

УДК 532.5

© 1995 г. О.В. Воинов

## О РАСТЕКании КАПЛИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ПОВЕРХНОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ

Рассматривается капиллярная динамика тонкого слоя вязкой жидкости, смачивающего гладкую твердую поверхность. К постановке задач гидродинамики смачивания привлекается метод асимптотического сращивания. Указан общий способ замыкания асимптотической теории динамического краевого угла, который ранее был известен в первом приближении по малому капиллярному числу [1]. Для произвольной внешней задачи гидродинамики тонкого слоя, описывающей течение вне малой окрестности движущейся линии смачивания, сформулированы асимптотические краевые условия на линии смачивания в третьем приближении.

Решается нестационарная задача самопроизвольного растекания капли вязкой жидкости по твердой поверхности, для которого известна теория главного приближения [2]. Динамика капли определяется на больших временах. Форма капли найдена в трех приближениях по капиллярному числу. Определено влияние силы тяжести на форму растекающейся капли. Найдены границы применимости модели квазиравновесной формы капли с динамическим краевым углом, зависящим от скорости края капли.

**1. Краевые условия на движущейся линии смачивания при растекании тонкого слоя жидкости.** Течения тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости по твердой поверхности рассматриваем, когда на свободной поверхности слоя отсутствует касательное напряжение, а нормальное напряжение определяется капиллярным давлением  $p_n = -p_0 + \sigma(R_1^{-1} + R_2^{-1})$  ( $p_0$  – давление в газе,  $R_1$  и  $R_2$  – главные радиусы кривизны,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения). На твердой поверхности выполнено условие прилипания.

При смачивании поверхности число Рейнольдса  $Re$  убывает с приближением к линии контакта трех фаз из-за убывания толщины слоя  $h$  и в достаточно малой окрестности этой линии  $Re < 1$ . Примем, что характерные максимальная  $h_0$  и минимальная  $h_m$  толщина слоя в ползущем течении сильно различаются:  $s_0 = \ln(h_0/h_m) \gg 1$ .

В задачах смачивания гладкой твердой поверхности  $h_m$  – минимальная толщина слоя, при которой пригодно макроскопическое описание его течения. Обычно величина  $h_m$  равна нескольким размерам молекулы  $a$ . При очень малых динамических краевых углах ( $\alpha_0 \ll 1$ ) возможны относительно большие значения  $h_m$  ( $h_m \gg a$ ) [1], если в уравнениях движения не учитываются силы Ван-дер-Ваальса.

Нелинейная структура ползущего течения слоя вблизи линии контакта (смачивания), как известно [1–3], имеет универсальный вид. Используя асимптотическое решение третьего приближения [1], при  $h \gg h_m$  для угла наклона касательной к поверхности слоя  $\alpha$  запишем

$$\alpha^3 = 9Ca \left( s - \frac{1}{3} \ln s + \frac{\ln s - 4}{s} + \dots \right), \quad \alpha = |\nabla h| \quad (1.1)$$

$$s = \ln(h/h'_m) + C, \quad |s| \gg 1, \quad |Ca| \ll 1$$

Здесь  $\nabla$  вычисляется в координатах на твердой поверхности,  $h'_m \sim h_m$ , капиллярное число

$$Ca = \mu v_0 / \sigma, \quad v_0 = (\mathbf{n} \cdot \partial \mathbf{x}_0 / \partial t)$$

( $\mu$  – динамическая вязкость,  $\mathbf{n}$  – нормаль к линии контакта  $L_0$  в точке  $\mathbf{x}_0$ , направленная в сторону сухой поверхности).

Зависимость (1.1) справедлива в малой окрестности линии смачивания и соответствует условию убывания кривизны

$$d \cos \alpha / dh \rightarrow 0, \quad h/h_m \rightarrow \infty$$

Отметим, что члены разложения по большому параметру  $s$  в (1.1) соответствуют последовательным приближениям по  $Ca$ , устраняющим невязку в граничном условии для нормального напряжения [2, 3].

