УДК 539.3:534.13

© 1995 г. А.В. Степанов

ГАШЕНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПОДВИЖНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМАХ

Приводится характеристическое уравнение для линейной упругой системы, обладающей нулевыми собственными частотами, к которой присоединен линейный упруговязкий гаситель колебаний. Показано, что если этот гаситель имеет одну степень свободы и не связан с неподвижным основанием, то характеристическое уравнение может быть приведено к виду, аналогичному таковому для случая, когда упругая система не имеет нулевых собственных частот. Задача нахождения значений параметров гасителя, при которых минимальный из декрементов затухания, соответствующих наименьшим ненулевым собственным частотам, сходна с такой же задачей для несвободной упругой системы.

Имеется много работ, посвященных гашению колебаний в упругих системах при помощи упруговязких гасителей (например, [1–3]). Автором решена задача о нахождении таких параметров гасителя, при которых в двухмассовой системе минимальный из всех декрементов затухания имеет максимально возможную величину [4]. Эта задача обобщена [5] на случай, когда гаситель с одной степенью свободы присоединен к упругой системе с произвольным числом степеней свободы, но рассматриваются лишь декременты, соответствующие наименьшим собственным частотам. Выведено [6] характеристическое уравнение для упругой системы и присоединенного к ней упруговязкого гасителя, имеющих достаточно общий вид.

Приведенные результаты относятся к случаю, когда упругая система неподвижна и динамически устойчива, тогда все ее собственные частоты вещественны и положительны. Однако, как будет показано далее, многие из этих результатов могут быть распространены и на случай, когда упругая система обладает конечным числом нулевых собственных частот.

Пусть свободная упругая система конечной массы M занимает объем V и обладает N колебательными и N_1 "неколебательными" степенями свободы (соответствующими ее перемещению как твердого тела). В общем случае таких степеней свободы имеется не более трех поступательных и трех вращательных, поэтому $N_1 \leqslant 6$. Если $\rho(X)$ – матрица обобщенных плотностей упругой системы, $\Omega_1 \leqslant \Omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \Omega_N$ – отличные от нуля ее собственные частоты, то все собственные функции упругой системы могут быть ортонормированы на ее массу:

