

УДК 539.3

© 1995 г. С.А. Гришин

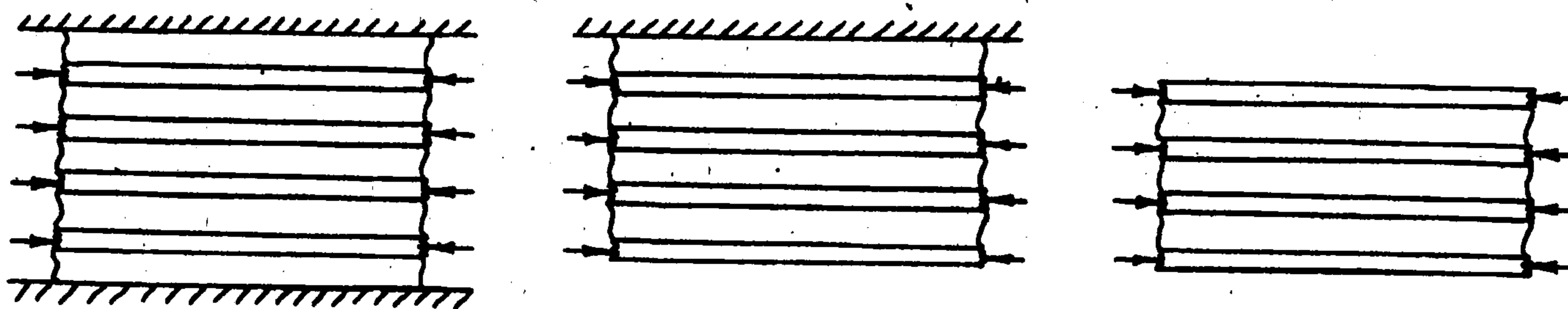
**ЗАДАЧИ С ТЁПЛИЦЕВОЙ И КВАЗИТЁПЛИЦЕВЫМИ
МАТРИЦАМИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ
АНАЛИЗЕ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ**

Рассмотрены три задачи статической устойчивости слоистых упругих систем, допускающие полное аналитическое исследование. Такие системы представляют собой пачки, составленные из произвольного числа одинаковых бесконечных пластинок, скрепленных одинаковыми слоями мягкой среды, моделируемой как основание Винклера. Задачи различаются характером краевых условий на лицевых поверхностях пачек. Каждая лицевая поверхность может быть либо свободной, либо сцепленной с недеформируемым основанием. Всюду ищется плоская форма гофра. Во всех случаях величина критической силы, весь спектр нагрузок и форм потери устойчивости даются простыми явными формулами.

1. Случай тёплицевой матрицы. Рассмотрим в плоской постановке задачу об устойчивости пластинок пакета, изображенного на фиг. 1, а. Пакет состоит из n -пластинок толщины h каждая, выполненных из жесткого материала (с модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν), сцепленных по лицевым поверхностям с $n + 1$ слоем толщины H каждый из мягкого материала (с характеристиками G_p, ν_p). Самый верхний и самый нижний из мягких слоев сцеплены с недеформируемыми обкладками. Ось x декартовой системы координат направлена на нас, ось y – вправо, ось z – вверх. Шириной будем называть размер пакета по x , длиной – по y , высотой – по z . Вдоль оси y на каждую пластинку действует сжимающее усилие T на единицу ширины. Пластинки занумерованы снизу вверх индексом $i = 1, \dots, n$. При необходимости значения индекса $i = 0, n + 1$ приписываем обкладкам. Цилиндрическая жесткость каждой пластинки вычисляется по формуле [1–3]

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Прогибы пластин w_i от действия усилия T подчинены уравнению [1–3] (штрих –



дифференцирование по y):

$$Dw_i'''' + Tw_i'' = q_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.1)$$

Поперечная нагрузка на i -ю пластинку q_i складывается из нагрузок со стороны выше- и нижележащего мягких слоев: q_i^+ и q_i^- . Для мягких слоев принимается гипотеза Винклера $q = -\beta w$ с коэффициентом постели β . При этом, естественно, $q_i^+ = -q_{i+1}^-$: мягкие слои "не перераспределяют" давление по оси y . Имеем

$$q_i = q_i^+ + q_i^-, \quad q_i^+ = -\beta(w_i - w_{i+1}), \quad q_i^- = -\beta(w_i - w_{i-1}) \quad (1.2)$$

Отметим, что усилия пропорциональны *разности* прогибов соседних пластинок, а жесткость среды по отношению к малому изгибанию дается формулой

$$\beta = \frac{G_p}{H(1 - \nu_p)} \quad (1.3)$$

Поскольку обкладки недеформируемы,

$$w_0 = w_{n+1} = 0 \quad (1.4)$$

и для нижней и верхней пластинок будет

$$q_1^- = -\beta w_1, \quad q_n^+ = -\beta w_n \quad (1.5)$$

Подстановка (1.2) в (1.1) при учете (1.4) приводит к основной системе уравнений

$$Dw_i'''' + Tw_i'' + \beta(-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1}) = 0 \quad (1.6)$$

Это линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Потере устойчивости (гофрированию) пластинок отвечает ее нетривиальное решение. Разделив для удобства каждое из уравнений на ненулевой множитель β , запишем характеристическую матрицу системы

$$\left\| \begin{array}{ccccccc} \zeta & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \zeta & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \zeta & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \zeta & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \zeta & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & \zeta \end{array} \right\|, \quad \zeta = \frac{D}{\beta} \lambda^4 + \frac{T}{\beta} \lambda^2 + 2 \quad (1.7)$$

На время забудем о связи ζ и λ , посмотрим на матрицу (1.7) как на функцию комплексного переменного ζ и найдем все корни ζ_k уравнения $d_k = 0$, в котором d_n — определитель $(n \times n)$ -матрицы (1.7). Разлагая по первому (или по последнему) столбцу (или строке), устанавливаем рекуррентное соотношение

$$d_n = \zeta d_{n-1} - d_{n-2} \quad (1.8)$$

где d_{n-1} , d_{n-2} — определители аналогичных матриц размера, указанного индексом. Техника, которой следует ниже, работает для любого рекуррентного соотношения типа (1.8) и изложена, например, в [4].

