

УДК 530.12;531.51

© 1995 г. М.Н. Зарипов, Н.Р. Сибгатуллин, А. Чаморро

**О ВОЗМОЖНОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ БЫСТРО  
ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ В ПОЛЯХ ТЯГОТЕНИЯ**

Показывается возможность равновесия системы двух быстро вращающихся дисков, когда их ньютоново притяжение в точности уравновешивается гравимагнитным отталкиванием. Для расстояния между дисками получена зависимость от моментов импульсов дисков относительно оси симметрии. Гравитационные поля дисков моделировались с помощью сверхкритических решений Керра в приближении слабого поля. Условие отсутствия конических точек на оси между дисками и условие отсутствия замкнутых времениподобных линий в общей теории относительности (ОТО) дают в ньютоновском пределе систему двух дисков в равновесии со специальным распределением момента импульса и плотности.

В стационарных гравитационных полях силу, действующую на пробную массу, можно разбить на две части, одна из которых для малых скоростей частиц в приближении слабого поля совпадает с ньютоновской, другая же представляет собой гравимагнитную (или гравитомагнитную) силу. Гравимагнитная сила действует подобно кориолисовой и вызывает прецессию гироскопов в поле вращающихся масс [1, 2]; обсуждалась [3] аналогия с магнитным полем, вызывающим ларморовское вращение электронов. Для экспериментального обнаружения гравимагнитной силы были предложены различные подходы.

В настоящей статье используется приближение слабого поля для стационарных решений уравнений Эйнштейна без предположения о малости скоростей по сравнению со скоростью света. Выписано выражение для силы взаимодействия между быстровращающимися объектами на больших расстояниях (разд. 1). Показано, что равновесие в системе соосно вращающихся дисков возможно лишь при условии, что расстояние между ними не превышает их размер. Показано, что распределение вещества в диске должно быть компактным, так как между пылевидными кольцами равновесие невозможно (разд. 2). Центральный результат статьи – доказательство возможности равновесия двух керровских дисков, при котором их притяжение глобально уравновешивается гравимагнитным отталкиванием (разд. 3).

Отметим, что в рамках ОТО предположение о возможности стационарных конфигураций солитонных решений без подпорок выдвинуто в [4]. Было предпринято [5–7] более тщательное исследование этого вопроса при помощи формализма В.А. Белинского и В.Е. Захарова [8] и продемонстрирована невозможность удовлетворения обоих условий регулярности на оси симметрии между черными дырами: отсутствия конических точек и замкнутых времениподобных линий.

Эти алгебраические условия исследовались [9] при помощи аналитического продолжения параметров решения для двух керровских черных дыр в сверхкритическую область, для двух равных дисков приближенно вычислено расстояние между ними. Прямой подход, не использующий процедуру аналитического продолжения, был развит авторами [10]. Путем численного исследования соответствующей алгебраической системы была обнаружена возможность глобального равновесия в системе диск – черная дыра, слияние дисков при сближении и образование экстремальной черной дыры Керра и другие эффекты. Подход, развитый ниже, асимптотически согласуется с приближением слабого поля для точного решения [10].

1. Уравнениям времениподобных геодезических в стационарных гравитационных полях можно придать вид

$$\frac{d}{ds} \frac{\gamma v_\alpha}{c} = -\frac{\gamma^2}{2} \left( \frac{h_{,\alpha}}{h} - \gamma_{\beta\gamma,\alpha} v^\beta v^\gamma \right) + \frac{\gamma^2 v^\beta \sqrt{h}}{c} (g_{\beta,\alpha} - g_{\alpha,\beta}) \quad (1.1)$$

Здесь приняты обычные обозначения [1]:  $g_\alpha \equiv -g_{0\alpha}/g_{00}$ ,  $h \equiv g_{00}$ ,  $\gamma_{\beta\delta} \equiv -g_{\beta\delta} + g_{\beta 0} g_{\delta 0}/g_{00}$  ( $\alpha, \beta, \delta = 1, 2, 3$ ),  $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$  ( $i, j = 0, 1, 2, 3$ ) – квадрат интервала стационарного пространства-времени,  $\gamma \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ ,  $v^\beta$  – компоненты трехмерной скорости, жонглирование индексами осуществляется при помощи метрики  $\gamma_{\alpha\beta}$ . Для слабых стационарных полей  $g_{00} \approx 1 + 2\phi/c^2$  и движений, при которых в декартовых координатах  $\gamma_{\beta\gamma,\alpha} v^\beta v^\gamma \approx -\phi v^2/c^2$ , уравнения (1.1) принимают вид

$$d\gamma v_\alpha / d\tau = -\gamma^2 \phi_{,\alpha} (1 + v^2/c^2) + \gamma^2 (\mathbf{v} \times \mathbf{H})_\alpha / c \quad (1.2)$$

Здесь  $\tau$  – собственное время частицы,  $\mathbf{H} \equiv \text{rot } \mathbf{A}$ ,  $A_\alpha \equiv c^2 g_\alpha$ . Уравнения движения сплошной среды с тензором энергии – импульса  $T_{ij}$  в слабых стационарных полях могут быть записаны в виде

$$T_{\alpha,i}^i = -\phi_{,\alpha} (2T_0^0 - T_i^i) / c^2 + (\mathbf{j} \times \mathbf{H})_\alpha / c, \quad c\mathbf{j}_\alpha \equiv T_\alpha^0$$

