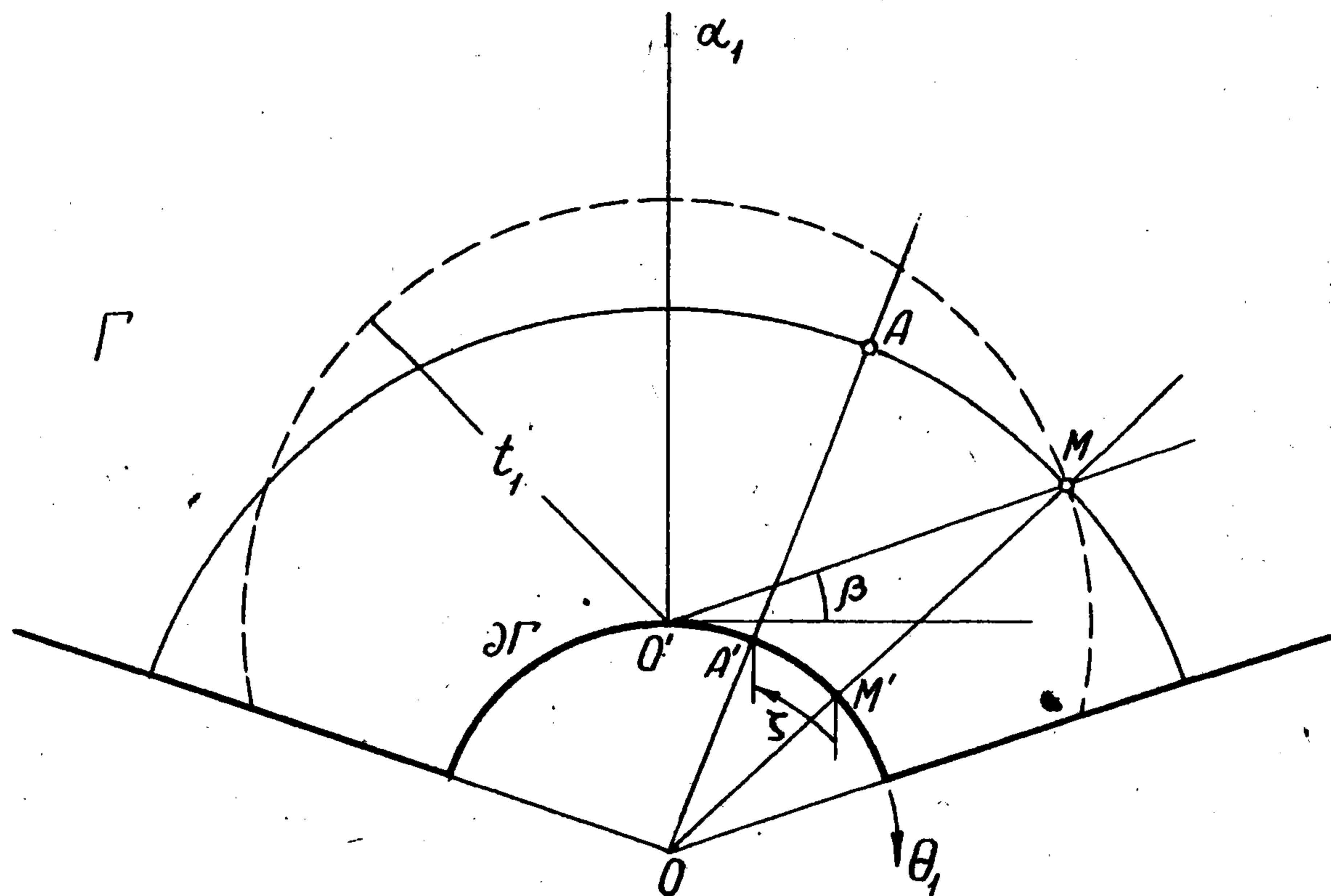
$$\zeta_* = \zeta / \mu(\eta) \quad (2.5)$$

и предельный процесс $\eta \rightarrow 0$ при фиксированных ζ_* , β , τ . Масштабный коэффициент $\mu(\eta)$ ($\mu(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$) характеризует ширину пограничного слоя и будет определен далее исходя из требования асимптотической непротиворечивости получаемого приближенного уравнения.