Пусть удалось переписать (1.8) в виде

$$d_n = (a + b)d_{n-1} - abd_{n-2} \quad (1.9)$$

т.е. удалось найти такие два комплексные числа a и b , что

$$\zeta = a + b, \quad ab = 1 \quad (1.10)$$

Тогда, перегруппировав слагаемые в (1.9) двумя способами, получим

$$(d_n - ad_{n-1}) = b(d_{n-1} - ad_{n-2}), \quad (d_n - bd_{n-1}) = a(d_{n-1} - bd_{n-2}) \quad (1.11)$$

Глядя на (1.11) как на рекуррентные соотношения (геометрические прогрессии) относительно разностей, стоящих в скобках, и применяя эти соотношения повторно, приведем к формулам

$$(d_n - ad_{n-1}) = b^{n-2}(d_2 - ad_1), \quad (d_n - bd_{n-1}) = a^{n-2}(d_2 - bd_1) \quad (1.12)$$

Все величины в правых частях (1.12) легко выражаются через ζ :

$$d_2 = \zeta^2 - 1, \quad d_1 = \zeta \quad (1.13)$$

а a и b – корни квадратного уравнения

$$X^2 - \zeta X + 1 = 0 \quad (1.14)$$

При $a \neq b$, исключив d_{n-1} из (1.12), получим

$$d_n = (a^{n-1}(d_2 - bd_1) - b^{n-1}(d_2 - ad_1))/(a - b) \quad (1.15)$$

Подставив (1.10) в (1.13), от (1.15) придем к формуле:

$$d_n = (a^{n-1} - b^{n-1})/(a - b) \quad (1.16)$$

Далее удобно воспользоваться показательной формой записи комплексного числа

$$a = |a| e^{i\varphi}, \quad b = |b| e^{i\psi} \quad (1.17)$$

где φ и ψ – главные значения аргумента на комплексной плоскости с разрезом по отрицательной полуоси. Условие $ab = 1$ дает

$$|a| = 1/|b|, \quad \psi = -\varphi \quad (1.18)$$

Вычислив степени правых частей (1.17), подставив их в (1.16) и воспользовавшись формулой Эйлера с учетом равенства $\psi = -\varphi$, получим

$$d_n = \frac{(|a|^{n+1} - |b|^{n+1}) \cos(n+1)\varphi + i(|a|^{n+1} + |b|^{n+1}) \sin(n+1)\varphi}{(|a| - |b|) \cos \varphi + i(|a| + |b|) \sin \varphi} \quad (1.19)$$

Знаменатель обращается в нуль только при $|a| = |b|$ и $\sin \varphi = 0$. Числитель обращается в нуль только при $|a| = |b|$ и $\sin(n+1)\varphi = 0$. Таким образом, сопоставив с первой формулой (1.18), заключим, что d_n обращается в нуль только при условиях

$$|a| = |b| = 1, \quad \sin(n+1)\varphi = 0, \quad \sin \varphi \neq 0 \quad (1.20)$$

откуда следует, что

$$\varphi = \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n \quad (1.21)$$

независимо от значения ζ , а числа a и b комплексно сопряжены. Поэтому из условия $\zeta = a + b$ вытекает:

$$\zeta = 2\operatorname{Re}a = 2\operatorname{Re}b \quad (1.22)$$

или, с учетом формулы Эйлера и (1.21):

$$\zeta_k = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, \dots, n \quad (1.23)$$

Формула (1.23) содержит ровно n различных корней ζ_k уравнения $d_n = 0$. Поскольку d_n – многочлен от ζ степени n , других корней нет. Случай $a = b$, опущенный ранее,

можно не рассматривать, хотя такое рассмотрение трудностей не представляет и приводит к уравнению, не имеющему корней.

Теперь обратимся к связи (1.7) между ζ и λ . Подставив значения ζ_k из (1.23) вместо ζ в эту формулу, получим n независимых биквадратных уравнений относительно λ

$$\frac{D}{\beta} \lambda^4 + \frac{T}{\beta} \lambda^2 + 2 - \zeta_k = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (1.24)$$

При любом $k = 1, \dots, n$ свободный член левой части (1.24) положителен. Поэтому из анализа движения корней по комплексной плоскости при возрастании T от нуля или же из условия кратности корней λ^2 получим n равенств

$$T_k = 2[D\beta(2 - \zeta_k)]^{1/2}, \quad k = 1, \dots, n \quad (1.25)$$

Очевидно, наименьшее из n значений T_k достигается при $k = 1$ и равно

$$T_*^n = T_1 = 2 \left[2D\beta \left(1 - \cos \frac{\pi}{n+1} \right) \right]^{1/2} \quad (1.26)$$

Индекс n здесь означает, что в пакете n пластинок, а звездочка – это что критическое значение нагрузки.

Выразив D, β через упругие постоянные и воспользовавшись равенством $E = 2G(1 + \nu)$, получим

$$T_*^n = \left[1 - \cos \frac{\pi}{n+1} \right]^{1/2} T_*^1, \quad T_*^1 = 2 \left[\frac{1}{3} \frac{G_p}{(1 - \nu_p)} \frac{G}{(1 - \nu)} \frac{h_i^3}{H} \right]^{1/2} \quad (1.27)$$

С ростом n до бесконечности критическая сила стремится к нулю. При изменении n от 1 до 20 ее значение уменьшается на порядок.

