УДК 533.6.011

© 1995 г. А.И. Рылов

СВОЙСТВА МОНОТОННОСТИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К УРАВНЕНИЯМ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Показано, что решение однородной квазилинейной эллиптической системы двух уравнений обладает свойством монотонности, согласно которому каждая из двух рассматриваемых функций меняется монотонно вдоль линии уровня другой функции. Отмечена связь между свойством монотонности и экстремальными свойствами решений рассматриваемых систем. Предложен алгоритм преобразования некоторых неоднородных и, в частности, однородных систем в однородные, что существенно расширяет объем информации о свойствах монотонности и об экстремальных свойствах решений. Эффективность полученных результатов продемонстрирована на примере осесимметричных и плоских течений жидкости и газа.

Свойства монотонности впервые были установлены для плоских дозвуковых потенциальных, а позднее и для вихревых течений газа [1, 2], причем в качестве функций использовались модуль вектора скорости (позднее давление) и угол наклона вектора скорости. Это свойство широко использовалось [1–7] для анализа потенциальных и вихревых течений. Свойство монотонности было установлено [8] и для асимптотических уравнений трансзвуковых осесимметричных дозвуковых течений.

Предлагаемая работа инициирована естественным стремлением, с одной стороны, выяснить, насколько широк класс систем, решения которых обладают свойством монотонности, и, с другой стороны, расширить объем информации о свойствах монотонности каждой из рассматриваемых систем, в частности, для уравнений гидродинамики.

1. Рассмотрим однородную квазилинейную эллиптическую систему

$$a_{i1}u_x + a_{i2}u_y + b_{i1}\upsilon_x + b_{i2}\upsilon_y = 0 \quad (i = 1,2) \tag{1.1}$$

Предполагается, что $a_{ij} = a_{ij}(x, y, u, \upsilon)$, $b_{ij} = b_{ij}(x, y, u, \upsilon)$ – достаточно гладкие и ограниченные функции своих аргументов.

Многие задачи механики и физики сводятся к изучению систем вида (1.1), а также систем вида (2.1), которые будут рассмотрены ниже.

С использованием матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ система (1.1) может быть записана так:

$$A\nabla u + B\nabla\upsilon = 0$$

По определению система (1.1) является эллиптической, если в рассматриваемой области характеристический определитель

$$h(\varphi) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix}$$

не обращается в нуль ни при каких вещественных значениях угла φ.

Наряду с определителем h далее будут использоваться определители $|A|$, $|B|$ матриц A и B. Можно показать, и это существенно для дальнейшего, что эти определители не обращаются в нуль для эллиптической системы (1.1).

Действительно, анализ дискриминанта характеристического уравнения $h(\varphi) = 0$ показывает, что

$$d = (a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21})^2 - 4|A|\,|B|$$

В области эллиптичности системы (1.1) $d < 0$. Следовательно, в этой области $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$, $|A|\,|B| > 0$.

Рассмотрим линию $u = \text{const}$, являющуюся границей выбранной области повышенного или пониженного (относительно линии $u = \text{const}$) значения u. Последнее означает, что при прохождении возможной точки ветвления для продолжения линии $u = \text{const}$ выбирается ветвь, примыкающая к указанной области. В результате при движении вдоль указанной линии знак нормальной производной u_n не меняется.

Теорема 1. При движении вдоль линии $u = \text{const}$ функция υ меняется монотонно, возможно, не строго монотонно. *Теорема* остается в силе при замене местами функций u и υ.

Доказательство. Пусть в произвольной точке линии $u = \text{const}$ касательный вектор l составляет угол φ с осью x. Для вычисления производных u_x и u_y в зависимости от производной υ_l (производная u_l по определению равна нулю) имеем систему, составленную из уравнений (1.1) и уравнений

$$\cos\varphi\, u_x + \sin\varphi\, u_y = 0, \quad \cos\varphi\, \upsilon_x + \sin\varphi\, \upsilon_y = \upsilon_l$$

Решая эту систему, находим

$$u_x h(\varphi) = -\upsilon_l \sin\varphi\, |B|, \quad u_y h(\varphi) = \upsilon_l \cos\varphi\, |B|$$

Отсюда имеем $\upsilon_l = u_n h(\varphi)/|B|$.

