ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 59, Вып. 5, 1995

УДК 539.3:534.1

© 1995 г. А.Г. Куликовский

ВЛИЯНИЕ МАЛОЙ АНИЗОТРОПИИ НА СВОЙСТВА УДАРНЫХ ВОЛН В СЖИМАЕМОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Изучается влияние малой анизотропии на поведение ударных волн в сжимаемой упругой среде. Основное внимание уделяется свойствам ударных волн, которые не близки к плоскополяризованным (свойства плоскополяризованных ударных волн меняются мало). Получены некоторые результаты в случае анизотропии произвольного вида при известном поведении ударных волн в средах, отличающихся от рассматриваемой отсутствием анизотропии. Влияние малой анизотропии на поведение ударных волн в несжимаемой упругой среде рассматривалось ранее [1].

1. Постановка задачи. Будем рассматривать одномерные движения упругой среды в предположении, что зависимость внутренней энергии Φ единицы начального объема от производных компонент вектора перемещений w_i по лагранжевой координате x имеет вид [2]

$$\Phi(u_i,S)=F(u_1^2+u_2^2,u_3,S)+gp(u_i,S),\quad d\Phi=\Phi_k du_k+\rho TdS$$
$$\Phi_k=\partial\Phi/\partial u_k,\quad u_i=\partial w_i/\partial x\quad i,k=1,2,3 \tag{1.1}$$

где w_i – компоненты вектора перемещений в декартовой системе координат $x_1, x_2, x_3 = x$, g – параметр, характеризующий анизотропию свойств среды в плоскости волны (параметр волновой анизотропии), который в дальнейшем считается малым, F и p – некоторые функции своих аргументов, ρ – начальная плотность среды, соответствующая $u_3 = 0$, T – температура. Второе уравнение является следствием первого и второго законов термодинамики.

Соотношения, выражающие законы сохранения импульса и энергии, а также условие непрерывности перемещений w_i на разрыве, движущемся со скоростью $dx/dt = W$, можно записать в виде [3]

$$\rho W[\upsilon_k]+[\Phi_k]=0,\quad W[u_k]+[\upsilon_k]=0$$
$$W[\Phi+\rho\upsilon^2/2]+[u_i\Phi_i]=0,\quad \upsilon_k=\partial w_k/\partial t \tag{1.2}$$

Квадратные скобки означают скачок величины: $[F]=F-F^-$, величины с индексом минус соответствуют состоянию перед разрывом, а без индекса – состоянию за разрывом. Из (1.1) и (1.2) следует

$$[F_k]-\rho W^2[u_k]=-g[p_k],\quad [F]-(F_k+F_k^-)[u_k]/2=-g[p]+g(p_k+p_k^-)[u_k]/2$$
$$F_k=\partial F/\partial u_k,\quad p_k=\partial p/\partial u_k \tag{1.3}$$

Будем называть ударной адиабатой (УА) множество состояний u_i среды за ударной волной удовлетворяющих соотношениям (1.2) при заданных u_i^-, s^-. В случае общего положения УА представляет собой кривую в пространстве u_i, в каждой точке которой могут быть найдены W и S.

2. Некоторые свойства ударных волн при отсутствии волновой анизотропии. Ударные волны в случае волновой изотропии ($g = 0$) изучались ранее [3–8]. Упомянем здесь некоторые из относящихся к этому случаю результаты.

Если $g = 0$, то из строения аргументов функции F следует, что УА имеет следующую форму. Через начальную точку A проходит три ветви УА: две из них лежат в плоскости, проходящей через начальную точку А и ось u_3, которую будем называть плоскостью начального состояния, а третья представляет окружность L_A, лежащую в плоскости $u_3 = u_3^-$ с центром в точке $u_1 = 0$, $u_2 = 0$. Разрывы, состояния за которыми u_i лежат в плоскости начального состояния, будем называть плоскополяризованными.