Параметр  $C = \ln h'_m$  асимптотики (1.1) в общем случае известен для первого приближения [1, 2]. Укажем общий способ его определения для старших приближений. Производя оценки угла  $\alpha(h_m)$  по уравнению энергии вблизи линии смачивания [2], справедливому на основе термодинамики необратимых процессов, можно записать

$$C = \alpha_m^3 / (9Ca), \quad \lambda = \alpha_m^3 / (9Ca) < 1 \tag{1.2}$$

$$C = \lambda + \frac{1}{3} \ln \lambda, \quad \lambda > 1; \quad h'_m = Ka$$

Здесь  $a$  – размер молекулы жидкости, определяющий нижнюю границу (по толщине слоя) области диссипации энергии;  $\alpha_m = \alpha_s$  ( $\alpha_s$  – равновесный угол смачивания,  $\alpha_m = 0$  в случае полного смачивания), если можно пренебречь невязкой диссипацией энергии на линии смачивания (например, диссипацией, обусловленной кинетическими эффектами [4]). Если диссипация на микроскопическом уровне вблизи линии смачивания значительна, то ее следует включать в определение угла  $\alpha_m$  по уравнению энергии [2].

Коэффициент  $K$  в (1.5) в общем случае должен определяться с помощью опытных данных, так как его точное значение зависит от диссипации энергии на микроскопическом масштабе течения, где макроскопические уравнения непригодны. Если динамический краевой угол конечен или при малых  $h$  не существенны силы Ван-дер-Ваальса, то  $K \sim 1$ . Это подтверждено сравнением теории первого приближения [2, 3], в которой  $K = 2$ , с экспериментами. Для второго и третьего приближений по  $s$  нужно более точное знание коэффициента  $K$ .

При очень малых динамических углах  $\alpha_0 \rightarrow 0$  и в случае значительного влияния сил Ван-дер-Ваальса возможны большие значения  $K \gg 1$ , для полного смачивания ( $\alpha_m = 0$ ) [1]

$$h'_m = (3Ca)^{-1/3} (A' / (2\pi\sigma))^{1/2} \tag{1.3}$$

где  $A'$  – разность постоянных Гамакера, характеризующих взаимодействие жидкости с твердым телом и жидкости с жидкостью [5]. Коэффициент в (1.3) хорошо соответствует второму приближению в (1.1)<sup>1</sup>.

Пусть  $h_0$  – максимальный масштаб толщины слоя во внутренней области, где реализуется динамический краевой угол, описываемый (1.2). Такое определение отно-

<sup>1</sup> Воинов О.В. Гидродинамическая теория смачивания: Препринт № 179-88. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1988. 31 с.

сится, вообще говоря, к области в сечении жидкого слоя, ортогональной линии смачивания в точке  $x_0$ , и масштаб  $h_0$  может существенно изменяться вдоль линии  $L_0$ .

Во внешней области относительно больших толщин ( $h \gtrsim h_0$ ) линия контакта трех фаз (внешняя линия) соответствует предельному переходу  $h/h_0 \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow x_0 \in L_0$ . Внешняя линия контакта  $L_0$  может не совпадать с микроскопической линией смачивания  $L_*$  в случае очень малых значений  $\alpha_0$  и заметного влияния сил Ван-дер-Ваальса, если вблизи линии смачивания движется пленка аномально малой толщины [1, 6, 7].

Краевая задача для определения нестационарной динамики линии смачивания  $L_*$  сформулирована в [8]. Эта задача ставится после того, как найден закон движения  $L_0$ .

Упростим постановку гидродинамической задачи, используя большой параметр  $s_0$ . Ограничим внешнюю область сильным неравенством

$$\ln(h_0/h) \ll s_0 \quad (1.4)$$

Если отношение  $h/h_0$  удовлетворяет (1.4), то правую часть (1.1) можно представить в виде ряда по степеням  $\ln(h/h_0)$ . Ограничиваясь двумя членами разложения, перепишем (1.1) в малой окрестности линии  $L_0$  в следующем виде:

$$\alpha^3 = \alpha_{(0)}^3(h_0) + 9Ca \left(1 - \frac{1}{3s_0}\right) \ln \frac{h}{h_0} + \dots, \quad x \rightarrow x_0 \quad (1.5)$$

Угол  $\alpha_{(0)}$  определяется по асимптотике (1.1) при  $h = h_0$ .

Параметр  $h_0$  допускает уточнение в процессе решения. Отметим линейность по  $\ln(h/h_0)$  соотношения третьего приближения (1.5). Слагаемое с  $\ln^2(h/h_0)$  появится в (1.5) только в четвертом приближении по  $s$  в (1.1).