В рассматриваемой области определители $h(\varphi)$ и $|B|$ в нуль не обращаются и свои знаки не меняют. В соответствии с выбором линии $u = \text{const}$ производная u_n также не меняет свой знак. Следовательно, в области эллиптичности системы (1.1) вдоль выбранной линии $u = \text{const}$ производная υ_l не менят свой знак и, как следствие, при движении вдоль линии $u = \text{const}$ функция υ меняется монотонно.

Пусть касательная к линии $\upsilon = \text{const}$ составляет угол ω с осью x. Тогда вдоль линии $\upsilon = \text{const}$, являющейся границей выбранной области повышенного или пониженного (относительно линии $\upsilon = \text{const}$) значения υ, имеем $u_l = -\upsilon_n h(\omega)/|A|$. Из данного соотношения следует монотонное изменение функции u вдоль выбранной линии $\upsilon =$ $= \text{const}$. Теорема доказана.

Отметим также, что из ограниченности определителей h, $|A|$ и $|B|$ следует, что равенства $u_x = u_y = 0$ возможны лишь при $\upsilon_x = \upsilon_y = 0$ и наоборот.

Результаты теоремы наглядно иллюстрируют и дополняют известные принципы максимума для функций u и υ. Действительно, если во внутренней точке области эллиптичности системы (1.1) функция u (или υ) достигает экстремума, то эта точка должна охватываться замкнутыми линиями $u = \text{const}$ (или $\upsilon = \text{const}$), при обходе которых функция υ (или u) меняется монотонно. Но это исключено для однозначно определенных функций υ и u.

Особое рассмотрение требуется в случае, когда допустима многозначность функций. Так, например, в плоских дозвуковых течениях газа при обходе замкнутых линий постоянного давления допустимо изменение угла наклона вектора скорости на величину, кратную 2π. Это возможно при наличии внутренних точек торможения или при наличии областей с замкнутыми линиями тока [9].

Следует отметить определенную взаимосвязь между рассмотренным выше свойством монотонности и известным фактом знакопостоянства якобиана J решения эллиптической системы (1.1). Действительно, имеем

$$J = u_x v_y - u_y v_x = -u_n^2 h(\varphi)/|B| = -v_n^2 h(\omega)/|A|$$

Следовательно, в области эллиптичности системы (1.1) якобиан J не меняет свой знак и обращается в нуль лишь при равенстве нулю четырех производных $u_x, \ldots, v_y$.

При анализе системы (1.1) особый интерес представляет случай, когда $J \neq 0$ во всей области эллиптичности, что делает возможным обращение зависимых и независимых переменных. Неравенство $J \neq 0$ возможно лишь при отсутствии внутренних точек ветвления (отсутствие точек локального экстремума следует из принципа максимума).

Как оказывается, для некоторых краевых задач отсутствие точек ветвления может быть доказано с помощью анализа линий u = const и v = const, выходящих из предполагаемой точки ветвления.

Проиллюстрируем сказанное на примере задачи, когда каждому значению v на границе рассматриваемой области отвечает не более двух точек. Из предполагаемой точки ветвления выходит не менее четырех линий уровня v = const. При этом при круговом обходе точки ветвления между двумя ближайшими линиями уровня, вдоль которых $v_l \geqslant 0$, обязательно существует линия уровня, вдоль которой $v_l \leqslant 0$ и соответственно наоборот. Эти рассуждения основаны на том, что внутри области эллиптичности системы (1.1) одновременное равенство нулю производных u_x, u_y, v_x, v_y возможно лишь в изолированных точках, но никак не на отрезке. Согласно теореме 1 указанные линии уровня не могут замкнуться друг на друга. Следовательно, они должны выйти на границы области, но это не согласуется с условием задачи. Тем самым предположение о наличии внутренней точки ветвления опровергнуто.

Рассмотренная ситуация реализуется, в частности, при плоском стационарном безотрывном течении несжимаемой жидкости в замкнутом канале, образованном двумя непересекающимися замкнутыми выпуклыми кривыми. Другой пример, относящийся к обтеканию выпуклых тел, приведен в [6].