Для полей, входящих в уравнения (1.2), из линеаризованных уравнений Эйнштейна имеем

$$\Delta\phi = G(2T_0^0 - T_i^i) / c^2 \quad (1.3)$$

где  $T_i^i$  – след тензора энергии – импульса источников поля, причем

$$\text{rot } \mathbf{H} = 16\pi G\mathbf{j}/c \quad (1.4)$$

Вектор  $c\mathbf{j}$  имеет своими компонентами компоненты  $T_\alpha^0$  тензора энергии – импульса источников. Если размеры системы тел малы по сравнению с масштабом изменения гравитационного поля и ее полный импульс равен нулю:

$$\int_V T_\alpha^0 dV = \sum_\alpha m_\alpha \gamma_\alpha^2 v_{\alpha\alpha} = 0$$

то силу, действующую на такую систему, можно представить в виде

$$\nabla(M_1\phi + \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{H}/(2c))$$

где  $\mathbf{K}_1$  – полный момент импульса системы

$$\mathbf{K}_1 = \int_V (\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \times \mathbf{j} dV = \sum_\alpha m_\alpha \gamma_\alpha^2 (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{R}_1) \times \mathbf{v}_\alpha$$

а  $M$  – полная масса системы

$$c^{-2} \int_V (2T_0^0 - T_i^i) dV = \sum_\alpha m_\alpha \gamma_\alpha^2 (1 + v_\alpha^2/c^2)$$

Если использовать приближенные решения уравнения Лапласа вдали от источников с массой  $M_2$  и моментом импульса  $\mathbf{K}_2$  то

$$\phi \approx -\frac{M_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_2|}, \quad \mathbf{H} \approx -\frac{2G}{c} \nabla \left( (\mathbf{K}_2 \nabla) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_2|} \right)$$

В этом случае предположение  $\gamma_{\beta\gamma,\alpha} v^\beta v^\gamma \approx -\phi_{,\alpha} v^2/c^2$  следует из того, что вдали от источников в первом приближении имеем  $h_\beta^\alpha = -\delta_\beta^\alpha h_0^0$  [1]. Таким образом, сила, с ко-

торой один покоящийся удаленный источник действует на другой (для определенности, тело 2 на тело 1) равна

$$\mathbf{F} = \frac{G}{c^2} \nabla_1 \left( -\frac{M_1 M_2 c^2}{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|} + K_{1\alpha} K_{2\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta} \frac{1}{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|} \right) \quad (1.5)$$

2. Однако взаимодействие между протяженными объектами не описывается столь простой формулой. Вычислим сначала проекцию на ось симметрии гравимагнитной силы взаимодействия между двумя вращающимися кольцами  $F_{gm}$ . Она равна  $K_1 H_r / c$ , где  $H_r$  — радиальная компонента напряженности гравимагнитной силы, создаваемой в точках первого кольца вторым кольцом,  $K_A$  — угловой момент кольца  $A$  ( $A = 1, 2$ ) относительно оси вращения. Из уравнения (1.4) получим

$$H_r = -\frac{4GK_2 L}{\pi c(L^2 + R_1^2 + R_2^2)^{3/2}} \int_0^\pi \frac{\cos \phi d\phi}{(1 - \kappa \cos \phi)^{3/2}}, \quad \kappa \equiv \frac{2R_1 R_2}{L^2 + R_1^2 + R_2^2}$$

На больших расстояниях  $\kappa \ll 1$ , и гравимагнитная сила отталкивания будет равна  $6GK_1 K_2 / (c^2 L^4)$  в соответствии с формулой (1.5). Для силы притяжения колец имеем

$$F_{ge} = -\frac{GM_1 M_2 L}{\pi(L^2 + R_1^2 + R_2^2)^{3/2}} \int_0^\pi \frac{d\phi}{(1 - \kappa \cos \phi)^{3/2}}$$