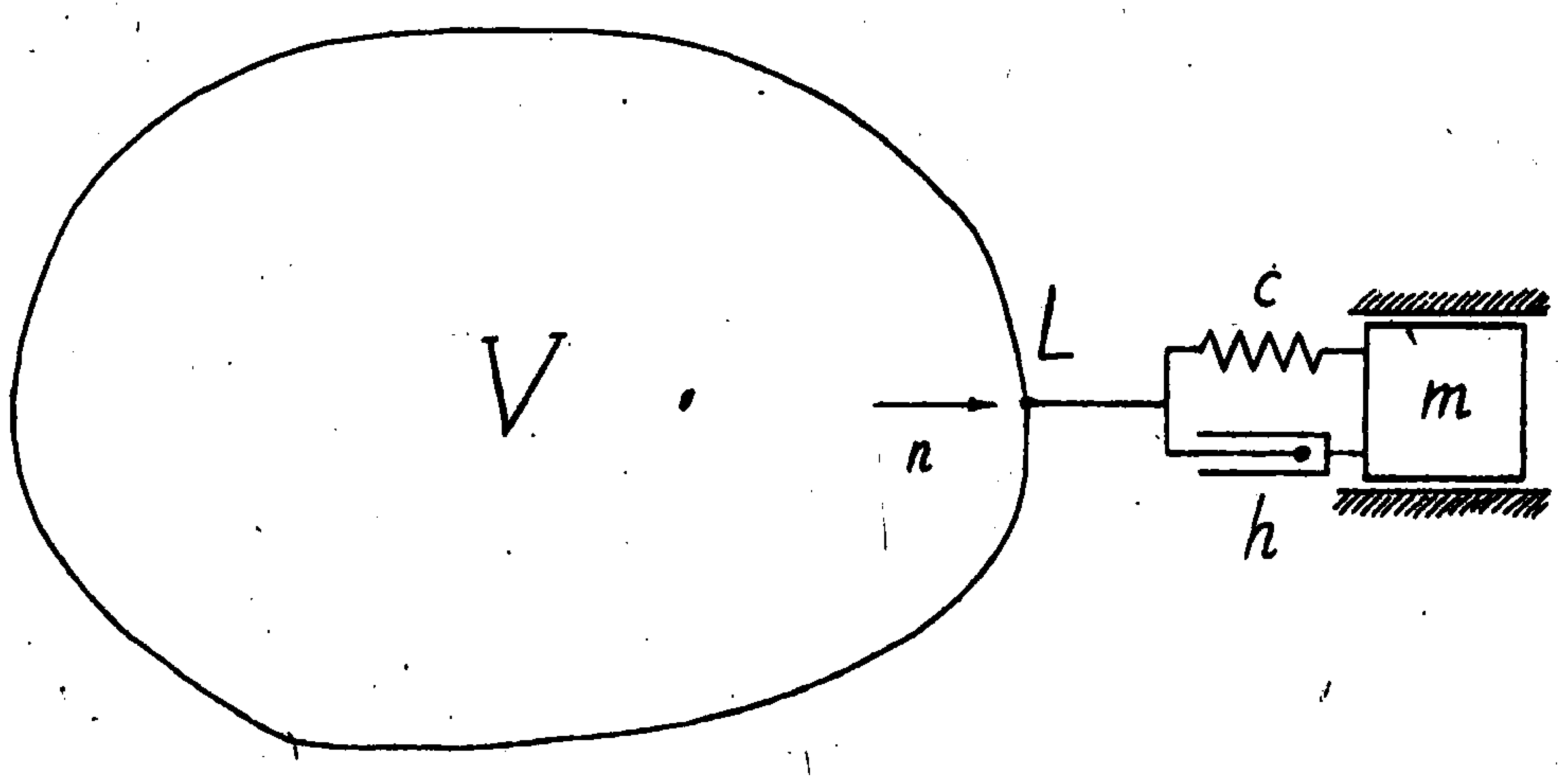
$$\int_V \mathbf{u}_{0j}^t(X)\rho(X)\mathbf{u}_{0k}(X)dV(X) = M\delta_{jk} \quad (1 \leqslant j, k \leqslant N_1)$$

$$\int_V \mathbf{u}_{0j}^t(X)\rho(X)\mathbf{u}_{k}(X)dV(X) = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant N_1,\ 1 \leqslant k \leqslant N)$$

$$\int_V \mathbf{u}_{j}^t(X)\rho(X)\mathbf{u}_{k}(X)dV(X) = M\delta_{jk} \quad (1 \leqslant j,\ k \leqslant N)$$

Здесь $\mathbf{u}_{0j}(X)$ $(1 \leqslant j \leqslant N_1)$ – собственные функции, соответствующие нулевым собственным частотам, $\mathbf{u}_j(X)$ $(1 \leqslant j \leqslant N)$ – соответствующие ненулевым собственным частотам; $dV(X)$ – элемент объема в точке X. Вообще говоря, возможно $N = \infty$.

Если к упругой системе присоединен линейный упруговязкий гаситель, передаточная матрица которого известна, то для этой системы с гасителем может быть выведено характеристическое уравнение тем же способом, что и при отсутствии нулевых собственных частот. Однако оно может иметь и нулевые корни; они соот-



Фиг. 1

ветствуют совместному движению упругой системы и гасителя. Задачи оптимизации параметров гасителя в таком случае ставятся и решаются так же, как и для неподвижных упругих систем, но нулевые корни не учитываются. Если гаситель имеет вид точечной массы, присоединенной к упругой системе линейной упруговязкой связью, то необходимо найти такие значения параметров связи (коэффициентов жесткости и вязкости), чтобы максимизировать минимальный из декрементов затухания, соответствующих наименьшим ненулевым собственным частотам [6]. Эта задача может быть обращена и обобщена на более сложный случай: для гасителя заданной конструкции найти такие значения масс и параметров связей, чтобы суммарная масса гасителя была минимально возможной и все декременты затухания в заданной области частот были не меньше заданной величины, в зависимости от нее [7].