2. Рассмотрим неоднородную квазилинейную эллиптическую систему

$$a_{i1}u_x + a_{i2}u_y + b_{i1}v_x + b_{i2}v_y = c_i(x, y, u, v) \quad (i = 1,2) \tag{2.1}$$

отличающуюся от системы (1.1) наличием ненулевых правых частей. Для данной системы сделанные выше выводы о монотонном изменении функций u и v вдоль соответственно линии v = const и u = const теряют силу. В связи с этим определенный интерес представляют такие преобразования функций u и v, при которых система из неоднородной переходит в однородную. Подобные преобразования интересны также и с точки зрения перевода одной однородной системы в другую однородную систему. Для построения таких преобразований воспользуемся следующими соображениями.

Как известно, однородная система (1.1) имеет двухпараметрическое семейство решений

$$u = a, \quad v = b \tag{2.2}$$

где a и b – произвольные постоянные.

Верно и обратное. Если при произвольных постоянных a и b соотношения (2.2) являются решением системы (2.1), то в этом случае $c_1 = c_2 = 0$, а сама система (2.1) однородна и совпадает с системой (1.1).

Приведенные факты указывают на следующий возможный алгоритм преобразования неоднородной системы (2.1) в однродную (1.1).

Пусть система (2.1) имеет двухпараметрическое семейство решений

$$u = U(x, y, \lambda, \gamma), \quad v = V(x, y, \lambda, \gamma) \tag{2.3}$$

где U и V – известные функции, λ и γ – произвольные постоянные.

Для дальнейших построений более удобна неявная форма записи данного семейства решений

$$f(x, y, u, \upsilon) = a, \quad g(x, y, u, \upsilon) = b \qquad (2.4)$$

где f и g – известные функции, a и b – произвольные постоянные.

Постоянные a и b могут и не совпадать с постоянными λ и γ. Они выражаются через λ и γ с помощью некоторых произвольных функций. Иными словами, каждое семейство решений (2.3) может быть записано в неявной форме неограниченным числом способов.

И, наконец, сказанное выше и сравнение соотношений (2.4) и (2.2) указывает на то, что преобразование неоднородной системы (2.1) в однородную может быть осуществлено с помощью замены функций u и υ на $\alpha = f(x, y, u, \upsilon)$ и $\beta = g(x, y, u, \upsilon)$ с функциями f и g из (2.4).

Теорема 2. Пусть неоднородной системе (2.1) с ограниченными и достаточно гладкими функциями $a_{11},\ldots, b_{22}, c_1, c_2$ удовлетворяет двухпараметрическое семейство решений (2.3), которое в свою очередь может быть записано неограниченным числом способов в неявной форме (2.4), и пусть при этом в рассматриваемой области якобиан $J = f_u g_\upsilon - f_\upsilon g_u \neq 0$. Тогда замена функций u и υ функциями $\alpha = f(x, y, u, \upsilon)$ и $\beta = g(x, y, u, \upsilon)$ переводит неоднородную систему (2.1) в однородную систему с ограниченными коэффициентами при производных от α и β.

Действительно, непосредственное вычисление производных u_x, υ_x, u_y, υ_y с помощью системы

$$f_u u_x + f_\upsilon \upsilon_x = \alpha_x - f_x, \quad g_u u_x + g_\upsilon \upsilon_x = \beta_x - g_x$$

и аналогичной системы при замене производных по x на производные по y и подстановка полученных значений в систему (2.1) приводит к неоднородной системе, в левой части которой собраны производные α_x, α_y, β_x, β_y с ограниченными сомножителями, а в правой, кроме функций c_1 и c_2, производные f_x, f_y, g_x, g_y с сомножителями. Но по условию теоремы произвольные постоянные значения α и β являются решением полученной системы. Следовательно, правые части этой системы равны нулю, а сама система является однородной.

Очевидно, теорема 2 остается в силе, если исходная система однородна. В этом случае речь идет о замене одной однородной системы другой. В частности, так как однородной системе (1.1) удовлетворяет двухпараметрическое семейство решений (2.2), то ей удовлетворяет и семейство (2.4) с достаточно гладкими произвольными функциями f и g, зависящими лишь от u и υ. Следовательно, невырожденное преобразование $\alpha = f(u, \upsilon)$ и $\beta = g(u, \upsilon)$, $J \neq 0$, переводит систему (1.1) в другую однородную систему.