Поэтому полная сила, действующая на кольцо 1 будет равна

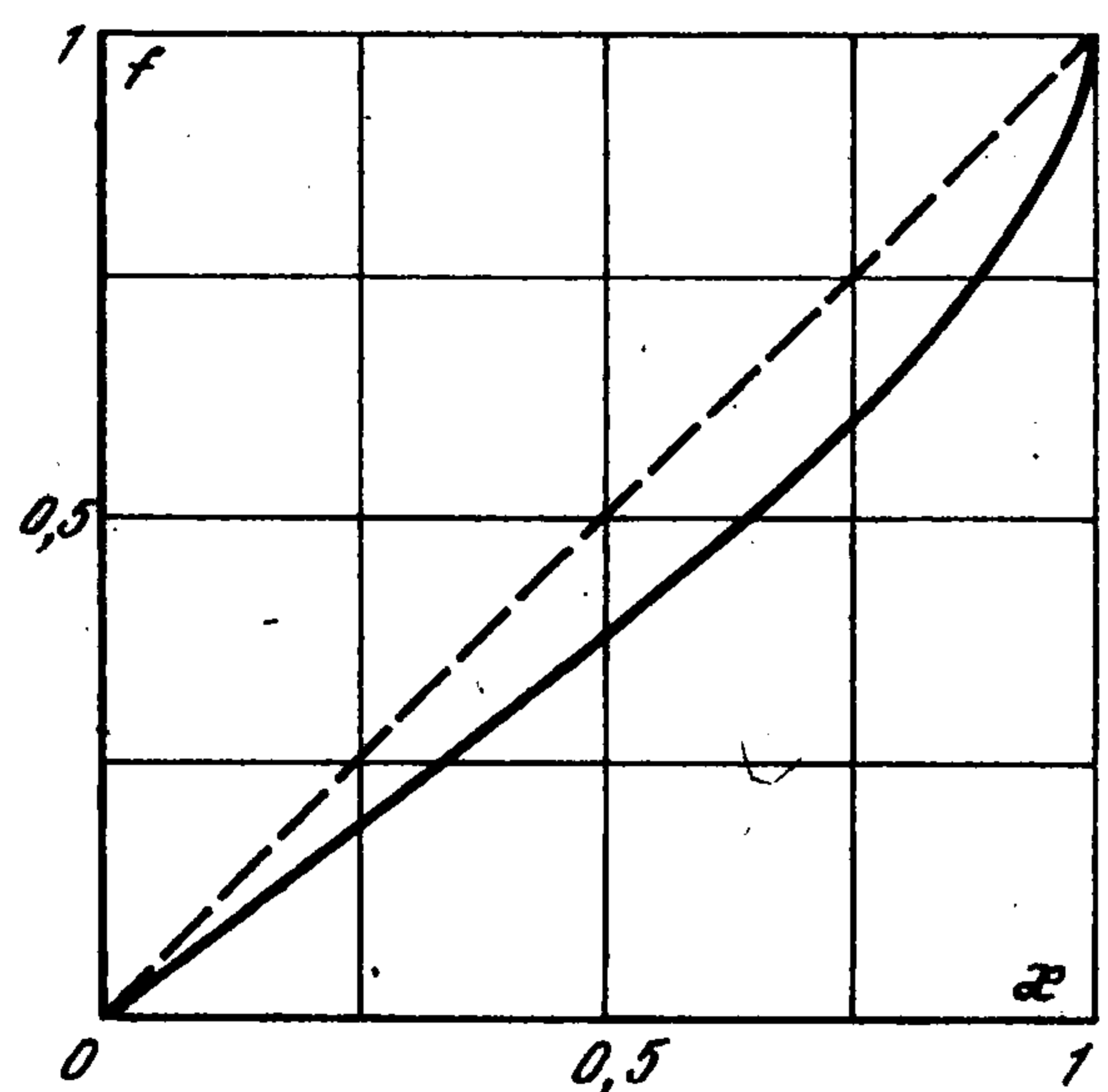
$$F_{ge} \left( 1 - \frac{4K_1 K_2}{M_1 M_2 c^2} f(\kappa) \right)$$

График функции  $f(\kappa)$  изображен на фиг. 1. Если допустить, что вещество колец состоит из пыли, то  $K_A = 2\pi r_A R_A \gamma_A^2$ , где  $\rho_A$  — скалярная масса на единицу длины кольца  $A$ ,  $M_A = 2\pi r_A R_A \gamma_A^2 (1 + v_A^2 / c^2)$  ( $A = 1, 2$ ). Тогда полную силу, действующую на кольцо 1, можно представить в виде

$$F_{ge} \left( 1 - \frac{2v_1 / c}{1 + v_1^2 / c^2} \frac{2v_2 / c}{1 + v_2^2 / c^2} f(\kappa) \right)$$

Выражение в скобках всегда больше нуля и стремится к нулю, если только  $v_A \rightarrow c$  ( $A = 1, 2$ ),  $\kappa \rightarrow 1$ . Следовательно, равновесие между кольцами, состоящими из пылевидной материи, в приближении слабого поля оказывается невозможным при любых досветовых скоростях вращения и соответствующее точное решение в ОТО (если оно существует) не будет иметь предела в приближении слабого поля. Поэтому распределение вещества в дисках, находящихся в равновесии, должно быть достаточно компактным.

Теперь рассмотрим силы взаимодействия между двумя протяженными дисками на близких расстояниях между ними в случае, когда размеры дисков много больше расстояния между ними. Пусть на дисках плотность вещества на единицу площади равна  $\sigma_A$ , а плотность импульса  $i_A$ . Эти величины получаются интегрированием по малой толщине диска компонент тензора энергии — импульса  $2T_0^0 - T_i^i$  и  $T_\alpha^0 / c$ . Тогда вблизи диска 2 ввиду предположения о том, что расстояние



Фиг. 1

между дисками много меньше размеров дисков, имеем, что асимптотически  $\phi_{2,z} \approx -2\pi\sigma_1$ ,  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 \approx -8\pi\mathbf{i}_2/c$ . Поэтому сила, действующая на единицу площади первого диска во внутренней его области (без учета краевых эффектов), равна

$$F = -2\pi\sigma_1\sigma_2 + 8\pi(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2)/c^2 \quad (2.1)$$