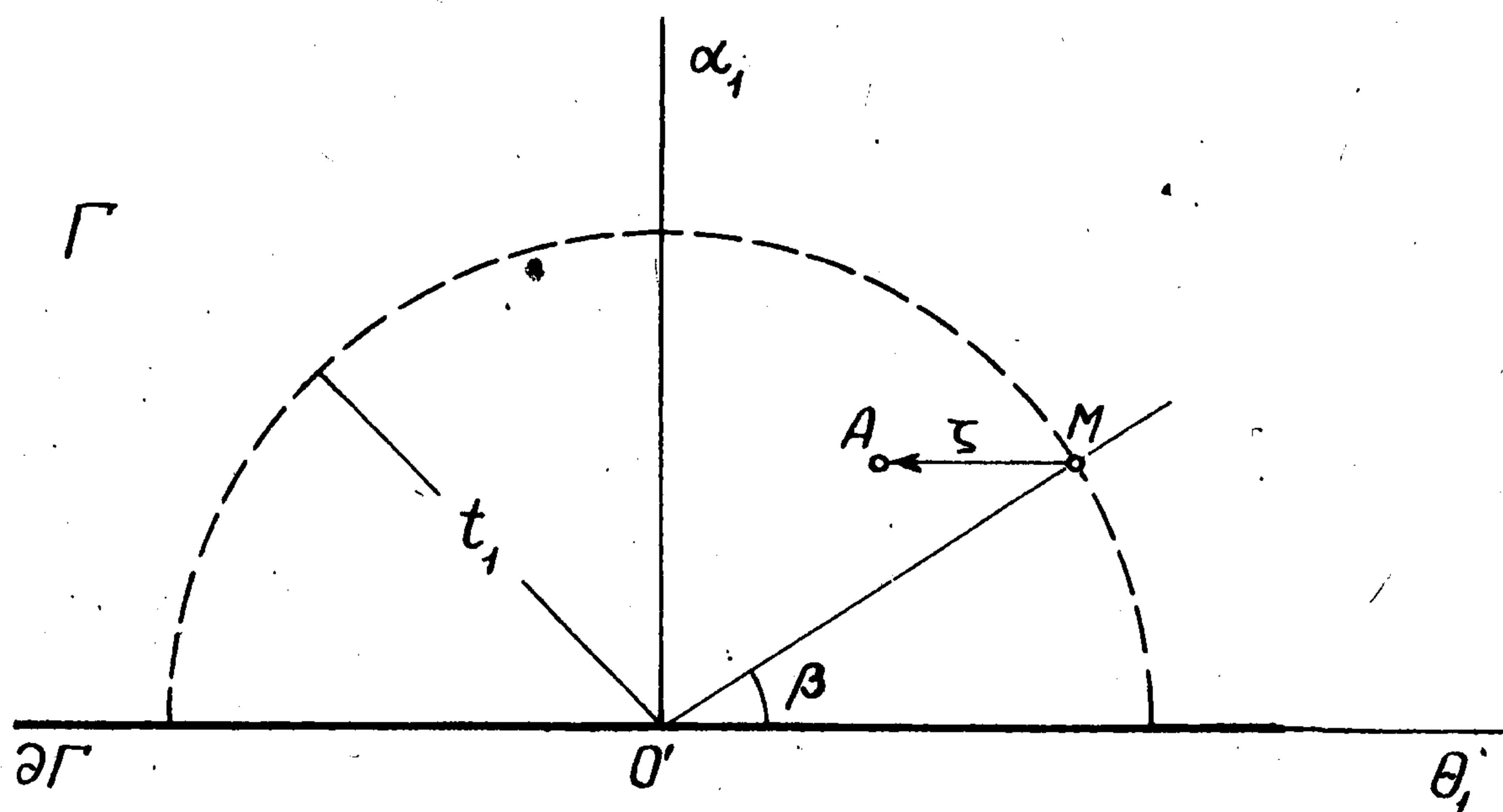
Переходя от системы координат $(\alpha_1, \theta_1, t_1)$ к (ζ_*, β, τ) и пренебрегая асимптотически второстепенными членами, для главного члена погранслойного разложения $\varphi_{bl}(\zeta_*, \beta, \tau)$ получаем одномерное уравнение