На основании теорем 1 и 2 могут быть сделаны следующие выводы.

Если однородная эллиптическая система (1.1) (или неоднородная (2.1)) имеет двухпараметрическое семейство решений (2.4), и при этом в рассматриваемой области якобиан $J = f_u g_\upsilon - f_\upsilon g_u \neq 0$, то на произвольном решении указанной системы функции $f(x, y, u, \upsilon)$ и $g(x, y, u, \upsilon)$ меняются монотонно, возможно, и не строго монотонно, вдоль линий $g(x, y, u, \upsilon) = \text{const}$ и $f(x, y, u, \upsilon) = \text{const}$. (При этом, как и ранее, предполагается, что при прохождении возможной точки ветвления линии $f = \text{const}$ для продолжения выбирается ветвь, являющаяся границей выбранной области повышенного или пониженного значения f.) Непосредственным следствием сказанного для функции f (функции g), имеющей в каждой точке рассматриваемой области на плоскости x, y единственное значение, является отсутствие замкнутых линий $f = \text{const}$ ($g = \text{const}$), целиком лежащих в рассматриваемой области, а значит и отсутствие внутренних точек экстремума функции f (функции g).

Применительно к однородной системе (1.1) это означает, что классический принцип максимума, справедливый для функций u и υ, распространяется также и на функции

$f(x, y, u, \upsilon)$ и $g(x, y, u, \upsilon)$, определяющие двухпараметрическое семейство решений вида (2.4) системы (1.1). Также отметим, что для системы (1.1) в качестве функций f и g могут быть использованы произвольные достаточно гладкие функции, зависящие лишь от u и υ, для которых указанный выше якобиан $J \neq 0$.

Число N, $0 \leqslant N \leqslant \infty$, возможных соотношений (2.3) и входящие в каждое из них функции U и V определяются видом конкретной рассматриваемой системы (1.1) или (2.1) и являются важными характеристиками рассматриваемой системы. Как отмечалось выше, каждое соотношение (2.3) может быть записано в неявной форме (2.4) неограниченным числом способов. Из соотношений (2.4) и из отвечающих им соотношений (2.3) особый интерес представляют те, для которых анализ линий $f =$ $=$ const и $g =$ const позволяет сделать полезные выводы о свойствах решения краевой задачи для рассматриваемой системы.

3. Рассмотрим некоторые приложения полученных выше результатов к плоским и осесимметричным течениям идеальных (невязких и нетеплопроводных) жидкостей и газов. Вихревые и потенциальные течения описываются следующими системами уравнений:

$$(M^2-1)(p_x\cos\theta+p_y\sin\theta)+\rho q^2(-\theta_x\sin\theta+\theta_y\cos\theta)=-\mu\rho q^2\sin\theta/y \tag{3.1}$$

$$-p_x\sin\theta+p_y\cos\theta+\rho q^2(\theta_x\cos\theta+\theta_y\sin\theta)=0$$

$$(u^2-c^2)u_x+u\upsilon(u_y+\upsilon_x)+(\upsilon^2-c^2)\upsilon_y=\mu\upsilon c^2/y \tag{3.2}$$

$$u_y-\upsilon_x=0$$

Здесь и далее p, ρ, s – давление, плотность и энтропия, связанные уравнением состояния $p = p(\rho, s)$, q и θ – модуль и угол наклона вектора скорости, M – число Маха, c – скорость звука, u и υ – проекции вектора скорости на оси x и y (в осесимметричном случае ось x совпадает с осью симметрии), μ = 0, 1 в плоском и осесимметричном случаях. В случае несжимаемой жидкости $c = \infty$, $M = 0$. Различные типы течений рассмотрим в следующей последовательности.

Осесимметричные вихревые течения. И для газа и для несжимаемой жидкости не известны двухпараметрические семейства решений вида (2.3) и (2.4). Как следствие, не известны и однородные системы уравнений вида (1.1), описывающие такие течения.