Окружность L_A изображает множество состояний за "вращательным разрывом" с начальным состоянием A. Такой разрв можно также рассматривать [3–8] как предельный случай не меняющей со временем своей формы волны Римана. Энтропия в нем не меняется, а скорость распространения вращательного разрыва постоянна: $W = \text{const}$ на L_A и совпадает с характеристической скоростью по обе стороны разрыва. Пользуясь этим, нетрудно получить $W^2 = F_{22}^-$, если $u_2^- = 0$, или $W^2 = F_{22}$, если $u_2 = 0$ ($F_{22} = \partial^2 F/\partial u_2^2$).

Для плоскополяризованных ударных волн можно, выбрав, например, систему координат, такую что $u_2^- = 0$, $u_2 = 0$, получить уравнения для "плоской" части УА, лежащей в плоскости начального состояния. При этом второе уравнение (1.3), соответствующее проекции на ось x_2, выполняется автоматически и может быть отброшено.

Если двигаться из начальной точки A по одной из плоских ветвей УА, то на ней может найтись точка B, в которой скорость разрыва W_{AB} совпадает со скоростью вращательного разрыва, соответствующего точке B. Тогда к УА будет принадлежать также окружность L_B, изображающая множество состояний за вращательным разрывом из состояния B. При этом ударную волну AB, соответствующую скачку из точки A в точку B, и вращательный разрыв при совпадении их скоростей можно рассматривать как один разрыв. Разрывы с конечными состояниями u_i, лежащими на окружностях L_A и L_B, не являются плоскополяризованными, если $u_i \neq u_i(B)$.

Скорость скачка из точки A в произвольную точку окружности L_B совпадает также со скоростью вращательного скачка из точки A.

Действительно, в рассматриваемую точку окружности L_B можно придти также с помощью вращательного разрыва из точки A и плоскополяризованного скачка в рассматриваемую точку на L_B. Последний разрыв имеет скорость, равную W_{AB}. Из выполнения законов сохранения можно получить, что вращательный разрыв с начальной точкой A имеет ту же скорость. Таким образом, скорость скачка из А в любую точку окружности L_B совпадает со скоростью вращательных волн перед и за этим разрывом.

Отметим, что на всей окружности L_B энтропия постоянна, причем физически допустимы скачки из точки A в точки L_B, если $S_B - S_A \geqslant 0$. Через вторую точку пересечения окружности L_B с начальной плоскостью, проходящей через A и ось u_3, также проходит ветвь плоской части УА, так как в противном случае эта точка была бы изолированной точкой, удовлетворяющей уравнениям для плоской части УА, что не соответствует случаю общего положения.

3. Влияние анизотропии на ударную адиабату. При малом значении $g \neq 0$ плоская часть УА, а также величины W и S получают малые изменения порядка g, причем на величины порядка g могут сдвинуться также концы отрезков эволюционности (точки Жуге) и отрезков, где $[S] \geqslant 0$.

Наибольший интерес представляет влияние малого g на те части УА, которые при $g = 0$ переходят в окружности L_A или L_B, поскольку соответствующие разрывы находятся при $g = 0$ на грани эволюционности (скорость разрыва совпадает со скоростью вращательных волн по обе стороны от разрыва), а точки окружности L_A удовлетворяют, кроме того, условию $[S] = 0$. Все дальнейшее изложение будет посвящено изучению именно таких разрывов, соответствующих при $g = 0$ точкам окружностей L_A или L_B.

Малое изменение, связанное с g, может повлиять на эволюционность разрыва, а для окружности, проходящей через точку A, также на знак $[S]$.

Для малых g произведем линеаризацию по g уравнений (1.3) при учете (1.1), не возмущая начальное состояние и считая возмущения всех величин δu_k, δS, δW^2 порядка g. Оси u_1 и u_2 повернем вокруг оси u_3 и введем тем самым новые переменные u_1', u_2', $u_3' = u_3$ таким образом, чтобы $u_2^{'} = 0$ (при этом $u_2^{'-} \neq 0$ в общем случае). Тогда, обозначая $F_S = \partial F/\partial S$, $F_{iS} = \partial^2 F/\partial u_i' \partial S$, $F_{ij} = \partial^2 F/\partial u_i' \partial u_j'$, при учете равенств $F_{12} = 0$, $F_{23} = 0$, $F_{2S} = 0$, $F_S = \rho T$, $W^2 = F_{22}$ и считая для определенности $\delta u_2' = 0$, получим