$$\left(2 \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau} \right) \varphi_{bl} - D_0 \eta^2 \frac{1}{\mu^3 \cos^3 \beta} \frac{\partial^3 \varphi_{bl}}{\partial \zeta_*^3} = 0 \quad (2.6)$$

которое в первом приближении описывает пограничный слой около субхарактеристики



Фиг. 2



Фиг. 3

(характеристики соответствующего вырожденного уравнения) уравнения (2.2). Будем называть его динамическим пограничным слоем около квазифронта.

Требую, чтобы производная по ζ_* входила в асимптотически главную часть этого уравнения, для ширины пограничного слоя получаем оценку

$$\mu(\eta) = \eta^{2/3} \quad (2.7)$$

Заметим, что при соответствующем выборе координат в аналогичных задачах для цилиндрической оболочки и пластины уравнение пограничного слоя около квазифронта с точностью до асимптотически второстепенных членов совпадает с уравнением (2.6). В упомянутых случаях (для пластины – см. фиг. 3) имеем

$$\zeta = \sqrt{t_1^2 - \alpha_1^2} - \theta_1, \quad \beta = \arcsin(\alpha_1 / t_1) \quad (2.8)$$

При этом для цилиндрической оболочки $\alpha_1 = \alpha/R$, $\theta_1 = \theta$, где (α, θ) – цилиндри-

ческие координаты на Γ , R – радиус срединной поверхности, а для пластины $\alpha_1 = x/R$, $\theta_1 = y/R$, где (x, y) – декартовы координаты, а в качестве характерного линейного размера R можно, например, выбрать расстояние, проходимое квазифронтом в изучаемый момент времени.

Решение уравнения (2.6) представим в виде интеграла Фурье, причем для удобства дальнейшего сращивания с внешним решением запишем его в системе (ζ, β, τ)

$$\Phi_{bl} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(k, \beta, \tau) \exp(ik\zeta) dk \quad (2.9)$$

$$\Phi_0(k, \beta, \tau) = \Phi_*(k, \beta) \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left[-i \frac{D_0 \eta^2 k^3}{2 \cos^3 \beta} \tau\right]$$

Здесь $\Phi_*(k, \beta)$ – неизвестная пока функция. Она должна быть определена в процессе сращивания пограничного слоя с внешним решением исходной задачи.

Прежде чем приступить к построению внешнего решения и процедуре сращивания, еще раз подчеркнем, что основное внимание сосредоточено на построении решения в окрестности квазифронта волны расширения ($|\zeta| \ll 1$). Поэтому внешнее разложение представляет интерес лишь для определения неизвестной функции $\Phi_*(k, \beta)$. Асимптотический анализ, аналогичный проведенному в [11] (см. также [5]), показывает, что в окрестности квазифронта основной вклад в интеграл (2.9) вносит область больших значений параметра преобразования Фурье k . Далее без каких-либо дополнительных пояснений считается, что $|k| \gg 1$.