Плоские вихревые течения. И для газа и для несжимаемой жидкости известно лишь одно двухпараметрическое семейство решений вида (2.3)

$$p = \lambda = \text{const}, \quad \theta = \gamma = \text{const} \tag{3.3}$$

Следовательно, функции p и θ обладают свойством монотонности, согласно которому вдоль линии $p =$ const функция θ монотонна и наоборот. Для несжимаемой жидкости сказанное справедливо для всей области течения, а для газа лишь в дозвуковой области течения. На данные свойства функций p и θ впервые было указано в [2], они активно использовались для анализа вихревых дозвуковых течений в [2–7].

Семейство решений (3.3) может быть записано в неявной форме в виде (2.4) множеством других способов, например в форме

$$p\cos\theta = a = \text{const}, \quad p\sin\theta = b = \text{const} \tag{3.4}$$

Следовательно, функции $f = p\cos\theta$ и $g = p\sin\theta$ также обладают свойством монотонности. Замена функций p и θ функциями $\alpha = p\cos\theta$ и $\beta = p\sin\theta$ переводит однородную систему (3.1) в другую однородную систему.

Осесимметричные потенциальные течения. Для течений газа можно указать два двухпараметрических семейства решений вида (2.3). Первое из них отвечает точному решению для течения от источников (стоков), равномерно распределенных на оси симметрии, с удельной интенсивностью b (при $b > 0$ источник, при $b < 0$ сток) и движущихся вдоль оси симметрии с постоянной скоростью $u = a$. Параметрами решения и являются величины a и b. Самая естественная (но не единственная) форма записи для этого течения в неявном виде (2.4) выглядит так:

$$u = a, \quad y\rho\upsilon = b \tag{3.5}$$

Из этого следует, что в произвольном дозвуковом осесимметричном потенциальном течении функции $f = u$ и $g = y\rho\upsilon$ обладают свойством монотонности, согласно которому g монотонна вдоль линии $f = \text{const}$ и наоборот. Замена функций u и υ функциями $\alpha = u$ и $\beta = y\rho\upsilon$ переводит неоднородную систему (3.2) в следующую однородную систему:

$$(1-M^2)\alpha_x - \frac{u\upsilon}{y\rho c^2}\beta_x + \frac{c^2-\upsilon^2}{y\rho c^2}\beta_y = 0$$

$$\frac{u\upsilon}{c^2}\alpha_x - \frac{c^2-\upsilon^2}{c^2}\alpha_y + \frac{\beta_x}{y\rho} = 0$$

при этом якобиан перехода при $M < 1$ не обращается в нуль. Ранее на свойство монотонности функций $f = u$ и $g = y\upsilon$ для асимптотических трансзвуковых осесимметричных уравнений было указано в [8].

Второе двухпараметрическое семейство решений отвечает течению от источника (стока) интенсивности b, помещенного на оси симметрии в точке $x = x_0$; параметры течения – x_0 и b. Одна из возможных форм записи в неявном виде (2.4) выглядит так

$$f = x - \frac{yu}{\upsilon} = x_0, \quad g = \frac{\rho y^2(u^2+\upsilon^2)^{3/2}}{\upsilon^2} = b \tag{3.6}$$

Следовательно, данные функции f и g обладают свойством монотонности в дозвуковой области; замена функций u и υ функциями $\alpha = f$ и $\beta = g$ также переводит неоднородную систему (3.2) в однородную систему, которая из-за ее громоздкости здесь не приводится.

В случае несжимаемой жидкости к приведенным выше результатам добавляется неограниченное множество двухпараметрических семейств решений вида (3.2), отвечающих взаимодействию равномерного набегающего потока с произвольным числом источников, стоков и дублетов, помещенных на оси симметрии. Ограничимся рассмотрением взаимодействия равномерного потока $u = a$ с источником (стоком) интенсивности b, помещенным в начале координат. Потенциал данного течения имеет вид

$$\varphi = ax - b(x^2+y^2)^{-1/2}$$

Учитывая, что $\varphi_x = u$, $\varphi_y = \upsilon$, двухпараметрическое семейство решений в виде (2.4) может быть записано следующим образом:

$$f = u - \frac{\upsilon x}{y} = a, \quad g = \frac{\upsilon(x^2+y^2)^{3/2}}{y} \tag{3.7}$$