Если принять, что диски имеют поверхностную плотность  $\rho_A$  и состоят из пыли, для которой след тензора энергии импульса есть скалярная плотность (умноженная на  $c^2$ ), то имеем

$$\sigma_A = \rho_A \gamma_A^2 (1 + v_A^2/c^2), \quad \mathbf{i}_A = \rho_A \gamma_A^2 \mathbf{v}_A$$

причем скорость направлена по касательной к концентрическим окружностям. Тогда из выражения для плотности силы получим

$$F = -2\pi\sigma_1\sigma_2 \left( 1 - \frac{2v_1/c}{1+v_1^2/c^2} \frac{2v_2/c}{1+v_2^2/c^2} \right) \quad (2.2)$$

Таким образом, как и в случае пылевидных колец у пылевидных протяженных дисков притяжение во внутренних областях доминирует над отталкиванием. В отличие от колец для достаточно близких расстояний между дисками выражение для плотности силы стремится к константе (2.2), поэтому размеры дисков, находящихся в равновесии, не могут значительно превышать расстояние между ними. В этом случае необходимо более тонкое исследование, которое в разд. 3 будет проведено для вычисления проекции главного вектора сил на ось симметрии для керровских дисков.

Проекция главного вектора сил, действующих на плоский диск во внешнем поле, на ось симметрии дается выражением (квадратные скобки означают разрывы соответствующих величин на плоскости диска)

$$\frac{1}{4\pi G} \int \left[ \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] \frac{\partial \phi}{\partial n} dS + \frac{1}{16\pi G} \int [\mathbf{H}] \mathbf{H} dS = 0 \quad (2.3)$$

В уравнении (2.3) учтено, что разрыв гравимагнитного поля  $\mathbf{H}$  имеет только касательную составляющую. Вне источников гравимагнитное поле  $\mathbf{H}$  является, согласно (1.3), потенциальным, т.е.  $\mathbf{H} = 2\nabla\psi$ . В осесимметричном случае функции  $\phi$  и  $\psi$  возникают в ньютоновском пределе для функции Эрнста:

