

УДК 532.546

© 1995 г. О.Ю. Динариев

О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ МНОГОФАЗНОЙ СМЕСИ В УЗКИХ ПОРАХ И ТОНКИХ СЛОЯХ

Построена гидродинамическая модель изотермических процессов в многокомпонентной вязкой смеси, взаимодействующей с неподвижными поверхностями. В стационарном случае модель приводится к описанию на основе функционала Ландау–де Жена. Проанализированы типичные решения уравнений для смеси вблизи поверхности или при наличии фазовых переходов. Этим решениям поставлены в соответствие классические поверхностные и капиллярные явления. Таким образом, предлагаемая модель дает возможность описывать совместно нестационарные вязкие течения жидкости и газа в узких порах и известные статические поверхностные эффекты: аномальные свойства тонких пленок и поверхностных слоев, капиллярную конденсацию, смачиваемость, что является одной из проблем современной теории капиллярных явлений [1, 2].

1. Рассмотрим многокомпонентную жидкую или газообразную смесь, заполняющую пространственную область D . Предположим, что граница ∂D – кусочно-гладкая поверхность, которую можно разбить на два подмножества: Γ_1 – кусочно-гладкая граница неподвижной твердой фазы, взаимодействующей со смесью, $\Gamma_2 = \partial D \setminus \Gamma_1$ – кусочно-гладкая непроницаемая поверхность, не влияющая на состояние смеси.

Положим, что латинские индексы i, j, k пробегают значения $1, \dots, N$, где N – число компонентов в смеси; латинские индексы a, b, c пробегают значения $1-3$, соответствуя некоторой неподвижной декартовой системе координат x^a ; греческие индексы α, β пробегают значения $1-3$, соответствуя некоторой криволинейной системе координат y^α ; латинские индексы A, B пробегают значения $1, 2$; по повторяющимся индексам производится суммирование, если не оговорено противное.

Пусть n_i – мольная плотность i -го компонента в смеси, m_i – соответствующая мольная масса. Термодинамические свойства смеси в объеме полностью определяются плотностью свободной энергии [3, 4] $f = f(T, n_i)$, где T – абсолютная температура смеси. Напомним, что справедливы соотношения

$$df = -sdT + \kappa_i dn_i, \quad f = -p + \kappa_i n_i \quad (1.1)$$

где s – энтропия на единицу объема, κ_i – химический потенциал i -го компонента, p – давление.

Рассматриваются только изотермические процессы, поэтому зависимость всех термодинамических и физико-механических величин от температуры будет далее опускаться. Если $U = U(n_i)$, $V = V(x^a)$, $W = W(y^\alpha)$ – некоторые гладкие функции, то будем обозначать

$$U_{,i} = \partial U / \partial n_i, \quad \partial_a V = \partial V / \partial x^a, \quad D_\alpha W = \partial W / \partial y^\alpha$$

В частности, согласно (1.1) имеет место равенство

$$f_{,i} = \kappa_i \quad (1.2)$$

Если смесь с некоторыми плотностями n_{i0} расслаивается на K фаз с плотностями n_{il} и объемными долями фаз s_l ($l = 1, \dots, K$), то при пренебрежении поверхностными эффектами средняя свободная энергия расслоенной системы равна

$$f_m = \sum_{l=1}^K s_l f(n_{il}) \quad (1.3)$$

При этом плотности в фазах должны удовлетворять условиям сохранения количества молекул компонентов

$$n_{i0} = \sum_{l=1}^K s_l n_{il} \quad (1.4)$$

Если свободная энергия гомогенного состояния $f_0 = f(n_{i0})$ больше, чем f_m , то однородное состояние термодинамически неустойчиво относительно распада на фазы. Термодинамически устойчивым является гетерогенное состояние, обеспечивающее абсолютный минимум функционала (1.3) по всем виртуальным расслоениям, удовлетворяющим равенству (1.4). Стандартным образом можно показать, что для устойчивого состояния справедливы равенства [3, 4]

$$\kappa_i(n_{j1}) = \dots = \kappa_i(n_{jK}) \quad (1.5)$$

$$p(n_{j1}) = \dots = p(n_{jK}) \quad (1.6)$$

В частном случае, когда свободная энергия f – выпуклая функция вектора n_i , гомогенные состояния всегда устойчивы в объеме.