Благодаря условию (1.4) при постановке внешних задач динамики жидкого слоя из области определения  $h(x, t)$  исключается малая окрестность линии смачивания  $L_{(0)}$ . Нелинейную асимптотику (1.1) или ее линеаризованный вариант (1.5) (с ограничением (1.4)) можно рассматривать как краевое условие на линии смачивания.

**2. Динамика растекающейся капли.** Растекание капли вязкой жидкости под действием капиллярных сил по плоской твердой поверхности при малых значениях угла наклона свободной границы  $\alpha$  и малых числах Рейнольдса описывается эволюционным уравнением [9]

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\sigma}{3\mu} \operatorname{div}(h^3 \operatorname{grad} \Delta h)$$

которое в осесимметричном случае имеет следующий вид:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\sigma}{3\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} h^3 r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial h}{\partial r} \quad (2.1)$$

( $r$  – радиус). На краю капли ( $r = r_0$ )

$$h/h_0 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow r_0 \quad (2.2)$$

Предельный переход (2.2) ограничен условием (1.4), что допустимо в силу  $s_0 \gg 1$ .

Должны быть выполнены также условия регулярности решения в центре капли

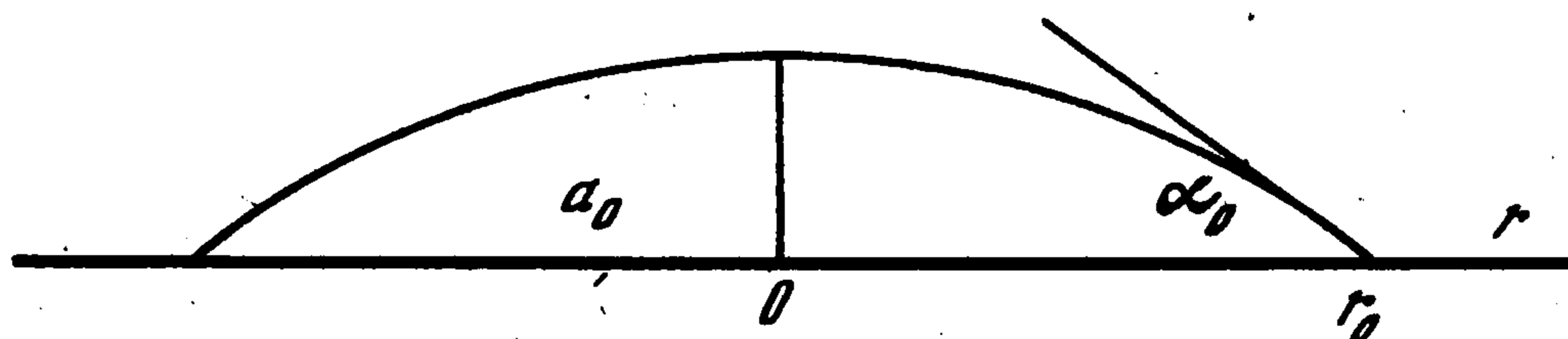
$$\frac{\partial}{\partial r} \Delta h = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0 \quad (2.3)$$

Эволюция формы капли зависит от начальных условий, и, вообще говоря, при некотором  $t_0$  должна быть задана форма поверхности  $h(r, t)$ . Однако при  $t \rightarrow \infty$  решение слабо зависит от условий при  $t = t_0$ , если вблизи края капли справедлива асимптотика (1.1) или краевое условие (1.5). Поэтому наиболее интересно предельное решение, к которому на больших временах близки решения с заданными начальными условиями.

Необходимо найти асимптотическое решение уравнения (2.1) с условиями (1.5), (2.2), (2.3) при  $t \rightarrow \infty$ . В первом приближении решение найдено в [2]. Согласно этому решению радиус основания капли  $r_0 \sim t^{1/10}$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Левая часть (2.1) во внешней области относительно мала на больших временах. Поэтому решение уравнения (2.1) можно искать в виде ряда по степеням  $Ca = \mu v_0 / \sigma$  ( $v_0 = \dot{r}_0$ ) с коэффициентами, зависящими от времени:

$$h = f_0 + f_1 + f_2 + \dots, \quad f_n \sim Ca^n, \quad f_0 = a_0(1 - r^2 / r_0^2) \quad (2.4)$$



Уравнения для  $f_n$  получим после подстановки (2.4) в (2.1) и приравнивания сумм слагаемых с одинаковой степенью  $Ca$ .