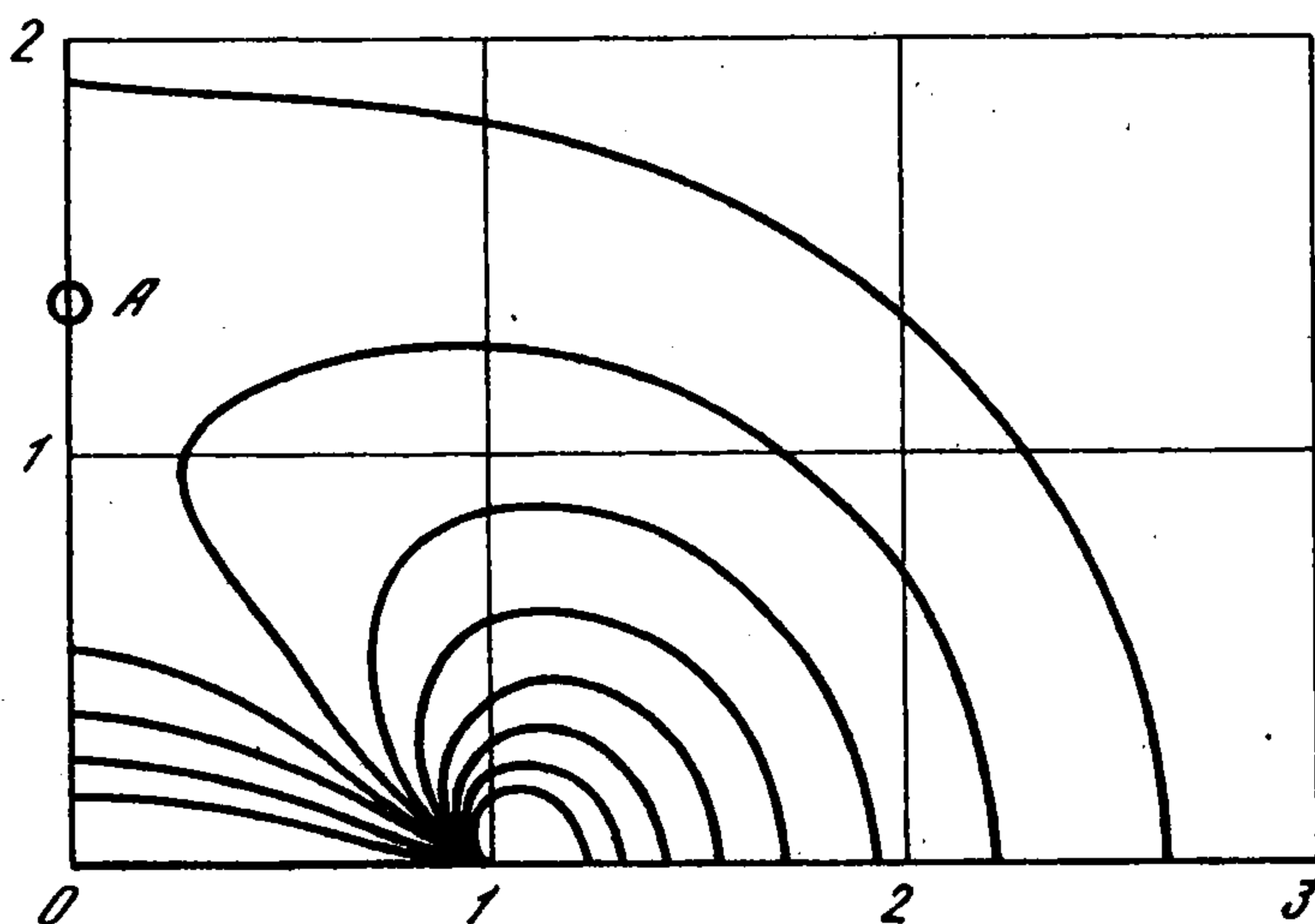
$$E \approx 1 + 2(\phi + i\psi)/c^2$$

Далее предположим, что источниками стационарного гравитационного поля служат два осесимметричных диска, вращающиеся вокруг общей оси симметрии  $z$  на расстоянии  $l$  друг от друга. Согласно (2.3), необходимым условием равновесия, скажем, диска 2 в гравитационном поле диска 1 является следующее:

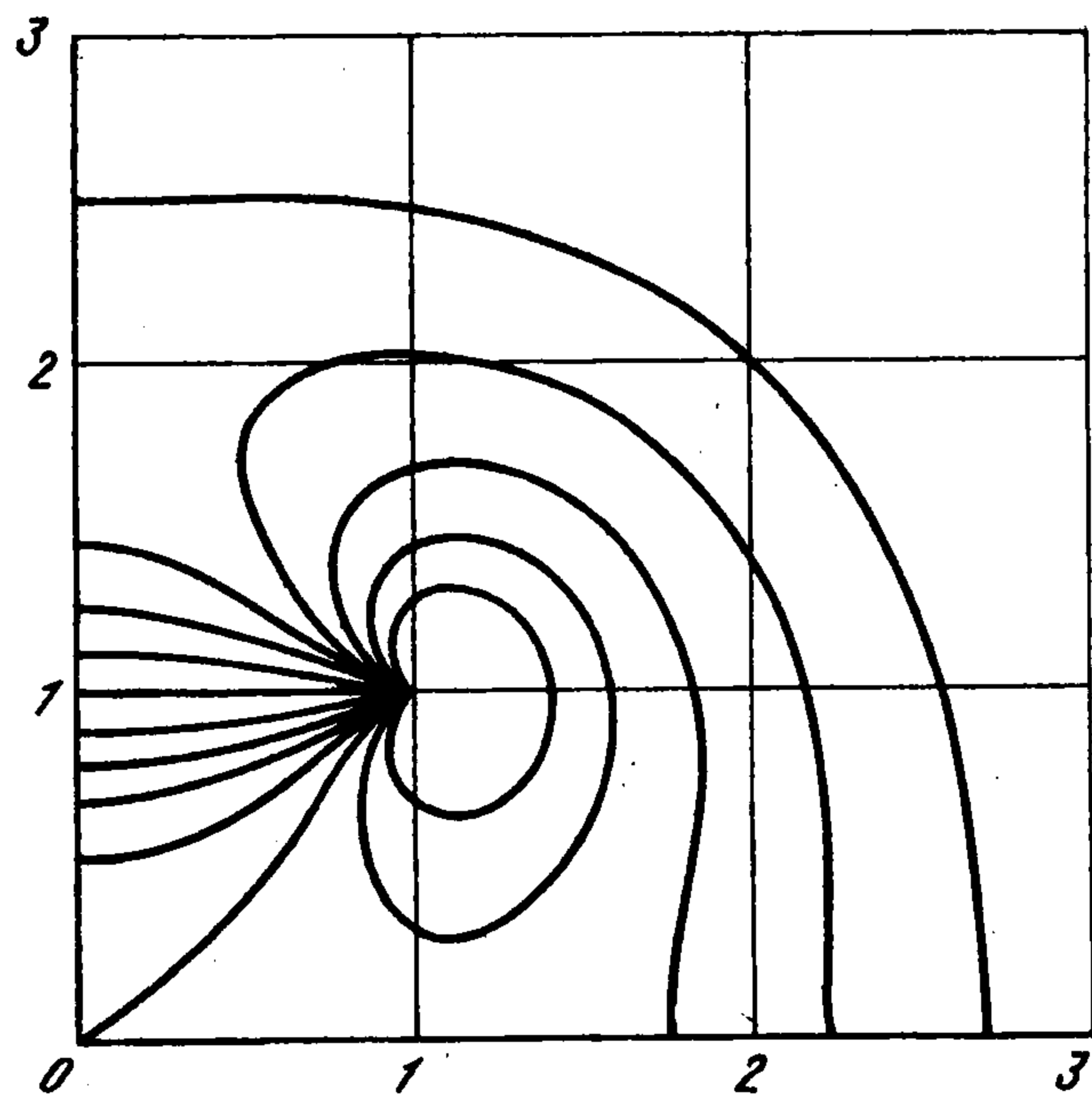
$$\frac{1}{2G} \int \left[ \left[ \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right] \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \left[ \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right] \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho} \right] \rho d\rho = 0 \quad (2.4)$$

Вблизи края диска поля  $\phi_2$  и  $\psi_2$  сингулярны, поэтому в уравнении (2.4) необходим корректный предельный переход от замкнутой гладкой поверхности к поверхности диска.