Для описания статических состояний смеси с учетом поверхностных сил определим свободную энергию F смеси в виде функционала Ландау–де Жена

$$F = \int_D w dV + \int_{\Gamma_1} \omega dS + \int_D \rho \phi dV \quad (1.7)$$

$$w = \frac{1}{2} v_{ij} \partial_a n_i \partial_a n_j + f$$

Здесь $v_{ij} = v_{ij}(n_k)$ – коэффициенты некоторой положительно определенной квадратичной формы, $\omega = \omega(n_i)$ – поверхностная энергия взаимодействия флюида с породой, dV – элемент объема, dS – элемент поверхности ∂D , $\rho = m_i n_i$ – полная массовая плотность, $\phi = \phi(x^a)$ – гравитационный потенциал. Статическое состояние смеси обеспечивает абсолютный минимум функционала (1.7) на пространстве распределений $n_i = n_i(x^a)$, удовлетворяющих дополнительным условиям

$$\int_D n_i dV = N_i \quad (1.8)$$

где N_i – заданное число молекул i -го компонента.

Вычислим вариации функционалов F и N_i :

$$\delta F = \int_D \Phi_i \delta n_i dV + \int_{\Gamma_1} \Gamma_{i1} \delta n_i dS + \int_{\Gamma_2} \Phi_{i2} \delta n_i dS \quad (1.9)$$

$$\delta N_i = \int_D \delta n_i dV, \quad \Phi_k = \frac{1}{2} v_{ij,k} \partial_a n_i \partial_a n_j - v_{ik,j} \partial_a n_i \partial_a n_j - v_{ik} \Delta n_i + f_{,k} + m_k \phi$$

$$\Phi_{k1} = \omega_{,k} - v_{ki} \frac{\partial n_i}{\partial l}, \quad \Phi_{k2} = -v_{ki} \frac{\partial n_i}{\partial l}, \quad \Delta = \partial_a \partial_a$$

Здесь l^a – внутренняя нормаль к ∂D .

Распределение $n_i = n_i(x^a)$, минимизирующее функционал (1.7) при дополнительных

условиях (1.8), должно удовлетворять дифференциальному соотношению

$$\delta F + \lambda_i \delta N_i = 0 \quad (1.10)$$

где λ_i – множители Лагранжа. Из соотношения (1.10) при учете (1.9) следуют необходимые (но не обязательно достаточные) условия, налагаемые на равновесное состояние смеси, в виде системы эллиптических уравнений и соответствующих граничных условий:

$$\Phi_i + \lambda_i = 0 \quad (1.11)$$

$$\Phi_{k1} = 0, \quad \Phi_{k2} = 0 \quad (1.12)$$

Множители Лагранжа должны быть выбраны таким образом, чтобы удовлетворить условиям (1.8). Если распределение $n_i = n_i(x^a)$ известно, то λ_i могут быть найдены из условия (1.11)

$$\lambda_i = -\frac{1}{V(D)} \int_D \Phi_i dV \quad (1.13)$$

где $V(D)$ – объем области D . Для однородного состояния смеси в отсутствие гравитационных сил согласно (1.2), (1.9) $\lambda_i = -\kappa_i$.

На основе развитой теории можно рассчитать тензор напряжений в статическом состоянии смеси. Для этого предположим, что объем D , занятый смесью в некотором состоянии (не обязательно равновесном), продеформирован в другой объем D' так, что получается некоторое новое состояние, бесконечно мало отличающееся от старого.

Пусть $n_i(x^a)$ – старое распределение, $n'_i(x'^a)$ – новое распределение. С каждой точкой области D с координатами x^a можно сопоставить некоторую точку области D' с координатами

$$x'^a = x^a + u^a \quad (1.14)$$

где $u^a = u^a(x^b)$ – малый вектор, определенный таким образом, что в каждом индивидуальном объеме сохраняется полная масса

$$m_i n_i(x^a) dV = m_i n'_i(x'^a) dV' \quad (1.15)$$

Выберем произвольную подобласть $\Omega \subset D$ с кусочно-гладкой границей, которая преобразованием (1.14) деформируется в некоторую область Ω' . Свободные энергии для состояний в областях Ω , Ω' вычисляются по формуле (1.7)

$$F_\Omega = \int_\Omega (w + \rho\phi) dV, \quad F_{\Omega'} = \int_{\Omega'} (w' + \rho'\phi) dV'$$