Форма потери устойчивости для произвольной пластинки пакета будет синусоидной с длиной полуволны

$$l_* = \frac{\pi}{\lambda_*} = \pi \left[\frac{D}{\beta} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n+1} \right)^{-1} \right]^{1/4} \quad (1.28)$$

Важно подчеркнуть, что период синусоиды – один и тот же для всех пластинок имитатора. Отличаются они только амплитудой. Распределение амплитуд в зависимости от номера пластинки полностью задается собственным вектором матрицы (1.7), определяемым как всегда с точностью до нормировки. Компоненты W_j собственного вектора, отвечающего ζ_k , даются формулой

$$W_j^k = \sin \frac{jk\pi}{n+1}, \quad j, k = 1, \dots, n \quad (1.29)$$

из которой видно, что знак всех компонент собственного вектора, соответствующего ζ_1 , один и тот же. Такая форма потери устойчивости называется *синфазной* [5]: вогнутости лежат под вогнутостями, выпуклости – под выпуклостями. Амплитуда прогиба пластинки тем меньше, чем ближе пластинка расположена к обкладке. Для более высоких форм это уже не так.

Формула (1.28) показывает, что чем больше число пластинок в имитаторе, тем крупнее гофр, образующийся в пакете. Критическая длина волны стремится к бесконечности при неограниченном увеличении числа пластинок. При изменении n от 1 до 20 ее значение увеличивается в 3 раза.

Расшифровав D и β , перепишем (1.28) так (смысл индексов здесь тот же, что и в (1.26)):

$$l_*^n = \pi \left(1 - \cos \frac{\pi}{n+1} \right)^{1/4} \left[\frac{1}{6} \frac{G}{G_p} \frac{1-\nu_p}{1-\nu} h^3 H \right]^{1/4} \quad (1.30)$$

Если мыслить пакет фиг. 1, а как пачку полосок единичной ширины, в подкоренные выражения (1.25), (1.30) следует ввести множитель $1/(1-\nu^2)$. Его роль незначительна.

2. Задачи с квазитёплицевыми матрицами. Квадратная матрица M , элементы которой m_{ij} зависят только от разности индексов $i-j$, называется *тёплицевой* [6, 7]. На фиксированной диагонали такой матрицы стоит во всех позициях один и тот же элемент. Матрица (1.7) – трёхдиагональная симметричная тёплицева полиномиальная матрица. *Квазитёплицевыми* называют [7] матрицы, отличающиеся от тёплицевых лишь тем, что первый и последний элементы главной диагонали могут быть произвольными, отличными от основного элемента, образующего эту диагональ. К задачам с характеристическими матрицами такого вида приводят различные постановки (например, можно взять толщины и упругие свойства самого нижнего и самого верхнего мягких слоев отличными от характеристик промежуточных мягких слоев). Ниже рассмотрены два крайних случая: пакета, не сцепленного с одной из обкладок, и пакета, свободного и сверху и снизу (фиг. 1, б и фиг. 1, в соответственно). Такие задачи могут быть полезными в механике слоистых композитов.

Сначала рассмотрим задачу, соответствующую фиг. 1, в. В обозначениях разд. 1 для нее

$$\bar{q}_1 = q_n^+ = 0 \quad (2.1)$$

$$Dw_1'''' + Tw_1'' + \beta(w_1 - w_2) = 0$$

$$Dw_i'''' + Tw_i'' + \beta(-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1}) = 0, \quad i = 2, \dots, n-1$$

$$Dw_n'''' + Tw_n'' + \beta(w_n - w_{n-1}) = 0 \quad (2.2)$$

После деления всех уравнений на β характеристическая матрица отличается от (1.7) лишь тем, что самый первый и самый последний элементы главной диагонали заменены на $\xi = \zeta - 1$. Как и прежде, введем комплексные переменные a, b условиями

$$\zeta = a + b, \quad \xi = ab \quad (2.3)$$

Определители различных порядков обозначаем d_n . Для них имеем

$$d_1 = \xi, \quad d_2 = \xi\zeta - 1$$

$$d_i = \zeta d_{i-1} - d_{i-2}, \quad i = 3, \dots, n-1; \quad d_n = \xi d_{n-1} - d_{n-2} \quad (2.4)$$

При $a \neq b$ согласно (1.15)

$$d_i = (b^{i-1}(d_2 - ad_1) - a^{i-1}(d_2 - bd_1)) / (b - a), \quad i = 3, \dots, n-1 \quad (2.5)$$