3. В качестве конкретной модели каждого из дисков выберем приближение слабого поля для решения Керра, в котором радиусы дисков много больше их соответственных гравитационных радиусов  $Gm_k/c^2$ . Суммарные моменты импульсов дисков 1 и 2 даются соответственно формулами  $K_1 = m_1 c \alpha$ ,  $K_2 = m_2 c \beta$ . Такие диски можно трактовать как трещины пространства – времени, в которых происходит переход на другой экземпляр пространства – времени (подобно переходу с одного листа римановой



Фиг. 2



Фиг. 3

поверхности на другой в теории многозначных аналитических функций комплексного переменного). Итак, будем считать, что потенциалы дисков даются выражениями

$$\phi_a = -G \frac{m_a}{2} \left( \frac{1}{r_{+a}} + \frac{1}{r_{-a}} \right), \quad \psi_a = iG \frac{m_a}{2} \left( \frac{1}{r_{+a}} - \frac{1}{r_{-a}} \right), \quad a = 1, 2 \quad (3.1)$$

$$r_{\pm a} = \sqrt{(z - l_a \mp iR_a)^2 + \rho^2}$$

где  $R_a$  – радиус  $a$ -го диска,  $l_a$  – координата его положения на оси  $z$ . Далее положим  $l_1 = l$ ,  $l_2 = 0$ ,  $R_1 = \alpha$ ,  $R_2 = \beta$ . На фиг. 2 изображена картина линий равного потенциала  $\phi_2 = \text{const}$  (где  $\text{const} = \text{tg}(\pi \cdot 0,025n)$ ,  $n$  – целое число). Картина имеет 2 оси симметрии – горизонтальную  $z = 0$  и вертикальную  $\rho = 0$ , поэтому здесь изображен только квадрант  $z \geq 0$ ,  $\rho \geq 0$ . Точка  $A$  на фиг. 2 является неустойчивым положением равновесия типа седло. Вблизи края диска имеет место сингулярное усиление сил тяготения, подобное концентрации напряжений вблизи краев трещины с аналогичной асимптотикой. Действительно, согласно (3.1) комплексный потенциал вблизи края диска имеет асимптотику

$$\phi_1 + i\psi_1 \approx -\frac{m_1 G}{\sqrt{2\alpha(\xi - \alpha)}}, \quad \xi \equiv \rho + iz \quad (3.2)$$

Из вида потенциалов  $\phi_a(\psi_a)$  следует, что они симметричны (антисимметричны) относительно плоскостей соответствующих дисков. Поэтому условие равновесия (2.4) можно переписать в виде

$$\int \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \rho d\rho = \int \psi_2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi_1}{\partial \rho} \right) d\rho \quad (3.3)$$

В интеграле в правой части (3.3)  $\lim \psi_2 = (\beta^2 - \rho^2)^{-1/2}$  при  $z \rightarrow 0$ . Если перейти к переменной  $t = \beta^2 - \rho^2$ , то для правой части (3.3) получим

$$2m_1 m_2 G \int_0^{\beta^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} \frac{\partial(\beta^2 - t)}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} dt \quad (3.4)$$

Здесь

$$\psi = l\sqrt{2} / \sqrt{AB}, \quad A = \sqrt{-b + \sqrt{B}}, \quad B \equiv b^2 + 4\alpha^2 l^2, \quad b = t + \alpha^2 - \beta^2 + l^2$$

Более осторожный переход к пределу необходим в левой части (3.3). Для вычисления левой части (3.3) рассмотрим предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$  интеграла по поверхности, состоящей из круга  $0 \leq \rho \leq \beta$ ,  $z = \varepsilon/(2\beta) > 0$  и части тора

$$z^2 + (\rho - \beta)^2 = \varepsilon^2/(2\beta)^2 \quad (3.5)$$

при  $0 \leq \rho - \beta \leq \varepsilon/(2\beta)$ ,  $z > 0$ . Обозначим

$$f(t) = (2AB)^{-1/2} B^{-1} (l(l^2 - t)(l^2 - t + 4\alpha^2) - 4\alpha^2 l^2 + \sqrt{B}(l^2 - t + 2\alpha^2))$$

Тогда интеграл в левой части (3.3) можно представить в виде суммы интегралов по указанным выше поверхностям:

$$\frac{Gm_1 m_2 \beta}{2\sqrt{2}} \left( \varepsilon \int_0^{\beta^2} f(t + \alpha^2 - \beta^2) F(t) dt - \frac{2f(\alpha^2 - \beta^2)}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \quad (3.6)$$

$$F(t) = \frac{2t - \hat{t}}{\hat{t}^3 (\hat{t} - t)^{1/2}}, \quad \hat{t} \equiv \sqrt{t^2 + \varepsilon^2}$$