Выражение для функционала $F_{\Omega'}$ можно преобразовать к интегралу по области Ω , если рассматривать формулы (1.14) как преобразование координат. При этом нужно учесть равенства (1.15), а также следующие соотношения, справедливые с точностью до членов первого порядка малости:

$$dV' = (1 + \partial_a u^a) dV, \quad \frac{\partial n'_i}{\partial x'^a} = (\delta_a^b - \partial_a u^b) \frac{\partial n_i}{\partial x^b} \quad (1.16)$$

В линейном по u^a приближении имеем

$$n'_i(x'^a) = n_i(x^a) + r_i(x^a) + q_i(x^a) \quad (1.17)$$

где r_i , q_i – величины того же порядка малости, что и u^a , удовлетворяющие равенствам

$$r_i(x^a) = -\partial_b u^b(x^a) n_i(x^a), \quad m_i q_i(x^a) = 0 \quad (1.18)$$

Используя равенства (1.16)–(1.18) и интегрируя по частям, получаем (k^a – внешняя нормаль к $\partial\Omega$):

$$\Delta F = F_{\Omega'} - F_{\Omega} = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 \quad (1.19)$$

$$W_C = \int_{\Omega} w_C dV, \quad C = 1, 2, 3, \quad W_4 = \int_{\partial\Omega} w_4 dS$$

$$w_1 = \sigma^{ab} \partial_a u^b, \quad w_2 = \rho u^a \partial_a \varphi, \quad w_3 = \Phi_i q_i$$

$$\sigma^{ab} = (-\Phi_k n_k + w + \rho \varphi) \delta^{ab} - v_{ij} \partial_a n_i \partial_b n_j$$

$$w_4 = v_{ij} \frac{\partial n_i}{\partial k} (r_j + q_j)$$

Следуя идеям [5], будем интерпретировать σ^{ab} как статический тензор напряжений, величину W_1 – как работу поверхностных сил, W_2 – как работу сил гравитации, сумму ($W_3 + W_4$) – как работу сил, связанных с диффузионным переносом.

Справедливо тождество

$$\partial_a \sigma^{ab} = -n_k \partial_b \Phi_k + \rho \partial_b \varphi \quad (1.20)$$

Поэтому в термодинамически равновесном состоянии, когда выполнены соотношения (1.11), имеют место обычные условия механического равновесия

$$\partial_a \sigma^{ab} - \rho \partial_b \varphi = 0 \quad (1.21)$$

В рамках развитой стационарной теории опишем некоторые классические явления в многокомпонентной смеси.

Структура поверхностного слоя. Пусть имеется одномерное равновесное распределение $n_i = n_i(x^1)$ в отсутствие гравитационных сил ($\varphi = 0$). Уравнения равновесия (1.11) приводятся к гамильтонову виду

$$\partial_1 n_i = \partial H / \partial p_i, \quad \partial_1 p_i = -\partial H / \partial n_i \quad (1.22)$$

$$p_i = v_{ij} \partial_1 n_j, \quad H = \frac{1}{2} \alpha_{ij} p_i p_j - f - \lambda_i n_i$$

где α_{ij} – матрица, обратная к v_{ij} . Гамильтониан H , являющийся интегралом динамической системы (1.22), простым образом связан с тензором напряжений:

$$H = -\sigma^{11}$$

Итак, все равновесные одномерные распределения описываются методами симплектической геометрии [6].

Для описания структуры поверхностного слоя достаточно решить задачу (1.22) на полупрямой $x^1 \geq 0$ при следующих краевых условиях: при $x^1 = 0$ имеет место равенство (см. (1.12))

$$p_i = \omega_i \quad (1.23)$$

а при $x^1 \rightarrow +\infty$ состояние смеси стремится к некоторому однородному распределению $n_i \rightarrow n_{i0}$. Отметим, что в этом случае $\lambda_i = -\kappa_i(n_{j0})$.

Если однородное состояние n_{i0} термодинамически устойчиво в объеме, то выражение $(-f - \lambda_i n_i)$ достигает в этой точке локального максимума. Траектории гамильтоновой системы (1.22), сходящиеся при $x^1 \rightarrow +\infty$ в точку $n_i = n_{i0}$, $p_i = 0$, заполняют на $(2N - 1)$ -мерной гиперповерхности

$$H = -f(n_{i0}) - \lambda_i n_{i0} \quad (1.24)$$

некоторое N -мерное подмногообразие M_1 . С другой стороны, N -мерное лагранже-

во многообразии (1.23) пересекается в общем случае с гиперповерхностью (1.24) по $(N - 1)$ -мерному подмногообразию M_2 . Пересечение M_1 и M_2 в общем случае нульмерно, т.е. соответствует одной или нескольким искомым траекториям. Таким образом, предложенная модель в принципе позволяет корректно описать структуру слоя вблизи поверхности, взаимодействующей со смесью.