Уточним условия для определения  $f_n$ . Примем, без ограничения общности, что параболический профиль (фигура) нулевого приближения  $h = f_0$  определяет объем капли  $V$ , причем поправки  $f_n$  ( $n \geq 1$ ) этот объем не возмущают:

$$a_0 r_0^2 = \frac{2}{\pi} V; \quad \int_0^{r_0} r f_n dr = 0, \quad n \geq 1 \quad (2.5)$$

В соответствии с (2.2) на краю капли

$$f_n = 0, \quad r = r_0 \quad (2.6)$$

В первом приближении изложенный метод дает в согласии с [2]

$$\alpha_0^3 = (2a_0 / r_0)^3 = \alpha_m^3 + 9Ca s_0, \quad h_0 = a_0 \quad (2.7)$$

Отметим, что в [2] записано более точное выражение  $\alpha_0^3$ , отличающееся от (2.7) на  $-9Ca$ .

Для построения решения в старших приближениях представим (2.1) при учете (2.3) и (2.4) в эквивалентной интегральной форме, вводя вместо радиуса переменную  $z$ :

$$\frac{3\mu r_0^4}{16\sigma h^3} \int_z^1 \frac{\partial' h}{\partial t} dz = (1-z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (1-z) \frac{\partial h}{\partial z}, \quad z = 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + 2(1-z) \frac{v_0}{r_0} \frac{\partial}{\partial z}, \quad v_0 = \dot{r}_0$$

Отсюда найдем уравнения для малых возмущений  $f_1$  и  $f_2$  в (2.4)

$$(1-z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (1-z) \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{3\mu r_0^4}{16\sigma f_0^3} \int_z^1 \frac{\partial' f_0}{\partial t} dz \quad (2.9)$$

$$(1-z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (1-z) \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{3\mu r_0^4}{16\sigma f_0^3} \left( \int_z^1 \frac{\partial' f_1}{\partial t} dz - \frac{3f_1}{f_0} \int_z^1 \frac{\partial' f_0}{\partial t} dz \right) \quad (2.10)$$

Уравнения более старших приближений записываются аналогично. При опреде-

лении  $f_1, f_2, \dots$  из (2.5), (2.6), (2.8) возникает следующая задача:

$$\frac{d^2}{dz^2} (1-z) \frac{d\psi_n}{dz} = \Phi_n(z); \quad n=1, 2, \dots \quad (2.11)$$

$$\int_0^1 \psi_n dz = 0; \quad \psi_n = 0, \quad z=0; \quad (1-z) \frac{d\psi_n}{dz} = 0, \quad z=1$$

Конкретные выражения  $\Phi_1, \Phi_2$  определяются уравнениями (2.9) и (2.10).

Вычисляя правую часть (2.9) и интегрируя (2.11), находим во втором приближении

$$f_1 = \frac{\beta}{a_0^2} \psi_1, \quad \beta = \frac{3}{8} r_0^3 \text{Ca}, \quad \Phi_1 = -\frac{1}{z^2} \quad (2.12)$$

$$\psi_1 = 2z + \int_0^z \frac{\ln z}{1-z} dz$$

Краевое условие (1.5) можно будет удовлетворить для решений второго и третьего приближений одновременно.

**3. Внешнее решение  $h(r, t)$  в третьем приближении.** Рассмотрим наиболее интересный случай полного смачивания ( $\alpha_m = 0$ ). Для коэффициента  $\beta$  в (2.12) согласно (2.7) справедливы соотношения

$$\frac{\beta}{a_0^2} = \frac{a_0}{3s_0} + \dots, \quad \left( \frac{\beta}{a_0^2} \right)' = \frac{a_0'}{3s_0} + \dots \quad (3.1)$$

При помощи (2.5), (2.7), (2.12) и (3.1) из (2.10) получим

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (1-z) \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\beta^2}{a_0^5} \Phi_2 + \dots, \quad \Phi_2 = \frac{2\psi_1}{z^3} \quad (3.2)$$

Интегрируя задачу (2.11), соответствующую (3.2), найдем

$$f_2 = \frac{\beta^2}{a_0^5} \psi_2, \quad \psi_2 = (\ln z - z - 4) \int_0^z \frac{\ln z}{1-z} dz - \frac{3}{2} \int_0^z \frac{\ln^2 z}{1-z} dz - 9z - \frac{z}{2} \ln^2 z + 2Iz \quad (3.3)$$

$$I = \int_0^1 \frac{\ln^2 z}{1-z} dz = 2\zeta(3) = 2,4041\dots$$

( $\zeta(x)$  – дзета-функция Римана).