Покажем, что если к упругой системе присоединен свободный точечный гаситель с одной степенью свободы, то задача оптимизации параметров этого гасителя может быть сведена к аналогичной задаче для неподвижной упругой системы. Пусть гаситель имеет массу m, присоединен к точке L пружиной жесткости c и демпфером с коэффициентом вязкого трения h и может перемещаться в направлении единичного вектора $\mathbf{n}$ (фиг. 1). Тогда при помощи безразмерных параметров

$$\theta = \frac{m}{M}, \quad \sigma = \frac{c}{M\Omega_1^2}, \quad z = \frac{h}{M\Omega_1}, \quad \upsilon_0 = \sum_{j=1}^{N_1} [\mathbf{n}^t \mathbf{u}_{0j}(L)]^2, \quad \upsilon_j = \mathbf{n}^t \mathbf{u}_j(L),$$

$$\omega_j = \frac{\Omega_j}{\Omega_1} \ (1 \leqslant j \leqslant N), \quad r = -\frac{\lambda}{\Omega_1} \tag{1}$$

(λ – характеристический показатель) характеристическое уравнение может быть записано в виде

$$r^{2N_1}\left\{\prod_{j=1}^{\tilde{N}}\left[1+\left(\frac{r}{\omega_j}\right)^2\right]\right\}\left[r^2 - z'r + \sigma' + \theta' r^2(-z'r+\sigma')\sum_{j=1}^{N}\frac{\upsilon_j^2}{r^2+\omega_j^2}\right] = 0 \tag{2}$$

($\theta' = \theta(1+\upsilon_0\theta)^{-1}$, $\sigma' = (1+\upsilon_0\theta)\sigma$, $z' = (1+\upsilon_0\theta)z$) что аналогично уравнению, выведенному ранее [5].

Задача оптимизации параметров гасителя может быть сформулирована следующим образом: найти в зависимости от θ' такие σ' и z', чтобы наименьшая из вещественных частей ненулевых корней уравнения (2), мнимые части которых минимальны, была максимально возможной. Если речь идет о гашении первой моды свободных колебаний, а $\theta' \ll 1$, то для достижения этого максимума уравнение (2) должно иметь пару двойных комплексно-сопряженных корней, близких к $\pm i$; вещественные части этих корней равны $n = |\upsilon_1|\sqrt{\theta'}[1 + O(\theta')]/2$. С ростом θ' необходимые условия оптимальности σ' и z' в указанном смысле могут меняться. При $\theta \to \infty$ параметр θ' имеет конечный предел υ_0^{-1}; r, n, σ', z' и размерные параметры связей $c = M\Omega_1^2\sigma'\upsilon_0^{-1}$ и $h = M\Omega_1 z'\upsilon_0^{-1}$ также имеют конечные пределы.

Если к упругой системе присоединен более сложный гаситель, то задача не сводится к случаю $N_1 = 0$. Если гаситель представляет собой совокупность нескольких точечных масс, присоединенных упруговязкими связями к одной и той же точке упругой системы и перемещающихся в одном и том же направлении, и необходимо найти такие значения параметров гасителя, чтобы суммарная масса его была минимальной, а декремент затухания на несокльких первых собственных частотах был не меньше заданного, то задача решается аналогично случаю неподвижной упругой системы. При малых значениях декремента затухания n характеристическое уравнение должно иметь двойные комплексные корни с общей вещественной частью n. Значения масс, образующих гаситель, пропорциональны n^2; в частности, для рассмотренного выше случая θ' и θ равны $4(\upsilon_1^{-1}n)^2[1 + O(n^2)]$ (7).