Отметим, что согласно (1.1), (1.24) гамильтониан H , будучи постоянным на искомой траектории, равен гидростатическому давлению в однородном состоянии n_{i0} . В то же время вблизи стенки он может отличаться от соответствующего гидростатического давления (эффект расклинивающего давления [1]).

Структура прямой межфазной границы. Пусть требуется найти решение системы (1.22), стремящееся при $x^1 \rightarrow -\infty$ к однородному состоянию n_{i1} , а при $x^1 \rightarrow +\infty$ — к однородному состоянию n_{i2} , причем оба однородных состояния устойчивы в объеме. Сразу очевидно, что

$$\lambda_i = -\kappa_i(n_{j1}) = -\kappa_i(n_{j2}) \quad (1.25)$$

и потому необходимым условием существования решения является равенство химических потенциалов в фазах (см. (1.5)). Кроме того, если решение существует, то гамильтониан постоянен вдоль траектории и равен гидростатическому давлению в фазе 1 и 2. Следовательно, получается еще одно необходимое условие существования решения (см. (1.6)).

Пусть теперь условия (1.5), (1.6) выполнены. Траектории, стремящиеся при $x^1 \rightarrow -\infty$ (при $x^1 \rightarrow +\infty$) к точке $n_i = n_{i1}$, $p_i = 0$ (соответственно к точке $n_i = n_{i2}$, $p_i = 0$) заполняют на гиперповерхности (1.25) некоторое N -мерное подмногообразие $M_1(M_2)$. Пересечение M_1 и M_2 в общем случае одномерно, т.е. состоит из одной или нескольких траекторий.

Можно сделать вывод, что статическая теория, основанная на функционале (1.7), воспроизводит классические условия фазового равновесия (1.5), (1.6) и позволяет описать тонкую структуру межфазной границы. Если решение $n_i(x^1)$ найдено, то можно вычислить поверхностное натяжение

$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} (w - H + \lambda_i n_i) dx^1 = \int_{-\infty}^{+\infty} v_{ij} \partial_1 n_i \partial_1 n_j dx^1 \quad (1.26)$$

Если в уравнения теории сделать подстановку

$$v_{ij} \rightarrow \varepsilon v_{ij}, \quad f \rightarrow \varepsilon^{-1} f \quad (1.27)$$

где ε — малый безразмерный положительный параметр, то, как показывает анализ уравнений, новым решением будет распределение $n_i(\varepsilon^{-1} x^1 + a)$, где a — произвольная постоянная размерности длины. При этом величина поверхностного натяжения (1.26) не изменится.

Рассмотрим случай однокомпонентной жидкости ($N = 1$) и предположим, что $v_{11} = \text{const}$. Положим для простоты $z = n_1$, $z_1 = n_{11}$, $z_2 = n_{12}$, $v = v_{11}$, $\lambda = \lambda_1$, $z_2 > z_1$. Уравнение равновесия имеет интеграл (см. (1.26))

$$\frac{1}{2} v (\partial_1 z)^2 - f - \lambda z = \beta = -f(z_1) - \lambda z_1$$

Легко найти выражение для $\partial_1 z$:

$$\partial_1 z = (2v^{-1}U)^{1/2}, \quad U(z) = f + \lambda z + \beta$$

Решение поставленной задачи существует, если функция $U(z)$ положительна на интервале от z_1 до z_2 и обращается в нуль в граничных точках вместе со своими первыми производными. Подставляя выражение для $\partial_1 z$ в (1.26), получаем

$$\sigma = (2v)^{1/2} \int_{z_1}^{z_2} (U(z))^{1/2} dz$$

Это соотношение можно рассматривать как связь между поверхностным натяжением σ и феноменологическим параметром v .