Перейдем к пределу  $z \rightarrow 0$  в выражении угла наклона  $\alpha$  для решения (2.4), (2.12) и (3.3)

$$\alpha = \frac{2}{r_0} \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{2}{r_0} \left( a_0 + \frac{\beta}{a_0^2} \psi_1' + \frac{\beta^2}{a_0^5} \psi_2' \right) \quad (3.4)$$

$$\psi_1' = 2 + \ln z + \dots, \quad \psi_2' = 2I - 6 - (2 + \ln z)^2 + \dots$$

С учетом (3.1) из (3.4) определим

$$\alpha^3 = \alpha_0^3 + 9\text{Ca}(2 + \ln z + (2I - 6)/3s_0), \quad z \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

$$\alpha_0 = 2a_0 / r_0$$

Выразим  $\ln(h/h_0)$  для  $h_0 = a_0$  в (1.3) через  $\ln z$  при помощи (2.4), (3.1) и принимая во внимание неравенство  $f_0 \gg f_1$ . Получим

$$\ln(h/a_0) = \ln z + (1 + \ln z)/(3s_0) + \dots, \quad z \rightarrow 0$$

В результате краевое условие (1.5) принимает форму

$$\alpha^3 = \alpha_{(0)}^3(a_0) + 9Ca(\ln z + 1/(3s_0)) + \dots, \quad z \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

( $\alpha_{(0)}$  дается формулой (1.1) при  $h = a_0$ ). Требуя совпадения (3.5) и (3.6), находим динамический краевой угол  $\alpha_0$  сферического сегмента эквивалентного объема

$$\alpha_0^3 = 9Ca \left( s_0 - 2 - \frac{\ln s_0}{3} + \frac{\ln s_0 + c_0}{9s_0} \right), \quad s_0 = \ln \frac{a_0}{h'_m}$$

$$\alpha_0 = 2a_0 / r_0, \quad c_0 = 17 - 12\zeta(3) = 2,575... \quad (3.7)$$

На эффективность метода решения указывает относительно малая величина вклада последнего слагаемого в (3.7), соответствующего третьему приближению (второе дает значительный вклад). Так, при типичном для макроскопических капель значении  $s_0 = 10$  слагаемое второго приближения составляет относительно большую величину 28% от  $s_0$ , а слагаемое третьего приближения – всего лишь 0,5%.

Формула (3.7) представима в эквивалентном виде

$$\alpha_0^3 = \alpha_{(0)}^3(h_0) + 0,575...Ca/s(h_0) \quad (3.8)$$

$$s = \ln(h/h'_m), \quad h_0 = a_0 e^{-2}$$

(величина  $\alpha_{(0)}(h)$  определена по (1.1)). Значение  $h_0$  в (3.8) лучше соответствует верхней границе внутренней области, чем высота сферического сегмента  $a_0$ , и поэтому формула (3.8) должна быть точнее, чем (3.7).

Решение для  $\alpha_m = 0$  является промежуточной асимптотикой при  $t \rightarrow \infty$ , так как из-за  $Ca \rightarrow 0$  согласно (1.3) параметр  $s_0$  убывает и при достаточно больших  $t$  основное условие  $s_0 \geq 1$  должно нарушиться.

При неполном смачивании ( $\alpha_m > 0$ ) происходит релаксация угла  $\alpha_0 \rightarrow \alpha_m$ . Во втором приближении при учете (1.2) для  $\lambda > 1$  получим

$$\alpha_0^3 = \alpha_m^3 + 9Ca[s_0 - 2 - \frac{1}{3}\ln(1 + s_0/\lambda)], \quad s_0 = \ln(a_0/h'_m) \quad (3.9)$$

В отличие от (3.7) в (3.9) на больших временах отсутствует слагаемое с  $\ln s_0$ , так как  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Формулы для краевого угла (3.7), (3.8) или (3.9) дают полную информацию о предельной динамике края растекающейся капли. При учете  $v_0 = r_0^*$  получается обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка (аналогично [2]), интегрирование которого не представляет трудностей.