Последнее слагаемое в квадратных скобках соответствует интегралу по четверти окружности (3.15), полученному при помощи асимптотики (3.2). Чтобы перейти к пределу, заменим сначала в указанном слагаемом множитель  $2/\sqrt{\varepsilon}$  тождественно равным ему выражением

$$\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} = \varepsilon \int_0^{\infty} F(t) dt \quad (3.7)$$

Разбивая промежуток интегрирования в (3.7) на две части (от 0 до  $\beta^2$  и от  $\beta^2$  до  $\infty$ ), после подстановки в (3.6) и перехода к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$  получим, используя (3.4) и (3.3), искомое уравнение для определения расстояния между двумя дисками  $l$  как функции их радиусов  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$-f(\alpha^2) + \beta \int_0^{\beta^2} f'(t + \alpha^2 - \beta^2) \frac{dt}{\sqrt{t}} - 2 \int_0^{\beta^2} ((\beta^2 - t)\psi'(t))' \frac{dt}{\sqrt{t}} = 0 \quad (3.8)$$

Оно имеет простое решение

$$l = \alpha + \beta \quad (3.9)$$

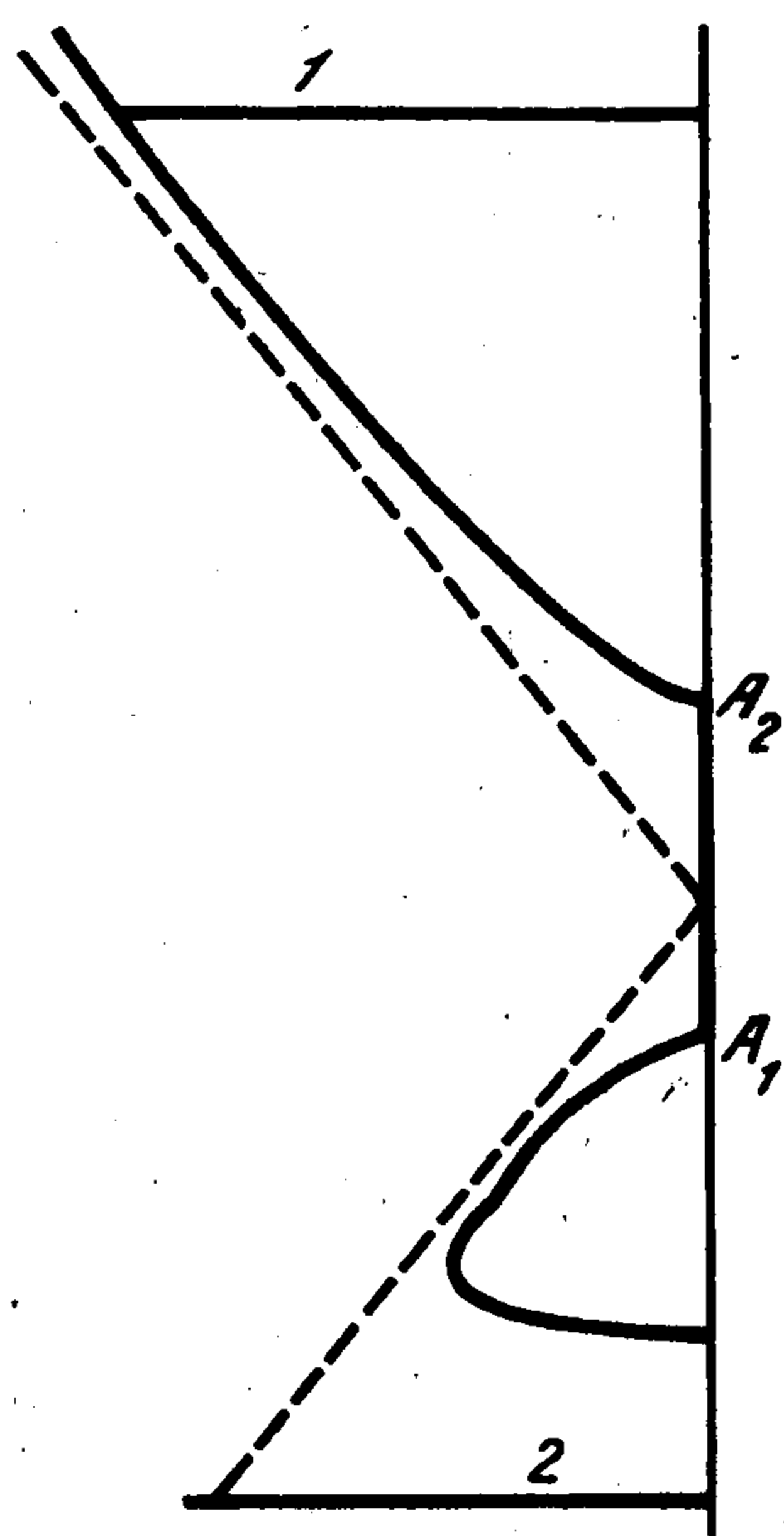
Действительно, разложим левую часть равенства (3.8) в ряд по степеням  $\beta$  и учтем члены до  $\beta^3$  включительно. Имеем

$$-\frac{l^2 - \alpha^2}{(l^2 + \alpha^2)^2} + \frac{2\alpha\beta(3l^2 - \alpha^2)}{(l^2 + \alpha^2)^3} + \frac{3\beta^2(l^4 - 6l^2\alpha^2 + \alpha^4)}{(l^2 + \alpha^2)^2} - 4\alpha\beta^3 \frac{(5l^4 - 10l^2\alpha^2 + \alpha^4)}{(l^2 + \alpha^2)^5} + \dots = 0 \quad (3.10)$$