Структура тонкой кривой межфазной границы. Рассмотрим ситуацию, когда имеется межфазная область, разделяющая состояния n_{i1} и n_{i2} , термодинамически устойчивые в объеме. Пусть можно сделать подстановку (1.27). Тогда в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ межфазная область вырождается в некоторую гладкую поверхность P . Пусть γ^a – нормаль к поверхности P , направленная от фазы 1 к фазе 2, ζ^A – координаты на поверхности P . Тогда поверхность P и нормаль γ^a задаются некоторыми уравнениями

$$x^a = X^a(\zeta^A), \quad \gamma^a = \gamma^a(\zeta^A)$$

При малых значениях ε введем в окрестности P криволинейные координаты y^α по формулам

$$x^a = X^a(y^A) + \gamma^a(y^A)\varepsilon y^3$$

В соответствии с результатами по структуре прямой межфазной границы при решении уравнений равновесия (1.13) в области раздела фаз можно искать распределение плотностей в виде

$$n_i = n_i^0(y^\alpha) + \varepsilon n_i^1(y^\alpha) + \dots$$

Аналогично этому должны быть разложены в ряды характеристики фаз

$$n_{iC} = n_{iC}^0 + \varepsilon n_{iC}^1 + \dots, \quad C = 1, 2$$

Перепишем дифференциальные операторы в уравнениях (1.11) в криволинейных координатах y^α . Если ограничиться двумя низшими порядками в разложении по ε , то вместо (1.13) достаточно рассмотреть систему уравнений

$$\frac{1}{2} v_{ij,k} D_3 n_i D_3 n_j - D_3 (v_{ik} D_3 n_i) - \varepsilon \beta v_{ik} D_3 n_i + f_{,k} + \varepsilon \lambda_k = 0, \quad \lambda_i = \varepsilon^{-1} \lambda_i^0 + \lambda_i^1 + \dots \quad (1.28)$$

Здесь $\beta = \beta(\zeta^A) = g^{AB} b_{AB}$, $g_{AB} = D_A X^a D_B X^a$ – первая фундаментальная форма поверхности P , $b_{AB} = D_A X^a D_B \gamma^a$ – вторая фундаментальная форма поверхности P [7].

Анализ системы уравнений (1.28) при $y^3 \rightarrow \pm\infty$ приводит, как и раньше, к равенствам $\varepsilon \lambda_i = -f_{,i}(n_{i1}) = -f_{,i}(n_{i2})$, справедливым в двух низших порядках по ε . Это опять дает условия фазового равновесия (1.5). При учете этого из системы (1.28) и (1.1) выводим соотношение

$$p(n_{i1}) - p(n_{i2}) + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} v_{ij} D_3 n_i D_3 n_j dy^3 = 0$$

Если использовать определение (1.26), то в рамках развиваемой теории воспроизводится соотношение Лапласа для капиллярного скачка давления [8]

$$p(n_{i1}) - p(n_{i2}) + \beta \sigma = 0$$

2. Перейдем теперь к динамическим процессам в многокомпонентной смеси. Для описания изотермической гидродинамики многокомпонентной смеси естественно использовать уравнения сохранения для компонентов и уравнение импульсов для среды в целом [5]

$$\partial_t n_i + \partial_a I_i^a = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho(\partial_t v^a + v^b \partial_b v^a) = \partial_b p^{ab} - \rho \partial_a \varphi \quad (2.2)$$

Здесь I_i^a – поток молекул i -го компонента в смеси, $v^a = \rho^{-1} m_i I_i^a$ – среднемассовая скорость, p^{ab} – тензор напряжений, ∂_t – производная по времени.

Для построения замкнутой гидродинамической модели необходимо указать выражения для тензора напряжений p^{ab} и для диффузионных потоков $Q_i^a = \Gamma_i^a - n_i v^a$.

Динамический тензор напряжений целесообразно определить, как сумму статического тензора напряжений σ^{ab} (разд. 1) и тензора вязких напряжений τ^{ab}

$$p^{ab} = \sigma^{ab} + \tau^{ab}$$

$$\tau^{ab} = \eta \delta^{ab} \partial_c v^c + \mu \left(\partial_a v^b + \partial_b v^a - \frac{2}{3} \delta^{ab} \partial_c v^c \right)$$

где $\eta > 0$ – объемная вязкость смеси, $\mu > 0$ – сдвиговая вязкость смеси. Наложим на скорость v^a обычные в теории вязкой жидкости граничные условия прилипания:

$$v^a \Big|_{\partial D} = 0 \quad (2.3)$$

Для диффузионных потоков потребуем выполнение граничного условия непротекания на границе ∂D

$$Q_i^a l^a = 0 \quad (2.4)$$

Также будем считать выполненными граничные условия (1.12).