Рассмотрим в качестве примера упругую систему с $N_1 = N = 1$. Она может состоять из двух точечных масс M_1 и M_2, соединенных пружиной жесткости C; к массе M_1 присоединен точечный гаситель массы m; он и массы M_1 и M_2 могут перемещаться в одной и том же направлении (фиг. 2). В формулах (1) $M = M_1 + M_2$, $\Omega_1 = [(M_1 + M_2)C(M_1M_2)^{-1}]^{1/2}$, а $\upsilon_0 = 1$, $\upsilon_1 = (M_2M_1^{-1})^{1/2}$. Если ввести безразмерные параметры

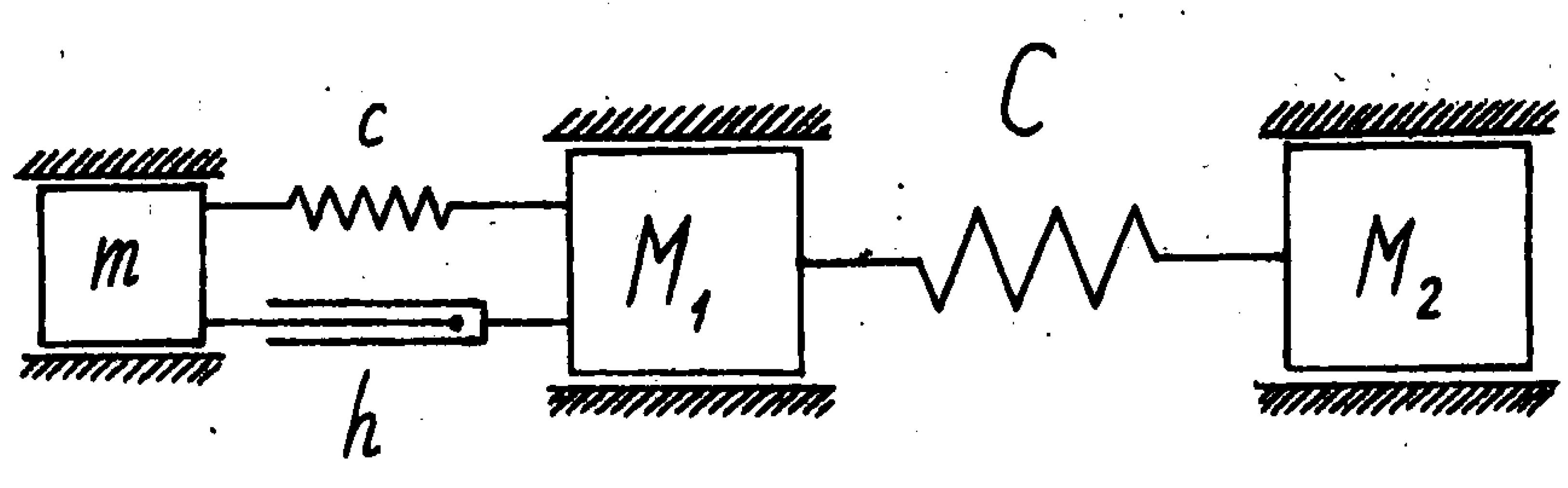
$$\theta'' = \upsilon_1^2\theta' = \frac{mM_2}{M_1(M+m)}, \quad \sigma' = \frac{M_1M_2(M+m)c}{M^2mC}, \quad z' = (M+m)[M_1M_2(M^3C)^{-1}]^{1/2}m^{-1}h$$

то уравнение (2) будет иметь вид

$$r^2\{r^4 - (1+\theta'')z'r^3 + [1 + (1+\theta'')\sigma']r^2 - z'r + \sigma'\} = 0 \tag{3}$$

с точностью до множителя r^2 в левой части аналогичный характеристическому уравнению для неподвижной упругой системы с одной степенью свободы. Безразмерные параметры, вводимые для такой системы [4], совпадают с параметрами уравнения (3) при $M_2 \to \infty$. Если же рассматривать подвижную упругую систему, соединенную упруговязкой связью с неподвижным основанием [8], то параметры ее характеристического уравнения совпадают с θ'', σ', z' при $m \to \infty$.