$$
\begin{aligned}
&(F_{11} - W^2)\delta u_1' + F_{13}\delta u_3' + F_{1S}\delta S - [u_1']\delta W^2 = -g[p_1'], \quad -[u_2']\delta W^2 = -g[p_2'] \\
&F_{13}\delta u_1' + (F_{33} - W^2)\delta u_3' + F_{3S}\delta S - [u_3']\delta W^2 = -g[p_3'] \\
&([F_1] - F_{1k}[u_k'])\delta u_3' + ([F_3] - F_{3k}[u_k'])\delta u_3' + (2\rho T - F_{Sk}[u_k'])\delta S = \\
&= g\{-2[p] + (p_k' + p_k^{'-})[u_k']\}, \quad p_i' = \partial p / \partial u_i'
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Коэффициенты и правые части в этой системе уравнений считаются известными из нулевого приближения. Система (3.1) позволяет выписать явно решение, выражающее $\delta u_1'$, $\delta u_3'$, δS и δW^2. Особенно простой вид имеет формула

$$\delta W^2 = g[p_2'] / [u_2'] \tag{3.2}$$

следующая из второго равенства (3.1). Величины $\delta u_1'$ и $\delta u_3'$ характеризуют в пространстве u_1', u_2', u_3' искажение окружности, происходящее от влияния анизотропии.

Не пытаясь дать полное исследование этого искажения, отметим, что если при $[u_2'] \to 0$, (т.е. при приближении скачка к плоскополяризованному) величина $[p_2']$ не стремится к нулю, то согласно второму уравнению (3.1) величина δW^2 стремится к бесконечности, т.е. по порядку величины становится больше g. Последнее неверно в окрестности начальной точки A, где отношение $[p_2']/[u_2']$ имеет конечный предел, но является случаем общего положения для других точек пересечения окружностей с плоской частью УА. Во всех остальных уравнениях (3.1), кроме второго, при $\delta W^2 \to \infty$ можно пренебречь правыми частями, а влияние анизотропи скажется только через величину δW^2, определенную из (3.2). Если принять такое приближение, то первое, третье и четвертое уравнения (3.1) будут давать изменение положения точки на УА такое же, какое было при $g = 0$ на плоской части УА том же значении δW^2.

Если при $g = 0$ точка B не соответствовала экстремуму W^2, то при $g \neq 0$ приближение по пространственной части УА точки, изображающей состояние за скачком, к плоскости начального состояния сопровождается движением вдоль плоской части УА (соответствующей $g = 0$), направление которого определяется знаком δW^2 и разлчно при приближении к этой плоскости с разных сторон, если $[p_2'] \neq 0$. Таким образом, имеющие место при $g = 0$ пересечения окружности и плоской части УА, которые имеют место в точке B и в точках, симметричных точкам A и B относительно оси u_3, размыкаются при $g \neq 0$, и при малых g в окрестностях этих точек УА напоминает гиперболу, распоожение ветвей которой определяется знаком $[p_2']$ и направлением изменения W^2 вдоль плоской части УА при $g = 0$.

Напомним, что равенства (3.1) и (3.2) написаны в системе координат u_1', u_2', u_3', в которой $u_2 = 0$. В другой системе координат u_1, u_2, u_3, отличающейся от использованной выше поворотом вокруг оси u_3, компоненты векторов с индексами 1 и 2 испытают ортогональное преобразование.