3. Внешнее решение и процедура сращивания. Обратимся к уравнению (2.2), записанному в координатах $(\alpha_1, \theta_1, t_1)$, и рассмотрим асимптотический процесс $\eta \rightarrow 0$ при фиксированных α_1, θ_1, t_1 . Очевидно, что главный член внешнего разложения $\Phi_0(\alpha_1, \theta_1, t_1)$ (пригодного на некотором расстоянии от квазифронта) удовлетворяет предельному уравнению

$$\Delta_1 \Phi_0 - \partial^2 \Phi_0 / \partial t_1^2 = 0 \quad (3.1)$$

Для определения Φ_0 имеем систему уравнений (3.1), (1.8), (1.9) (считается, что все указанные уравнения записаны в безразмерных координатах). Аналогичная задача для случая полупространства была детально исследована [11]. По аналогии с [11] будем искать решение в виде интегралов Фурье–Меллина:

$$\Phi_0(\alpha_1, \theta_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha_1, k, t_1) \exp(ik\theta_1) dk \quad (3.2)$$

$$\Psi(\alpha_1, \theta_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\alpha_1, k, t_1) \exp(ik\theta_1) dk$$

$$\Phi(\alpha_1, k, t_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(\alpha_1, k, s) \exp(st_1) ds \quad (3.3)$$

$$\Psi(\alpha_1, k, t_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y(\alpha_1, k, s) \exp(st_1) ds$$

Здесь $\sigma > 0$, s – параметр преобразования Лапласа.

Для функций $X(\alpha_1, k, s)$, $Y(\alpha_1, k, s)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_1} \frac{\partial X}{\partial \alpha_1} - k^2 \left[\frac{a_1^2}{(\alpha_1 + \alpha_1)^2} + \xi^2 \right] X = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1}{a_1 + \alpha_1} \frac{\partial Y}{\partial \alpha_1} - k^2 \left[\frac{a_1^2}{(a_1 + \alpha_1)^2} + \gamma^2 \xi^2 \right] Y = 0 \quad (3.5)$$

и граничные условия ($\alpha_1 = 0$)

$$2ik \frac{\partial X}{\partial \alpha_1} - 2ik \frac{1}{a_1} X + \frac{\partial^2 Y}{\partial \alpha_1^2} + k^2 Y - \frac{1}{a_1} \frac{\partial Y}{\partial \alpha_1} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\nu}{a_1} \frac{\partial X}{\partial \alpha_1} - \nu k^2 X - (1 - \nu) ik \frac{\partial Y}{\partial \alpha_1} + (1 - \nu) ik \frac{1}{a_1} Y = -P_* \quad (3.7)$$

$$[\xi = s/|k|, \quad \gamma^2 = c_3^2 / c_2^2 = 2 / (1 - \nu), \quad P_* = P(1 - \nu^2) c_3 R / (4\pi E h)]$$

Общее решение уравнений (3.4), (3.5) можно представить в экспоненциальном виде

$$X(\alpha_1, k, \xi) = C_1(\alpha_1, k, \xi) \exp \left\{ |k| \int_0^{\alpha_1} \chi_1(\alpha'_1) d\alpha'_1 \right\} + C(\alpha_1, k, \xi) \exp \left\{ -|k| \int_0^{\alpha_1} \chi(\alpha'_1) d\alpha'_1 \right\}$$

$$Y(\alpha_1, k, \xi) = B_1(\alpha_1, k, \xi) \exp \left\{ |k| \int_0^{\alpha_1} g_1(\alpha'_1) d\alpha'_1 \right\} + B(\alpha_1, k, \xi) \exp \left\{ -|k| \int_0^{\alpha_1} g(\alpha'_1) d\alpha'_1 \right\} \quad (3.8)$$

Считается, что для функций $f: \{\chi_1, \chi, g_1, g\}$ выполняется условие $\int_0^{\alpha_1} f(\alpha'_1) d\alpha'_1 \geq 0$ при $\alpha_1 > 0$. Учет нулевых начальных условий приводит к равенствам $C_1 = B_1 = 0$. Функции $\chi(\alpha_1)$ и $g(\alpha_1)$, а также зависимость $C(\alpha_1, k, \xi)$ и $B(\alpha_1, k, \xi)$ от α_1 определим, подставив (3.8) в уравнения (3.4), (3.5). Здесь еще раз напомним, что для процедуры сращивания достаточно построить фурье-образ внешнего решения задачи только при больших значениях параметра $|k|$. В результате имеем