**4. Влияние силы тяжести на растекание капель.** Осесимметричное растекание вязкой капли по горизонтальной твердой при учете капиллярных сил и весомости жидкости для малых углов описывается уравнением

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{h^3}{3\mu} r \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho g h - \frac{\sigma}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial h}{\partial r} \right) \right) \quad (4.1)$$

( $\rho$  – плотность жидкости,  $g$  – ускорение силы тяжести). Решение (4.1) при условиях (1.5), (2.2), (2.3) будем искать при  $t \rightarrow \infty$ .

Растекание капли можно описать в первом приближении на основе модели равновесной формы свободной поверхности в поле силы тяжести с динамическим краевым углом, зависящим от скорости. На основе такой модели слабое влияние силы тяжести на растекание капли оценивалось в [2]. Это влияние приводит, в частности, к относительному замедлению убывания краевого угла, хотя растекание ускоряется. Инте-

ресно найти границы применимости равновесной модели по числу Бонда

$$B = \rho g r_0^2 / \sigma \quad (4.2)$$

Решение  $h(r, t)$  будем искать в виде ряда по степеням  $Ca$  и  $B$  с коэффициентами  $\varphi_{nm}(r, t)$ . При этом учтем наиболее важные слагаемые с низшими степенями

$$h = \sum_{m=0}^M B^m \varphi_{0m} + Ca \sum_{m=0}^2 B^m \varphi_{1m} + Ca^2 \varphi_{20} + \dots \quad (4.3)$$

$$\varphi_{nm} Ca^n B^m = f_{nm}; \quad f_{n0} \equiv f_n, \quad f_0 = a_0 z; \quad M \geq 2$$

Величины  $f_n$  известны из (2.4), (2.12) и (3.3) при  $B = 0$ .

Благодаря малости квадратичного по  $Ca$  слагаемого  $f_{20}$  слагаемые вида  $Ca^2 B^m$ ,  $m \geq 1$ , не рассматриваются. Ввиду того, что второй член (4.3) мал по сравнению с первым, разумно квадратичное приближение по  $B$  при одновременном учете большего числа членов в первой сумме в (4.3). Для определения коэффициентов  $f_{nm}$  в (4.3) удобно проинтегрировать уравнение (4.1), принимая во внимание (2.3). Получим

$$\frac{3\mu r_0^4}{16\sigma h^3} \int_z^1 \frac{\partial' h}{\partial t} dz = (1-z) \left[ -\frac{B}{4} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (1-z) \frac{\partial h}{\partial z} \right] \quad (4.4)$$

Производная  $\partial'/\partial t$  определена в (2.8). Условия для нахождения коэффициентов  $f_{nm}$  при  $n + m > 0$  следуют из (2.3), (2.5), (2.6)

$$f_{nm} = 0, \quad z = 0; \quad (1-z) \frac{\partial f_{nm}}{\partial z} = 0, \quad z = 1; \quad \int_0^1 f_{nm} dz = 0 \quad (4.5)$$

Подставляя (4.3) в (4.4), найдем

$$f_{01} = \frac{1}{48} B a_0 (2z - 3z^2) \quad (4.6)$$

Для нахождения коэффициентов в (4.3) достаточно представить величины в левой части (4.4) в следующем виде:

$$h = f_0 + f_{01} + f_{02} + f_{10} + \dots$$

$$f_0^3 / h^3 = 1 - 3(f_{10} + f_{01} + f_{02}) / f_0 + 6f_{01}^2 / f_0^2 + \dots$$

Вычисляя интегралы

$$\int_z^1 \frac{\partial' f_0}{\partial t} dz = -\frac{2a_0 v}{r_0} z(1-z), \quad \int_z^1 \frac{\partial' f_{01}}{\partial t} dz = -\frac{a_0 v B}{12r_0} z(1-z)^2$$

получим после подстановки (4.3) в (4.4) уравнение для  $f_{11}$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (1-z) \frac{\partial f_{11}}{\partial z} - \frac{B}{4} \frac{\partial f_{10}}{\partial z} = \frac{\beta B}{48a_0^2} \left( \frac{4}{z^2} - \frac{7}{z} \right)$$

Отсюда при учете выражения  $f_{10}$  по (2.12) и условий (4.5) находим

$$f_{11} = \frac{\beta B}{48a_0^2} \left( \frac{13}{2} z - 6z^2 - 17z \ln z + (13 - 12z) \int_0^z \frac{\ln z}{1-z} dz \right) \quad (4.7)$$