Следовательно, функции f и g обладают свойством монотонности и замена функций u и υ функциями $\alpha = f$ и $\beta = g$ переводит неоднородную систему (3.2) в следующую однородную систему:

$$(x^2+y^2)^{3/2}\alpha_x + x\beta_x + y\beta_y = 0, \quad (x^2+y^2)^{3/2}\alpha_y - y\beta_x + x\beta_y = 0$$

Завершая раздел об осесимметричных потенциальных течениях, можно отметить, что приведенные однородные системы для этих течений, так же как и другие однородные системы, которые можно построить по указанному алгоритму, имеют и некоторый самостоятельный интерес, не связанный со свойствами монотонности.

Плоские потенциальные течения. Для течений газа можно указать четырехпараметрическое семейство решений, отвечающее суперпозиции источника (стока) интенсивности b и потенциального вихря интенсивности a с общим центром, расположенным в точке $x = x_0$, $y = y_0$. Параметрами служат величины a, b, x_0, y_0. Фиксируя два любых параметра или две комбинации из этих параметров, можно построить достаточно большое семейство двухпараметрических решений вида (2.3) и (2.4).

Ограничимся двумя случаями.

Пусть фиксированы параметры x_0, y_0. Тогда решение в форме (2.4) может быть записано в виде

$$f = \rho(u(x - x_0) + \upsilon(y - y_0)) = a, \quad g = \upsilon(x - x_0) - u(y - y_0) = b \tag{3.8}$$

Следовательно, для дозвуковых плоских потенциальных течений функции f и g обладают свойством монотонности и замена $\alpha = f$, $\beta = g$ переводит однородную систему (3.2) в другую однородную систему

$$((x - x_0)(M^2 - 1) - \upsilon\beta / c^2)\alpha_x + ((y - y_0)(M^2 - 1) + u\beta / c^2)\alpha_y -$$

$$-\rho(M^2 - 1)((y - y_0)\beta_x - (x - x_0)\beta_y) = 0$$

$$(y - y_0)\alpha_x - (x - x_0)\alpha_y - \rho((x - x_0)(M^2 - 1) - \upsilon\beta / c^2)\beta_x - \rho((y - y_0)(M^2 - 1) + u\beta / c^2)\times$$
$$\times\ \beta_y = 0$$

Для несжимаемой жидкости после некоторых преобразований имеем

$$\alpha_x + \beta_y = 0, \quad \alpha_y - \beta_x = 0$$

В следующем примере фиксированы параметры a, b, и семейство решений в форме (2.4) записывается так:

$$f = x - \frac{a\cos\theta}{\rho q} - \frac{b\sin\theta}{q} = x_0, \quad g = y - \frac{a\sin\theta}{\rho q} + \frac{b\cos\theta}{q} = y_0 \tag{3.9}$$

Следовательно, для рассматриваемых течений функции f и g обладают свойством монотонности и замена $\alpha = f$, $\beta = g$ переводит однородную систему (3.2) в другую однородную систему. Как и ожидалось, каждое из уравнений (3.2) переходит в очень громоздкое уравнение. Но после некоторых преобразований полученную систему можно свести к следующей достаточно компактной системе:

$$(2 - M^2\sin^2 2\theta)(\alpha_x - \beta_y) - 2M^2\sin 2\theta(\alpha_y\sin^2\theta - \beta_x\cos^2\theta) = 0$$

$$(1 - M^2\sin^2\theta)\alpha_y + (1 - M^2\cos^2\theta)\beta_x = 0$$

при этом, согласно (3.9), функции M и θ зависят от x, y, α, β, a и b.

Для несжимаемой жидкости система имеет следующий вид:

$$\alpha_x - \beta_y = 0, \quad \alpha_y + \beta_x = 0$$

Характерно, что в обоих предыдущих примерах такие неочевидные, если отвлечься от свойств двухпараметрических семейств решений вида (2.4), и заметно отличающиеся друг от друга замены функций u и υ на функции α и β в случае несжимаемой жидкости переводят систему Коши–Римана (3.2) в другие системы Коши–Римана.