$$X(\alpha_1, k, \xi) = C_*(k, \xi) [1 + \lambda^2(\alpha_1, \xi)]^{-1/4} \exp[-|k| p(\alpha_1, \xi)] \quad (3.9)$$

$$Y(\alpha_1, k, \xi) = B_*(k, \xi) [1 + \lambda^2(\alpha_1, \gamma \xi)]^{-1/4} \exp[-|k| p(\alpha_1, \gamma \xi)]$$

$$p(\alpha_1, \xi) = a_1 \left\{ \sqrt{1 + \lambda^2(\alpha_1, \xi)} - \sqrt{1 + \xi^2} - \operatorname{arsh} \frac{1}{\lambda(\alpha_1, \xi)} + \operatorname{arsh} \frac{1}{\xi} \right\}$$

$$\lambda(\alpha_1, \xi) = (1 + \alpha_1 / a_1) \xi$$

Функции C_* , B_* находим после подстановки (3.9) в граничные условия (3.6), (3.7). При $|k| \gg 1$ в главном имеем

$$C_* = -\frac{2P_*}{(1 - \nu)k^2} F(\xi) (1 + \xi^2)^{1/4}, \quad B_* = -\frac{2P_* i \operatorname{sign} k}{(1 - \nu)k^2} G(\xi) (1 + \xi^2 \gamma^2)^{1/4} \quad (3.10)$$

$$F(\xi) = \frac{2 + \xi^2 \gamma^2}{r(\xi)}, \quad G(\xi) = \frac{2\sqrt{1 + \xi^2}}{r(\xi)}, \quad r(\xi) = (2 + \xi^2 \gamma^2)^2 - 4\sqrt{1 + \xi^2} \sqrt{1 + \xi^2 \gamma^2}$$

Подставляя представления (3.9) в интегралы Меллина (3.3), при учете (3.10) получим

$$\Phi(\alpha_1, k, t_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{C_* |k|}{[1 + \lambda^2(\alpha_1, \xi)]^{1/4}} e^{-|k| [p(\alpha_1, \xi) - \xi t_1]} d\xi \quad (3.11)$$

$$\Psi(\alpha_1, k, t_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{B_* |k|}{[1 + \lambda^2(\alpha_1, \gamma \xi)]^{1/4}} e^{-|k| [p(\alpha_1, \gamma \xi) - \xi t_1]} d\xi$$

Принимая во внимание симметрию C_* и антисимметрию B_* из (3.10) относительно k ,

можно привести правые части формул (3.2) к интегралам по положительной полуоси $0 < k < +\infty$. В результате для потенциала φ_0 имеем (аналогичные выражения для потенциала ψ далее не приводятся в виду того, что его вклад в окрестности квази-фронта равен нулю)

$$\varphi_0(\alpha_1, \theta_1, t_1) = -2\gamma^2 P_* \int_0^{\infty} J(\alpha_1, k, t_1) \frac{\cos(k\theta_1)}{k} dk \quad (3.12)$$

$$J(\alpha_1, k, t_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(1+\xi^2)^{1/4} F(\xi)}{[1+\lambda^2(\alpha_1, \xi)]^{1/4}} e^{-|k|[\rho(\alpha_1, \xi) - \xi t_1]} d\xi$$

Интеграл, выражающий функцию J , при $a_1 \rightarrow \infty$ (коническая оболочка вырождается в цилиндрическую) совпадает с досконально изученным в нестационарной динамике интегралом [11, 12] и при $k \rightarrow \infty$ определяется методом перевала аналогично упомянутому интегралу. Опуская промежуточные выкладки, приведем сразу окончательный результат

$$J = \frac{\sin \beta}{\sqrt{k\pi t_1} \cos^{3/2} \beta} F\left(\frac{i}{\cos \beta}\right) \operatorname{Re} \left\{ (1+i) \exp \left[ika_1 \arcsin \left(\frac{t_1 \cos \beta}{a_1 + \alpha_1} \right) \right] \right\} \quad (3.13)$$

Для сшивания разложений (2.9) и (3.12) применим принцип сращивания. Он состоит в том, что внешнее разложение внутреннего (или погранслоного) разложения должно совпадать с внутренним (погранслоным) разложением внешнего разложения. Выполнение этого правила означает, что эти разложения имеют перекрывающиеся области применимости.