И из рекуррентного соотношения (2.4) для d_n с учетом равенств (2.3) получаем

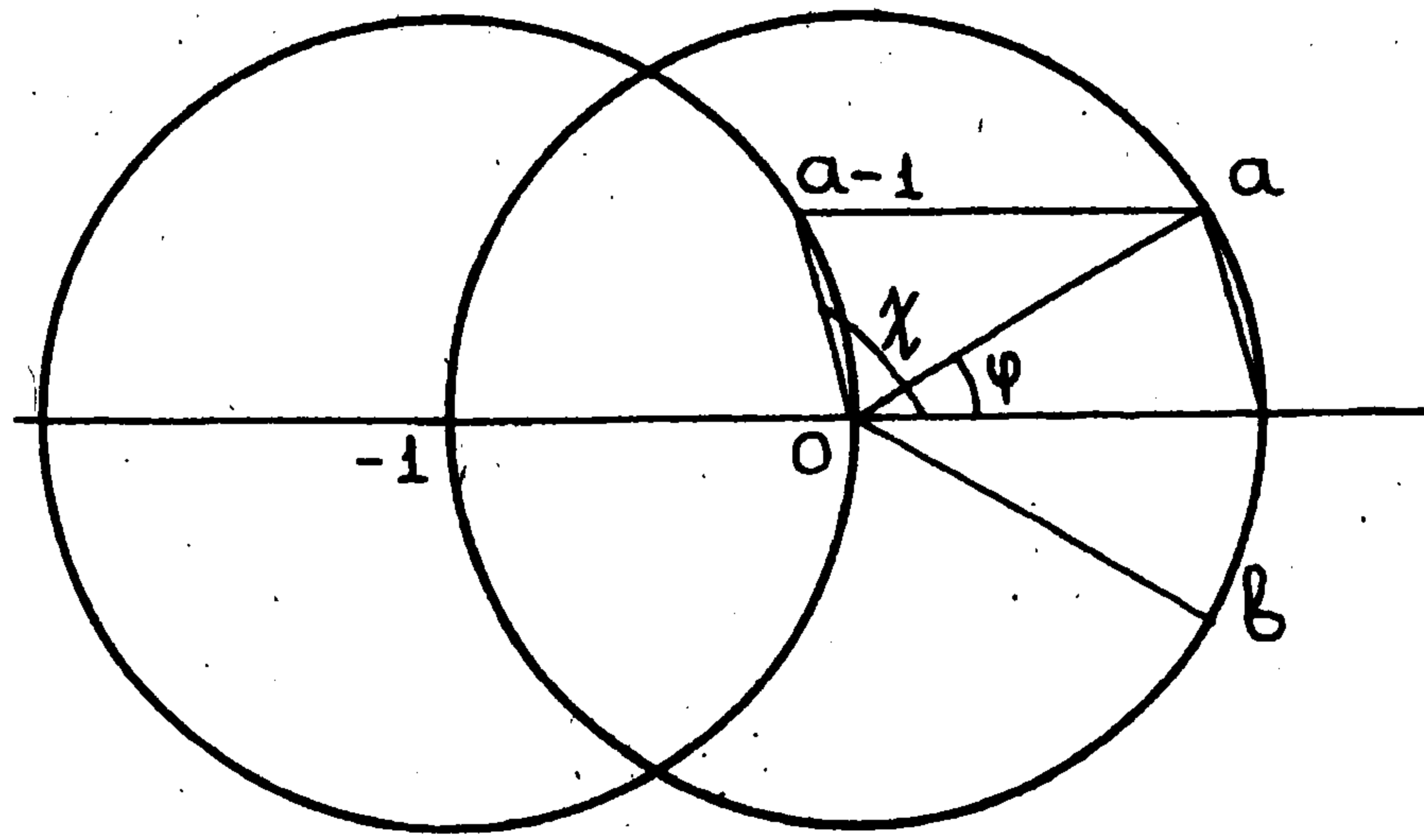
$$d_n = (b^{n-1}(\xi - a)^2 - a^{n-1}(\xi - b)^2) / (b - a) = (b^{n-1}(b-1)^2 - a^{n-1}(a-1)^2) / (b - a) \quad (2.6)$$

Предположив $|a| = |b|$, из (2.3) немедленно получим $b = \bar{a}$, поэтому $b - 1 = \overline{a - 1}$, $-\arg b = \arg a \equiv \varphi$, $b - a = -2\text{Im}a$. Элементарным геометрическим рассмотрением фиг. 2 устанавливаем важное равенство

$$\chi \equiv \arg(a - 1) = \pi - (\pi - \varphi) / 2 = (\pi + \varphi) / 2 \quad (2.7)$$

и переписываем (2.6) так:

$$d_n = \frac{|a-1|^2 \sin(2\chi + (n-1)\varphi)}{|a| \sin \varphi} \quad (2.8)$$



Фиг. 2

Уравнение $d_n = 0$ дает множество углов
 $2\chi + (n-1)\varphi = k\pi, \quad \varphi \neq j\pi, \quad k, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (2.9)

Выразив χ из (2.7), получим
 $\varphi = k\pi / n, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \cap (k \neq 0, \pm n, \pm 2n, \dots)$ (2.10)

Тогда, поскольку $\zeta = a + b = 2\operatorname{Re}a$, корнями уравнения $d_n = 0$ будут

$$\zeta_k = 2 \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 1, \dots, n-1$$
 (2.11)

причем все прочие значения k из списка (2.10) не дадут новых ζ_k , сверх написанных в (2.11). Переменная $\xi = \zeta - 1$ является функцией основной переменной ζ , и d_n рассматривается как многочлен степени n от ζ над полем комплексных чисел. Формула (2.11) содержит только $n-1$ различных значений корня многочлена d_n . Последний корень найдем, рассмотрев игнорированный ранее случай $a = b$.

При $a = b$ уравнения (1.11) совпадают и имеют вид

$$(d_i - ad_{i-1}) = a(d_{i-1} - ad_{i-2}), \quad i = 3, \dots, n-1$$
 (2.12)

Рассматривая (2.12) как рекуррентное соотношение относительно выражений в скобках и применяя его повторно, получим

$$d_i - ad_{i-1} = a^{i-2}(d_2 - ad_1)$$
 (2.13)

Запишем (2.13), заменив индекс i на $i-1$, и подставим выражение для d_{i-1} в (2.13). Тогда получим

$$d_i = a^2 d_{i-2} + 2a^{i-2}(d_2 - ad_1)$$
 (2.14)

Повторяя те же рассуждения, приходим к формуле

$$d_i = (i-1)a^{i-2}d_2 - (i-2)a^{i-1}d_1, \quad i = 3, \dots, n-1$$
 (2.15)

Подставив (2.15) при $i = n-1, i = n-2$ в рекуррентное соотношение (2.4) для d_n , будем иметь

$$d_n = (\xi(n-2) - (n-3)a)a^{n-3}d_2 - (\xi(n-3) - (n-4)a)a^{n-2}d_1$$
 (2.16)

Вычислим при $a = b$:

$$\xi = 2a - 1, \quad d_1 = 2a - 1, \quad d_2 = 4a^2 - 2a - 1$$
 (2.17)

Подставим (2.17) в (2.16) и после преобразований получим

$$d_n = (a-1)a^{n-3}(n(2a+1)(a-1) + 2(a+1))$$
 (2.18)

Уравнение $d_n = 0$ имеет простой корень $a = 1$, корень $a = 0$ кратности $n - 3$ и корни $a = (n - 2 \pm [(n - 2)(9n - 2)]^{1/2}) / 4n$ (2.19)

Из них только $a = 1$ удовлетворяет условию $a^2 = 1$. Ему отвечает в силу (2.3) значение

$$\zeta_0 = 2 \quad (2.20)$$

В совокупности формулы (2.11) и (2.20) определяют ровно n различных корней характеристического уравнения.