Если для такой системы координат u_1, u_2, u_3 принять условие $u_2^- = 0$, то равенство (3.2) примет вид

$$\delta W^2 = g\frac{[p_1]\cos\vartheta + [p_2]\sin\vartheta}{R\sin\vartheta}$$

$$R^2 = (u_1^-)^2 + (u_2^-)^2, \qquad \vartheta = \operatorname{arctg}(u_2 / u_1) \tag{3.3}$$

4. Влияние анизотропии на изменение энтропии в ударной волне. Если домножить первое уравнение (3.1) на $[u_1']/2$, третье на $[u_3']/2$ и сложить с четвертым, то получим

$$T\delta S = g\{-[p] + p_1'^-[u_1'] + p_3'^-[u_3']\} + \delta W^2([u_1']^2 + [u_3']^2 / 2 \tag{4.1}$$

Для части УА, которая при $g = 0$ обращается в окружность, не проходящую через начальную точку A, величина δS, вычисляемая с помощью этого равенства, дает лишь малую поправку к изменению энтропии $[S]$ в ударной волне и поэтому не может повлиять на знак этого изменения.

Для ударной волны, соответствующей при $g = 0$ вращательной волне из точки $A([u_3'] = [u_3] = 0)$ с поворотом вектора u_1, u_2 на угол ϑ против часовой стрелки вокруг оси u_3, получим

$$\rho T\delta S = g\{-[p] + (p_1^- \cos\vartheta + p_2^- \sin\vartheta)(1 - \cos\vartheta)R\} + \delta W^2 R^2(1 - \cos\vartheta)^2 / 2 \tag{4.2}$$

Это равенство записано в той же системе координат, связанной с начальным состоянием, что и равенство (3.3). Неравенство $\delta S \geqslant 0$ выделяет физически допустимые разрывы. При заданной функции $p(u_1, S)$, которую в (4.2) следует брать на окружности L_A, т.е. при $S = S^-$, это неравенство легко может быть исследовано и отрезки УА с $\delta S \geqslant 0$ найдены.

Для получения дополнительных сведений о значениях энтропии в точках УА полезно также общее соотношение, не связанное с малостью g

$$\frac{T}{W}\frac{dS}{dW} = \sum_{i=1}^{3}[u_i]^2 \tag{4.3}$$

(производная берется на УА по скорости ударной волны W). Для вывода этого соотношения следует продифференцировать равенства (1.2) по W, считая u_i^- постоянными, а затем сложить последнее из получившихся равенств с первыми тремя, домноженными на $-v_i$, и следующими тремя, домноженными на $-\Phi_i$. Соотношение, подобное (4.3), было получено ранее [6]. При малых g для части УА, переходящей при $g \to 0$ в окружность, множитель T/W можно считать постоянным.

5. Влияние анизотропии на эволюционность разрывов. При формулировании условий эволюционности разрыва при $g \neq 0$ будем считать, что и в начальном и в конечном состоянии характеристические скорости различаются между собой на величины, не обращающиеся в нуль при $g = 0$. Соотношения на разрыве даются равенствами (1.2) или (1.3). Тогда при малых g условия эволюционности для части УА, близкой к окружности, можно сформулировать в виде условий, накладываемых на знаки величины $\delta W^2 - \delta c_\vartheta^2$ по обе стороны от разрыва, причем под c_ϑ понимается характеристическая скорость волны, которая при $g = 0$ становится вращательной. Будем считать, что перед и за скачком характеристические скорости пронумерованы в порядке возрастания их величины, так что c_ϑ может означать c_1, c_2 или c_3 в зависимости от соотношений между характеристическими скоростями. Тогда условия эволюционности записываются в виде

$$(\delta W^2 - \delta c_\vartheta^2)^- \geqslant 0, \quad (\delta W^2 - \delta c_\vartheta^2)^+ \leqslant 0 \tag{5.1}$$

$$(\delta W^2 - \delta c_\vartheta^2)^-(\delta W^2 - \delta c_\vartheta^2)^+ \geqslant 0 \tag{5.2}$$

$$(\delta W^2 - \delta c_\vartheta^2)^- \leqslant 0, \quad (\delta W^2 - \delta c_\vartheta^2)^+ \geqslant 0 \tag{5.3}$$

Система из двух неравенств (5.1) дает условия эволюционности, если c_ϑ имеет один и тот же номер по разные стороны от разрыва, неравенство (5.2) относится к случаю, когда номер c_ϑ за разрывом на единицу меньше ее номера перед разрывом, и наконец, система (5.3) относится к случаю, когда $c_\vartheta^- = c_3^-$, $c_\vartheta^+ = c_1^+$. Если номер c_ϑ за разрывом больше соответствующего номера перед ней, то рассматриваемая ударная волна неэволюционна.