Раскладывая (2.9) при $\eta \rightarrow 0$ и фиксированных α_1, θ_1, t_1 , а (3.12) при $\eta \rightarrow 0$ и фиксированных ζ_*, β, τ и производя сопоставление, получаем искомую функцию $\Phi_*(k, \beta)$ в виде

$$\Phi_*(k, \beta) = -\frac{\gamma^2 P_*}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sin \beta}{\cos^{3/2} \beta} F\left(\frac{i}{\cos \beta}\right) \frac{(1+i)}{|k|^{3/2} \sqrt{\operatorname{sign} k}} \quad (3.14)$$

При учете (1.6) для перемещений в окрестности квазифронта окончательно имеем (в координатах ζ, β, τ)

$$u_\theta = -\frac{\sqrt{2}\gamma^2 P_*}{\sqrt{\pi\tau R}} \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + \tau^2 + 2a_1\tau \sin \beta}} \frac{\sin \beta}{\cos^{3/2} \beta} F\left(\frac{i}{\cos \beta}\right) I$$

$$u_\alpha = \frac{\sin \beta + \tau / a_1}{\cos \beta} u_\theta \quad (3.15)$$

$$I = \int_0^{+\infty} \sin \left[k\zeta - \frac{D_0 \eta^2 k^3 \tau}{2 \cos^3 \beta} + \frac{\pi}{4} \right] \frac{dk}{\sqrt{k}} \quad (3.16)$$

Интеграл (3.16) с точностью до смысла переменных (ср. (2.4) и (2.8)) совпадает с аналогичным интегралом задачи о пластине [5]. Все выводы [5], касающиеся интеграла (3.16), применимы и к рассматриваемому здесь случаю. Так, в частности, на расстоянии $|\zeta| \ll \zeta_0 \ll 1$ ($\zeta_0 \sim \eta^{2/5}$) от квазифронта главный вклад вносят значения параметра преобразования Фурье k , отвечающие монохроматическим волнам из интервала (1.5).

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (M7X000).

ЛИТЕРАТУРА

1. Коссович Л.Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1986. 176 с.
2. *Kaplunov J.D.* On the quasi-front in two-dimensional shell theories // *C.R. Acad. Sci. Ser. II.* 1991. V. 313. N 7. P. 731–736.
3. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. Асимптотический анализ и уточнение теорий пластин и оболочек типа Тимошенко – Рейсснера // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1990. № 6. С. 124–138.
4. *Goldenveizer A.L., Kaplunov J.D., Nolde E.V.* On the Timoshenko – Reissner type theories of plates and shells // *Intern. J. Solids Structures.* 1993. V. 30. N 5. P. 675–694.
5. Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. Задача Лэмба для случая обобщенного плоского напряженного состояния // *Докл. РАН.* 1992. Т. 322. № 6. С. 1043–1047.
6. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
7. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
8. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
9. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д. Динамический погранслои в задачах колебаний оболочек // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1988. № 4. С. 152–162.
10. Каплунов Ю.Д. Интегрирование уравнений динамического погранслоя // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1990. № 1. С. 148–160.
11. Петрашень Г.И., Марчук Г.И., Огурцов К.И. О задаче Лэмба в случае полупространства // *Учен. зап. ЛГУ. Сер. матем.* 1950. Вып. 21. № 135. С. 71–118.
12. Петрашень Г.И., Молотков Л.А., Крауклис П.В. Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах. Л.: Наука, 1982. 289 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.V.1994