Квадратичное по  $B$  слагаемое (4.3), не зависящее от  $Ca$ , находится из (4.4) с левой частью, равной нулю. Получим

$$f_{02} = \frac{1}{1152} B^2 a_0 (-z + 2z^3) \quad (4.8)$$

При помощи (2.12), (4.6) и (4.8) из (4.4) получается уравнение для  $f_{12}$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (1-z) \frac{\partial f_{12}}{\partial z} - \frac{B}{4} \frac{\partial f_{11}}{\partial z} = \frac{\beta B^2}{1152 a_0^2} \left( -\frac{8}{z^2} + \frac{22}{z} - 13 \right) \quad (4.9)$$

Решение (4.9) на основе выражения  $f_{11}$  (4.7) и условий (4.5)

$$f_{12} = \frac{\beta B^2}{1152 a_0^2} \left[ \frac{127}{3} z - \frac{79}{2} z^2 + 4z^3 + (-19z + \frac{87}{2} z^2) \ln z + 6 \left( 3z^2 - 7z + \frac{9}{2} \right) \int_0^z \frac{\ln z}{1-z} dz \right]$$

позволяет найти при  $z \rightarrow 0$

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial z} = (1/1152) \beta B^2 a_0^{-2} (8 \ln z + 70/3) \quad (4.10)$$

Другие слагаемые (4.3) при  $z \rightarrow 0$  дают

$$\frac{\partial f_{01}}{\partial z} = \frac{B a_0}{24}, \quad \frac{\partial f_{10}}{\partial z} = \frac{\beta}{a_0^2} (2 + \ln z) \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial f_{02}}{\partial z} = -\frac{1}{1152} a_0 B^2, \quad \frac{\partial f_{11}}{\partial z} = -\frac{\beta B}{a_0^2} \left( \frac{7}{32} + \frac{1}{12} \ln z \right)$$

где  $\beta = \frac{3}{8} r_0^3 \text{Ca}$  из решения первого приближения по  $\text{Ca}$ .

Из (4.10) и (4.11) для  $r \rightarrow r_0$  следует

$$\alpha^3 = \alpha_0^3(B) + 9 \text{Ca} \left[ 2 + \ln z - \frac{5}{4} \frac{B}{24} + \frac{7}{6} \left( \frac{B}{24} \right)^2 + \dots \right] \quad (4.12)$$

$$\alpha = \frac{2}{r_0} \frac{\partial h}{\partial z} + \dots, \quad \alpha_0(B) = \frac{2a_0}{r_0} \left( 1 + \frac{B}{24} - \frac{1}{2} \left( \frac{B}{24} \right)^2 + \dots \right)$$

Отсутствие в (4.12) вклада  $B$  и  $B^2$  в коэффициент перед  $\ln z$  подтверждает правильность формул (4.10) и (4.11). Соответствующие слагаемые есть в (4.10) и (4.11), но при вычислении  $\alpha^3$  они взаимно компенсируются.

Требуя совпадения (4.12) и (1.5) (или (3.6)), получим

$$\alpha_0^3(B) = 9 \text{Ca} \left[ s_0 - 2 + \frac{5}{4} \frac{B}{24} - \frac{7}{6} \left( \frac{B}{24} \right)^2 - \frac{1}{3} \ln s_0 \right], \quad s_0 = \ln \frac{a_0}{h'_m} \quad (4.13)$$

Квадратичное возмущение по  $\text{Ca}$  совпадает с соответствующим слагаемым в (3.7) и поэтому для краткости не записано в (4.13).

Разложения по степеням  $B$ , входящие в (4.13), теряют силу при  $B = 24$ . Это видно, если продолжить разложение  $\alpha_0(B)$ .

$$\alpha_0 = \frac{2a_0}{r_0} \left( 1 + b - \frac{1}{2} b^2 + \frac{2}{5} b^3 - \frac{7}{20} b^4 + \frac{11}{35} b^5 - \frac{797}{2800} b^6 + \dots \right); \quad b = \frac{B}{24} \quad (4.14)$$

Здесь коэффициенты при  $b^n$  мало меняются с номером  $n$  для  $n \gg 1$ , радиус сходимости  $b_0 \approx 1$  ( $B_0 \approx 24$ ). Функцию  $\alpha_0(B)$  можно определить в точном виде вместо использования разложения (4.14), расходящегося при  $B = B_0$ . С возмущением в правой части (4.13), зависящим от  $B$ , дело обстоит сложнее, так как для него весь ряд по  $B$  построить затруднительно.