Было показано [4], что при $\theta'' \leqslant 4$ оптимальное значение безразмерного декремента затухания $n = [\theta''(1+\theta'')^{-1}]^{1/2}/2$, а при $\theta'' > 4$ n – минимальный положительный корень многочлена $(1 + \theta'')^2 n_6 + 3(1 + \theta'')n^4 - 3(\theta'' - 1)n^2 + 1 = 0$ и может быть вычислен по формуле Кардано. При $\theta'' \leqslant 4$ размерный декремент затухания $\varepsilon = \Omega_1 n = \{mC[M_1(M_1 + m)]^{-1}\}^{1/2}/2$ не



Фиг. 2

зависит от M_2, если эта величина достаточно мала, а если

$$mM_1^{-1} \leqslant 4 \tag{4}$$

то декремент ε постоянен при всех M_2. Если M_1, m и C постоянны и соблюдается условие (4), то при $M_2 \to \infty$ оптимальные значения параметров гасителя имеют пределы:

$$\sigma' = \left(\frac{M_1}{M_1+m}\right)^2, \quad z' = 2M_1\left[\frac{m}{(M_1+m)^3}\right]^{1/2}, \quad c = \frac{CmM_1}{(M_1+m)^2}, \quad h = 2\left[CM_1\left(\frac{m}{M_1+m}\right)^3\right]^{1/2}$$

Для тех же M_2, при которых $\theta'' > 4$, ε убывает с ростом M_2.

Рассмотрим случай постоянных M_1, M_2 и C. Тогда величина Ω_1 также постоянна и при тех m, при которых $\theta'' < 4$ (и только при них), n и ε – возрастающие функции m. Если $M_2M_1^{-1} \leqslant 4$, то при всех m имеем $\theta'' < 4$, а при $m \to \infty$ пределы оптимальных значений декремента затухания и параметров гасителя следующие:

$$n = \frac{1}{2}\left(\frac{M_2}{M}\right)^{1/2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{M_1}\right)^{1/2}, \quad \sigma' = \left(\frac{M_1}{M}\right)^2,$$

$$z' = 2M_1\left(\frac{M_2}{M^3}\right)^{1/2}, \quad c = \frac{CM_1}{M_2}, \quad h = 2(CM_1)^{1/2}$$

т.е. ε вдвое меньше собственной частоты массы M_1, если бы она была присоединена пружиной жесткости C к неподвижному основанию. А если бы к нему были присоединены пружинами жесткостей c и C массы M_1 и M_2 соответственно, то собственные частоты этих масс совпадали бы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ден-Гартог Дж.П.* Механические колебания. М.: Физматгиз, 1960. 580 с.
2. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
3. *Коренев Б.Г., Резников Л.М.* Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения. М.: Наука, 1988. 303 с.
4. *Нагаев Р.Ф., Степанов А.В.* Об оптимизации коэффициента затухания свободных колебаний двухмассовой системы // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 24–28.
5. *Степанов А.В.* Об оптимальном линейном гасителе первой моды собственных колебаний консервативных систем // Динамика систем. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1982. С. 80–95.
6. *Степанов А.В.* О выводе характеристического уравнения линейной колебательной системы общего вида с затуханием // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 48–52.
7. *Степанов А.В.* Гашение свободных колебаний упругих систем на несокльких собственных частотах // Волновые задачи механики. Ниж. Новгород: Изд-е Нижегород. фил. ИМаш. РАН., 1992. С. 132–138.
8. *Ларин В.Б.* Выбор параметров системы виброзащиты приборов // Прикл. механика. 1966. Т. 2. № 6. С. 99–104.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
22.VI.1994