Обратимся к анализу устойчивости свободного пакета.

При $n = 1$ уравнение

$$D\lambda^4 + T\lambda^2 = 0 \quad (2.21)$$

дает $\lambda^2 = 0$ и $-T = D\lambda^2$. Экстремальные значения: $\lambda_*^2 = 0$, $T_* = 0$. Равновесие невозможно ни при какой конечной силе T .

При $n = 2$ характеристическое уравнение $\xi^2 - 1 = 0$ дает корни $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = -1$. Первый из них приводит к уравнению (2.21), откуда $\lambda_*^2 = T_* = 0$. Второй же доставляет уравнение

$$D\lambda^4 + T\lambda^2 + 2\beta = 0 \quad (2.22)$$

приводящее к критическим значениям

$$\lambda_*^2 = (2\beta / D)^{1/2}, \quad T_* = 2(2D\beta)^{1/2} \quad (2.23)$$

Равновесие по-прежнему невозможно для ненулевой силы T , но существует нетривиальная "вторая мода".

При $n = 3$ и более, записав (2.11), (2.20) одной формулой (2.11) с индексом $k = 0, \dots, n - 1$, получим n уравнений

$$D\lambda^4 + T\lambda^2 + 2\beta \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n}\right) = 0, \quad k = 0, \dots, n - 1 \quad (2.24)$$

из которых стандартной процедурой определяем

$$\lambda_*^2 = \left[\frac{2\beta}{D} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n}\right) \right]^{1/2}, \quad T_* = 2 \left[2D\beta \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n}\right) \right]^{1/2} \quad (2.25)$$

$$k = 0, \dots, n - 1$$

Скобки под радикалами обращаются в нуль при $k = 0$, поэтому равновесие невозможно ни при каких $T \neq 0$.

Все эти выводы подтверждают физическую интуицию и известные результаты для бесконечного стержня.

Подставляя ζ_j и ζ в характеристическую матрицу системы (2.2), получим n вырожденных числовых матриц. Каждая из них переводит в нуль некоторый числовой вектор $(W_1^j, \dots, W_n^j)^T$, который называем собственным и определением компонент которого сейчас займемся.

Для $\zeta_0 = 2$ решение очевидно:

$$W_i^0 = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.26)$$

Компоненты W_i^j при $j = 1, \dots, n - 1$ ищем в виде

$$W_i^j = A \sin i \frac{j\pi}{n} + B \cos i \frac{j\pi}{n}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.27)$$

с неопределенными коэффициентами A и B . Подставив (2.27) в j -ю матрицу, после преобразований увидим, что уравнения со второго по $n - 1$ -е удовлетворяются тождественно для любых A, B . Первое и последнее уравнения совпадут и позволят найти отношение

$$\frac{B}{A} = \operatorname{ctg} \frac{j\pi}{2n} \quad (2.28)$$

Отсюда, подставляя (2.28) в (2.27) с точностью до нормировки

$$W_i^j = \cos \frac{(2i-1)j}{2n} \pi, \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, n-1 \quad (2.29)$$

Смысл W_i^j – амплитуда гофра i -й пластинки в j -й моде для пакета с n пластинками. Вид собственных форм потери устойчивости для некоторых n и j изображен на фиг. 3.

Таким образом, случай свободного пакета полностью исследуется аналитически. Все критические параметры и соответствующие формы гофрирования даются явными формулами в элементарных функциях.

Обратимся к случаю фиг. 1, б пакета, сцепленного с недеформируемой обкладкой только сверху. Для него

$$\bar{q}_0 = 0, \quad w_{n+1} = 0 \quad (2.30)$$

Справедливо первое из уравнений (2.2) и второе при $i = 2, \dots, n$. Характеристическая матрица отличается от (1.7) только тем, что самый первый элемент главной диагонали есть $\xi = \zeta - 1$. При $a \neq b$ аналогично (2.8) получаем

$$d_n = \frac{|a-1| \sin(\chi + n\varphi)}{|a| \sin \varphi} \quad (2.31)$$

Отсюда аналогично (2.10)

$$\varphi = \frac{2k-1}{2n+1} \pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \cap \left(\frac{2k-1}{2n+1} \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right) \quad (2.32)$$

Подобно (2.11)

$$\zeta_k = 2 \cos \frac{2k-1}{2n+1} \pi, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.33)$$