Отметим, что квадратичное возмущение по  $B$  в (4.13) примерно совпадает с линейным при  $B = 24$ . В этой точке, очевидно, важны все более старшие члены разложения  $\sim \text{Ca} B^m$ . Знак слагаемого с  $B^2$  в правой части (4.13) и аналогия с (4.14) указывают, что

точное значение возмущения по  $B$  в правой части (4.13) не должно превышать по порядку величины первого слагаемого  $(5/96)B$ . Поэтому в силу  $s_0 \gg 1$  формула (4.13) может быть приближенно справедлива при  $B \sim 24$ , если только вычислить  $\alpha_0(B)$  в точном виде. При  $B > 24$  модель равновесной формы капли теряет силу.

Равновесное решение ( $Ca = 0$ ) уравнения (4.1) можно записать через модифицированную функцию Бесселя первого рода нулевого порядка

$$h = \frac{a_0}{2} \left[ I_0(\sqrt{B}) - I_0\left(\frac{r}{r_0} \sqrt{B}\right) \right] \Omega(B) \quad (4.15)$$

$$\Omega^{-1} = I_0(\sqrt{B}) - 2 \int_0^1 I_0(\zeta \sqrt{B}) \zeta d\zeta$$

причем  $a_0$  дается формулой (2.4). Согласно (4.15)

$$\alpha_0(B) = - \left. \frac{\partial h}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \frac{2a_0}{r_0} k(B) \quad (4.16)$$

$$k(B) = \frac{1}{4} \sqrt{B} I_0'(\sqrt{B}) \Omega(B)$$

Корень уравнения  $(B\Omega(B))^{-1} = 0$ , имеющий наименьший модуль, определяет точное значение радиуса сходимости  $B_0$  разложения  $\alpha_0(B)$ . Расчет дает  $B_0 = 26, 37$ , что подтверждает оценку  $B_0 \approx 24$ , полученную из (4.14).

Таким образом, формула для краевого угла (4.13) пригодна до относительно больших значений числа Бонда  $B \sim 24$ , если  $\alpha_0(B)$  определять по (4.16). При  $B \lesssim 12$  формула (4.13) дает точность вычисления  $\alpha_0^3$  не хуже 1% при  $s_0 \sim 10$ .

Присоединяя к (4.13) и (4.16) формулы (2.5), (4.2) и равенство  $v_0 = r_0^*$ , можно записать дифференциальное уравнение изменения радиуса капли  $r_0$  или уравнение изменения краевого угла  $\alpha_0$ , уточняющее аналогичное уравнение первого приближения [2].

Для неполного смачивания ( $\alpha_m > 0$ ) формула динамического краевого угла  $\alpha_0$  при учете значений  $B$  для больших  $t$  записывается аналогично (3.9).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Войнов О.В. Об углах наклона границы в движущихся жидких слоях // ПМТФ. 1977. № 2. С. 92–99.
2. Войнов О.В. Гидродинамика смачивания // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 5. С. 76–84.
3. Войнов О.В. Асимптотика свободной поверхности вязкой жидкости при ползущем движении и зависимость краевого угла смачивания от скорости // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 6. С. 1422–1425.
4. Blake T.D., Haynes J.M. Kinetics of liquid/liquid displacement // J. Coll. Interface Sci. 1969. V. 30. N 3. P. 421–423.
5. Бараш Ю.С. Силы Ван-дер-Ваальса. М.: Наука, 1988. 344 с.
6. Huh C., Scriven L.E. Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line // J. Coll. Interface Sci. 1971. V. 35, N 1. P. 85–101.
7. Hervet H., de Gennes P.G. Dynamique du mouillage: films precurseurs sur solide "sec" // C. r. Acad. Sci. Paris. Ser. II. 1984. T. 299. N 9. P. 499–503.
8. Войнов О.В. Динамическая теория смачивания твердого тела вязкой жидкостью под действием сил Ван-дер-Ваальса // ПМТФ. 1994. № 6. С. 69–85.
9. Войнов О.В. Релаксация жидкого слоя под действием капиллярных сил // ПМТФ. 1970. № 1. С. 73–77.