Введем обозначение $Q_i = \partial_a Q_i^a$ и определим полную энергию системы E как сумму кинетической энергии среднемассового движения и свободной энергии (1.7)

$$E = \frac{1}{2} \int_D \rho v^a v^a dV + F \quad (2.5)$$

Вычислим производную по времени от выражения (2.5). Для этого положим в формулах (1.14), (1.17)

$$u^a = v^a dt, \quad q_i = -Q_i dt$$

и воспользуемся формулой (1.19). Тогда при учете уравнений (2.1), (2.2) и граничных условий (1.14), (2.3) получаем

$$\frac{dE}{dt} = E_1 + E_2, \quad E_1 = - \int_D \tau^{ab} \partial_a v^b dV, \quad E_2 = - \int_D \Phi_i Q_i dV$$

Определим величины λ_i по формулам (1.13). Далее, определим величины $\Psi_i = (\Phi_i + \lambda_i)$, $S_i = (\Psi_i - m_i m_j \Psi_j (m_k m_k)^{-1})$. Согласно (2.4) выражение для E_2 можно преобразовать к виду

$$E_2 = - \int_D S_i Q_i dV \quad (2.6)$$

Определим диффузионные потоки неявной формулой

$$Q_i = \delta S_i \quad (2.7)$$

в которой δ – некоторая положительная величина. При таком определении согласно (2.6) $dE/dt \leq 0$ и построенная динамическая модель оказывается устойчивой. Неявного определения (2.7) достаточно для решения динамических уравнений. В явном виде диффузионные потоки можно найти из решения задачи Неймана

$$Q_i^a = \partial_a \chi_i, \quad \Delta \chi_i = Q_i, \quad \partial \chi_i / \partial l \Big|_{\partial D} = 0$$

Множество стационарных решений гидродинамических уравнений (2.1), (2.2), для которых отсутствует перенос массы ($v^a = 0$), совпадает с множеством решений задачи (1.11), (1.12).

Действительно, если выполнены условия (1.11), (1.12) и $v^a = 0$, то выполнены условия механического равновесия (1.21) и очевидным образом удовлетворены уравнения (2.1), (2.2).

Наоборот, пусть выполнены условия механического равновесия и $Q_i = 0$. Тогда $\Psi_i = m_i h$, где $h = m_i \Psi_i (m_k m_k)^{-1}$. Используя тождество (1.20), получаем $\partial_a h = 0$, откуда при учете (1.13) следует равенство $h = 0$.

3. Итак, построена гидродинамическая модель многокомпонентной жидкости или газа, описывающая методами механики сплошной среды явления в узких порах и тонких слоях. Для стационарных равновесных состояний модель эквивалентна описанию на основе функционала (1.7), которое адекватно воспроизводит структуру поверхностных слоев и межфазных областей. Динамические уравнения описывают нелинейные процессы релаксации к равновесным состояниям. В отличие от обычной гидродинамики многокомпонентной вязкой смеси уравнения среднемассового переноса имеют более высокий порядок по пространственным производным, а уравнения диффузионного переноса имеют вид уравнений реакции-диффузии.

Отметим, что совместность со стационарной теорией разд. 1 определяет гидродинамическую модель неоднозначным образом. Так, вместо материального соотношения (2.7) можно постулировать выражение

$$Q_i^a = -D_{ij} \partial_a S_j \quad (3.1)$$

где симметричная матрица D_{ij} удовлетворяет дополнительным условиям: а) $m_i D_{ij} = 0$, б) $D_{ij} a_i a_j \geq 0$ для любого вектора a_i из $(N - 1)$ -мерного подпространства $m_i a_i = 0$. Формула (3.1) соответствует классическому подходу в том смысле, что она приводит к обычным диффузионным уравнениям [9] при $v_{ij} = 0$. Однако при $v_{ij} \neq 0$ из формулы (3.1) следуют дифференциальные уравнения для концентраций, имеющие четвертый порядок по пространственным производным. Гидродинамическая модель, предложенная в разд. 2, минимальна с точки зрения порядка уравнений и количества феноменологических коэффициентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М. Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 399 с.
2. Evans R. Phase equilibria and adsorption of fluids confined in narrow pores. // Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer, 1991. V. 386. P. 62-76.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976. 584 с.
4. Пригожин И., Дефэй Р. Химическая термодинамика. Новосибирск: Наука, 1966. 509 с.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
6. Арнольд В.И., Гивенталь А.Б. Симплектическая геометрия // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 4. С. 5-139.
7. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970. 412 с.
8. Финн Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. М.: Мир, 1989. 310 с.
9. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.VI.1994