Кроме рассмотренных ситуаций в случае несжимаемой жидкости может быть построено неограниченное множество двухпараметрических семейств решений вида (2.3), отвечающих взаимодействию равномерного набегающего потока с произвольным числом источников, стоков, дублетов и потенциальных вихрей, центры которых расположены в произвольных точках плоскости x, y.

Ограничимся рассмотрением взаимодействия равномерного горизонтального набегающего потока со скоростью $u = a$ и течения от источника (стока) интенсивности b, находящегося в начале координат. Потенциал результирующего течения имеет вид

$$\phi = ax + b \ln(x^2 + y^2)/2$$

Двухпараметрическое семейство решений в неявной форме (2.4) может быть записано так:

$$f = u - \upsilon x/y = a, \quad g = \upsilon(x^2 + y^2)/y = b \tag{3.10}$$

Следовательно, функции f и g обладают свойством монотонности, и замена $\alpha = f$, $\beta = g$ переводит однородную систему (3.2) в следующую однородную систему:

$$(x^2 + y^2)\alpha_x + x\beta_x + y\beta_y = 0$$
$$(x^2 + y^2)\alpha_y - y\beta_x + x\beta_y = 0$$

Построенные выше функции f и g в областях эллиптичности обладают свойством монотонности, согласно которому функция g меняется монотонно вдоль линии $f = \mathrm{const}$ и наоборот. Из этого следует, что в произвольной внутренней точке данной области, в которой f и g определены однозначно как функции координат этой точки, функции не могут достигать своего локального экстремума.

Действительно, в противном случае в достаточно малой окрестности этой точки должны существовать замкнутые линии уровня рассматриваемой функции, что противоречит свойству монотонности.

Исключение составляют изолированные точки, в которых имеет место многозначность одной или обеих рассматриваемых функций. В этом случае возможны замкнутые линии уровня, охватывающие данную точку или проходящие через нее и, следовательно, в данной точке возможен локальный экстремум одной или обеих рассматриваемых функций.

Применительно к построенным выше функциям можно выделить три типа подобных точек: внутренние точки торможения, которые возможны, например, при соударении струй (в этих точках многозначна функция θ, что существенно для f и g в соотношениях (3.3), (3.4), (3.6); (3.9)); центр завихрения, в котором $p = 0$ (такая ситуация возможна в несжимаемой жидкости; в этой точке также многозначна функция θ; данная ситуация существенна для f и g в соотношениях (3.3), (3.5)–(3.8); (3.10)); точка с координатами $x = y = 0$, в которой многозначна функция x/y (это существенно лишь для функций f и g из (3.7) и (3.10)).

В заключение отметим, что экстремальные свойства функций p и θ для плоских вихревых течений установлены в [2]. Кроме того, из классических курсов математической физики хорошо известны экстремальные свойства функций u, υ, q, θ для плоских потенциальных течений.

Автор благодарит С.К. Годунова, П.И. Плотникова и А.М. Блохина за обсуждения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (конкурс индивидуальных грантов 1993 г.) и Российского фонда фундаментальных исследований (95-01-00958 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский А.А., Таганов Г.И.* Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 4. С. 481–502.
2. *Никольский А.А.* О плоских вихревых течениях газа // Теоретические исследования по механике жидкости и газа: Тр. ЦАГИ. 1981. Вып. 2122. С. 74–85.
3. *Шифрин Э.Г.* Некоторые свойства симметричного обтекания профиля с отошедшей ударной волной // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 5. С. 99–101.
4. *Рылов А.И.* О некоторых режимах обтекания заостренных тел конечной толщины при

произвольных сверхзвуковых скоростях набегающего потока // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 95–99.
5. *Рылов А.И.* О некоторых свойствах дозвукового течения за ударной волной, возникающей при сверхзвуковом обтекании тел конечной толщины // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 780–789.
6. *Рылов А.И.* О свойствах монотонности некоторых вихревых плоских течений несжимаемой жидкости и дозвуковых течений газа // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 386–391.
7. *Рылов А.И.* О структуре дозвукового течения между несимметричным телом и отошедшей ударной волной // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 87–92.
8. *Шифрин Э.Г.* Исследование осесимметричных трансзвуковых течений при помощи специальной плоскости годографа // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 3. С. 549–558.
9. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
20.IV.1994