В отличие от предыдущего, список значений k (2.32) был сокращен из соображений попадания φ в интервал $(-\pi, \pi)$. Формула (2.33) содержит n различных корней уравнения $d_n = 0$. Случай $a = b$ приводит к многочлену

$$d_n = a^{n-2}((2a^2 - a - 1)n + 1) \quad (2.34)$$

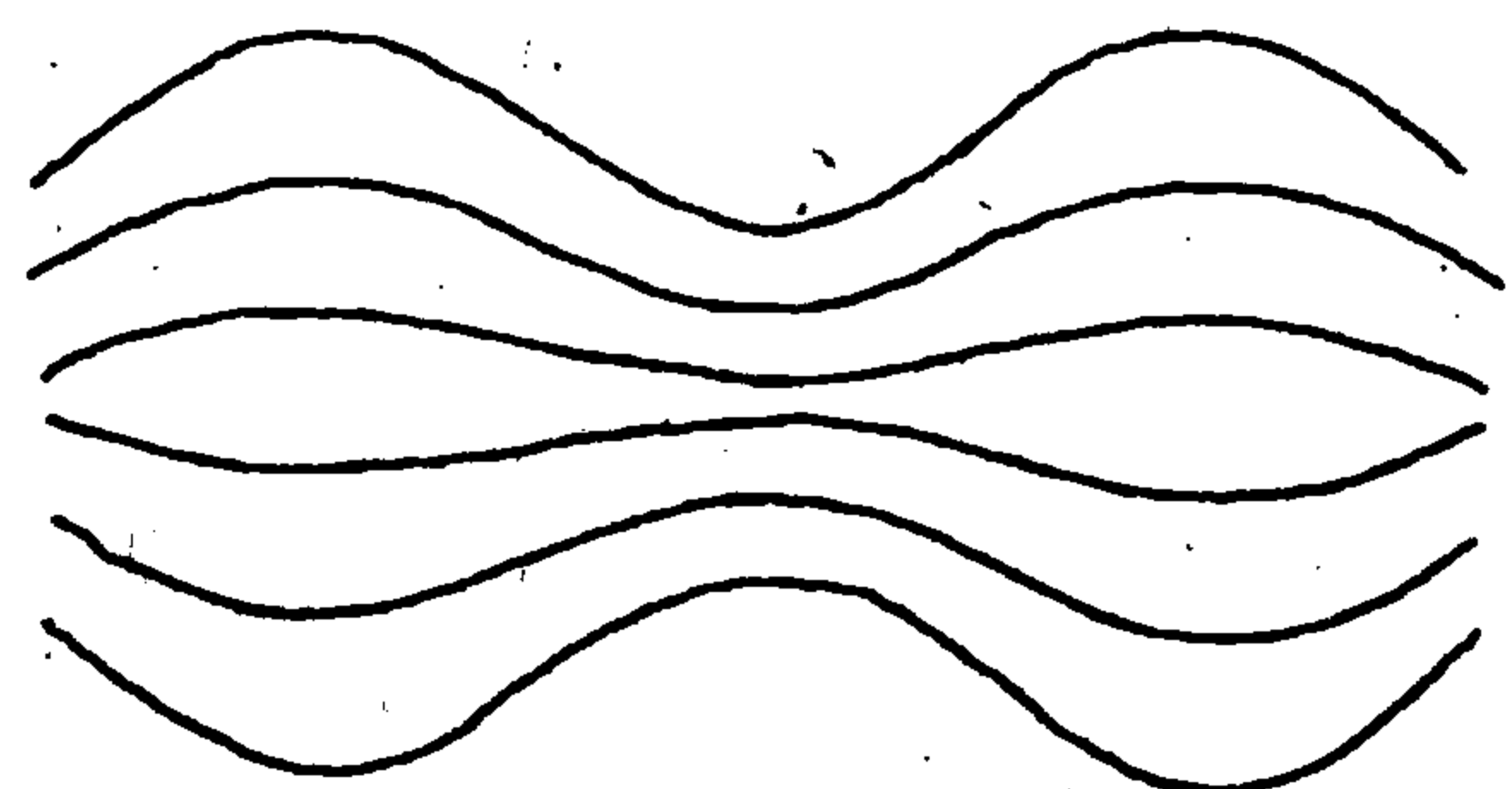
не имеющему корней a , таких, что $a^2 = 1$.

Подстановка (2.33) в выражения ξ и ζ через λ и обычные манипуляции дают

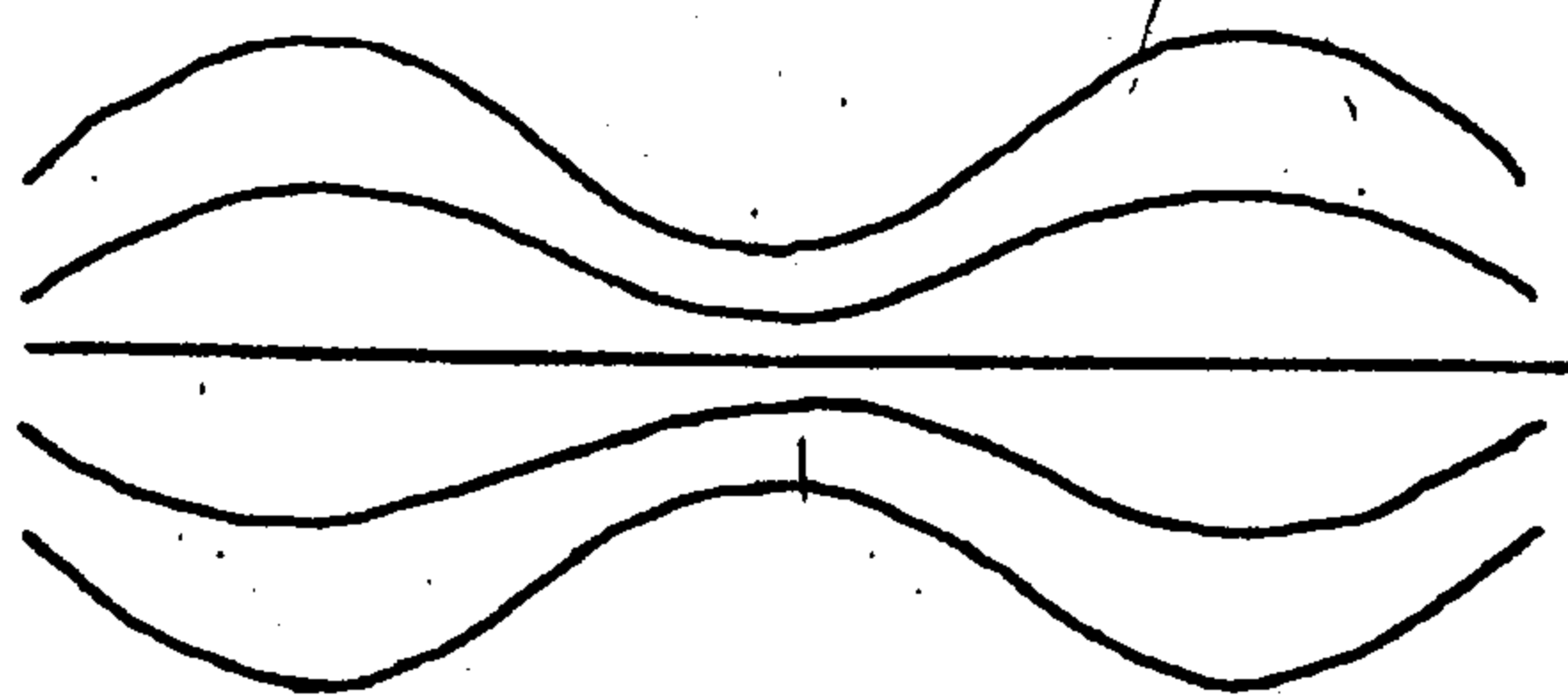
$$\lambda_* = \left[\frac{2\beta}{D} \left(1 - \cos \frac{2k-1}{2n+1} \pi \right) \right]^{1/4}, \quad T_* = 2 \left[2D\beta \left(1 - \cos \frac{2k-1}{2n+1} \pi \right) \right]^{1/2} \quad (2.35)$$