Рассматривая бесконечно малый квазивращательный разрыв в точке A, получим $(\delta c^2)^- = (dp_2/du_2)_A$. Здесь индекс минус указывает на то, что производная взята в начальной точке вдоль соответствующей ветви УА. Это выражение, а также равенства (3.2) или (3.3) позволяют определить знак величины $(\delta W^2 - \delta c_\vartheta^2)^-$ в каждой точке рассматриваемой части УА.

Для завершения рассмотрения неравенств (5.1)–(5.3) отметим, что величина $(\delta W - \delta c_\vartheta)^+$ обращается в нуль и меняет знак на УА в точках, в которых W достигает экстремума [6] (точки Жуге). На квазивращательной части, где $W = \delta W + \text{const}$, знак $(\delta W - \delta c_\vartheta)^+$ определяется знаком производной от δW, взятой вдоль УА. Чтобы узнать, совпадают эти знаки или противоположны, достаточно их определить вдоль УА, соответствующей $g = 0$, вблизи точки B.

Для определения знака $(\delta W - \delta c_\vartheta)^+$ воспользуемся следующим соображением, основанном на равенстве (4.3). Вблизи максимумов и минимумов скорости существуют близкие пары точек, соответствующие одному и тому же значению W (близкому к экстремальному). Эти точки могут представлять начальное и конечное состояние для разрыва малой амплитуды, соответствующего скорости W, причем из двух этих точек начальное состояние соответствует меньшему значению энтропии S, а конечное – большему значению S. В начальном состоянии $\delta W - \delta c_\vartheta > 0$, а в конечном $\delta W - \delta c_\vartheta < 0$ [9]. Воспользовавшись видом правой части в (4.3), можно заключить, что знак $\delta W - \delta c_\vartheta$ меняется при переходе через минимум W (совпадающий с минимумом S) с минуса на плюс, если двигаться по УА в сторону увеличения $[u_1]^2 + [u_2]^2 + [u_3]^2$. В окрестности максимума W (и S) происходит противоположное изменение знака разности $\delta W - \delta c_\vartheta$.

Таким образом, легко могут быть определены знаки величин, входящих в соотношения (5.1)–(5.3), что позволяет судить об эволюционности изучаемых разрывов. Кроме условий эволюционности, для реальных разрывов должно одновременно выполнятья условие неубывания энтропии, для проверки которого служит равенство (4.1) или (4.2).

Автор благодарит Е.И. Свешникову за обсуждение и советы. Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (МДМ 000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свешникова Е.И.* Ударные волны в слабоанизотропном упругом несжимаемом материале. // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 144–153.
2. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Волны Римана в упругой среде при малой анизотропии. // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 3. С. 90–101.
3. *Бленд Д.Р.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
4. *Куликовский А.Г., Любимов Г.А.* Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.
5. *Hanyga A.* Shear waves I–III // Publs. Inst. Geophys. Pol. Acad. Sci. 1975. № 87. P. 1–61.
6. *Hanyga A.* On the solution to the Riemann problem for arbitrary hyperbolic system of conservation laws // Publs. Inst. Geophys. Pol. Acad. Sci. A 1976. № 1(98). 123 P.
7. *Ленский Э.В.*Об ударной адиабате плоского продольносдвигового разрыва. // Вест. МГУ. Сер. Математика, механика. 1981. № 1. С. 94–86.
8. *Ленский Э.В.* Плоские волны сжатия – сдвига в нелинейноупругой несжимаемой среде. Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 6. С. 90–98.
9. *Lax P.* Hyperbolic system of conservation laws. II // Comm. Pure and Appl. Math. 1957. V. 10., № 4. P. 537–566

Москва

Поступила в редакцию
28.VII.1994