$k = 1, \dots, n$

Минимальное по k значение T_* достигается при $k = 1$. Сравнивая его с (1.26), убеждаемся, что оно *меньше*, чем для пакета, сцепленного с обеих сторон. Соответствующее волновое число также меньше, т.е. длина волны *больше*, чем в основном теплицевом случае.

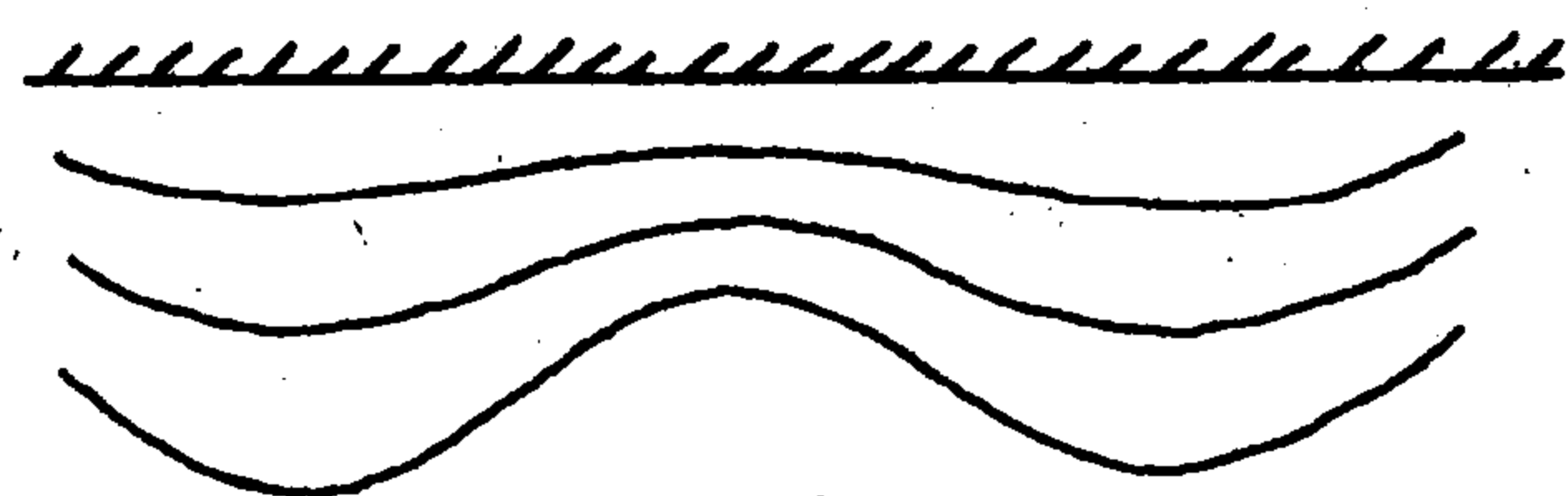


$n=6, j=1$

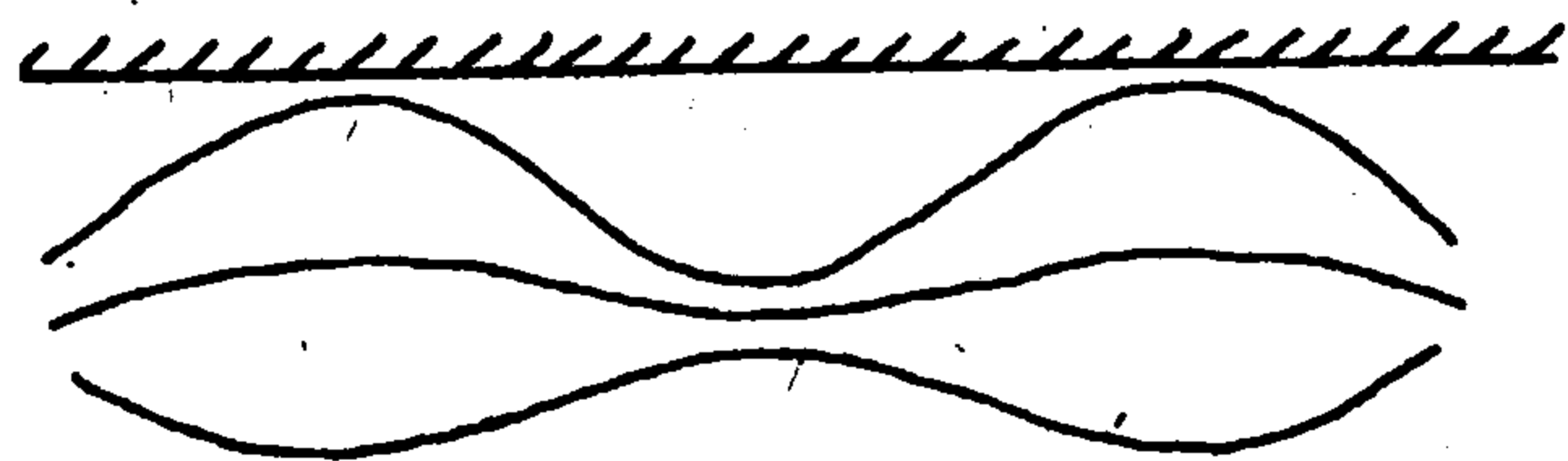


$n=5, j=1$

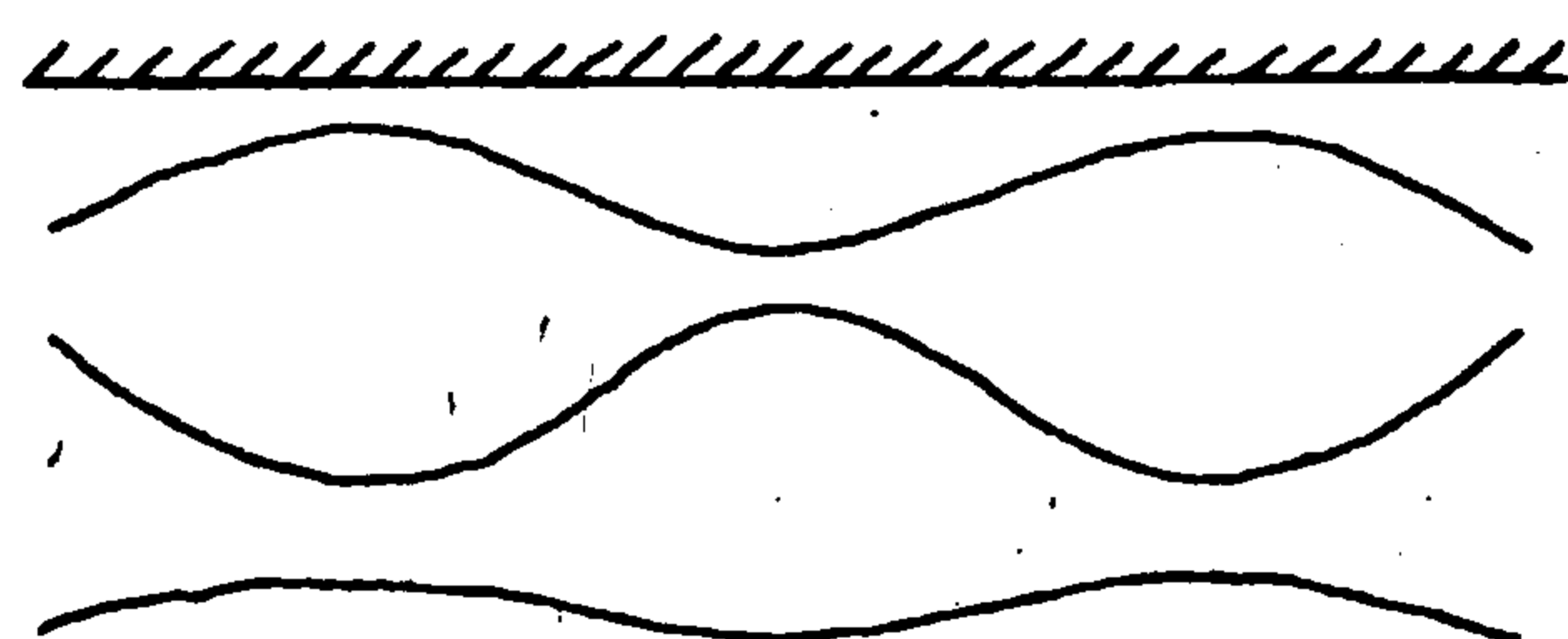
Фиг. 3



$n=3, k=1$



$n=3, k=2$



$n=3, k=3$

Фиг. 4

Собственный вектор, отвечающий ζ_k , разыскивается в виде (2.27) и имеет компоненты

$$W_i^k = \cos \frac{(2i-1)(2k-1)}{2(2n+1)} \pi, \quad i, k = 1, \dots, n \quad (2.36)$$

Первая мода ($k=1$) синфазна. Амплитуда гофра в ней тем больше, чем ближе пластинка к свободной поверхности. Для высоких мод это свойство теряется. Для частных значений числа прослоек n первая и некоторые другие моды изображены на фиг. 4. Интересно отметить, что множество модулей амплитуд во всех модах для фиксированного n одно и то же. Более того, оно совпадает с множеством амплитуд задачи о свободном пакете при нечетных n (формулы задачи фиг. 1, б могут быть получены из аналогичных формул задачи фиг. 1, в заменой n, j на $2n+1, 2k-1$ соответственно).

Таким образом, и этот случай "приповерхностной устойчивости" исследуется полностью простыми аналитическими средствами и приводит к обозримым формулам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
2. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 568 с.
3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
4. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра. М.: Физматгиз, 1962. 300 с.
5. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
6. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
7. Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Трехдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985. 207 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.VII.1994