Из (3.10) следует, что  $\beta = l - \alpha + o((l - \alpha)^3)$ . Численное решение уравнения (3.8) показывает, что решение (3.9) является точным (для численного исследования удобно выбрать систему единиц, в которой  $\alpha = 1$ ). С учетом выражений  $\alpha$  и  $\beta$  через моменты импульсов дисков получим

$$cl = K_1/m_1 + K_2/m_2 \quad (3.11)$$

Выражение (3.11) дает верхний предел для расстояния между реальными дисками, которые могут находиться в равновесии, когда ньютоновское притяжение компенсируется гравимагнитным отталкиванием. На фиг. 3 изображена картина линий равного потенциала для двух дисков, находящихся в равновесии, при тех же значениях потенциалов, что и на фиг. 2. Картина имеет две оси симметрии – горизонтальную  $z = 0$  и вертикальную  $\rho = 0$ ; поэтому здесь изображен только квадрант  $z \geq 0$ ,  $\rho \geq 0$ .



Фиг. 4

4. Рассмотрим теперь условие равновесия между диском, описываемым решением (3.1), и компактным источником на оси вращения  $z$  с массой  $m_1$  и моментом вращения  $K_2 = c\beta m_2$ , направленным вдоль оси  $z$  (такие ньютоновские аналоги возникают для курзоновских решений с вращением в ОТО). Тогда приравнивание к нулю суммы кулоновской и гравимагнитной силы, вычисленной при помощи (1.2), дает условие, соответствующее обращению в нуль суммы двух первых слагаемых в левой части равенства (3.10).

При  $\beta \rightarrow 0$  это условие равновесия переходит асимптотически в условие (3.10). Отметим, что указанное положение равновесия неустойчиво относительно боковых смещений с оси  $z$  при  $\alpha \leq l \leq \alpha\sqrt{3}$ .

5. Полученные выше результаты являются ньютоновской интерпретацией точных решений с регулярным поведением пространства-времени на участке оси симметрии между вращающимися телами [10], полученных авторами этой статьи в рамках ОТО с помощью метода автора книги [11]. В известном смысле эти результаты являются итогом серии работ [5, 6, 7, 9].

На фиг. 4 изображены тяготеющие вращающиеся диски в равновесии, причем радиус диска 2 фиксирован, а диски 1 имеют радиусы, ограниченные штриховой линией в ньютоновской теории и сплошной – в ОТО. Картина имеет ось симметрии, совпадающую с осью дисков, поэтому здесь изображена только половина картины. На участке  $A_1A_2$  второе тяготеющее тело превращается в черную дыру, так как на этом участке выполнено условие существования горизонта. Таким образом, возможно равновесие между дисками и черными дырами, при этом черные дыры могут появляться только в окрестности седловой точки  $A$ . Напомним, что в используемых вейлевских координатах черная дыра представляет собой отрезок оси симметрии.

Приведем другой любопытный результат, который можно получить только в точной теории из уравнений Эйнштейна: если неограниченно сближать два диска с равными массами и равными моментами импульсов, то получится экстремальное решение Керра с удвоенной массой и параметром вращения, равным массе умноженной на  $G/c^2$ . В ОТО для описания равновесных конфигураций кроме расстояния между дисками имеется еще один свободный параметр. Для нахождения значений этих двух параметров используются условия отсутствия конических точек и замкнутых времениподобных мировых линий.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.
2. Weinberg S. Gravitation and cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, N.-Y.: Wiley, 1970. 657 p.
3. Mashhoon B. On the gravitational analogue of Larmor's theorem // Phys. Lett. 1993. V. A173. № 4/5. P. 347–354.
4. Kramer D., Neugebauer G. The superposition of two Kerr solutions // Phys. Lett. 1980. V. A75. № 4. P. 259–265.
5. Веселов А.П. Структура аксиально-симметричных солитонных решений уравнений Эйнштейна // Теоретич. и мат. физика, 1983. Т. 54, № 2. С. 239–245.
6. Tomimatsu A. On gravitational Mass and Angular momentum of two Black Holes in Equilibrium // Progr. Theor. Phys. 1983. V. 70. № 2. P. 385–393.

7. Hoenselaers C. Remarks on the Double Kerr Solution // Progr. Theor. Phys. 1984. V. 72. № 4. P. 761-767.
8. Белинский В.А., Захаров В.Е. Стационарные гравитационные солитоны с аксиальной симметрией // ЖЭТФ. 1979. Т. 77. № 1. С. 1-19.
9. Dietz W., Hoenselaers C. Two mass solutions of Einstein's equations. The Double Kerr solution // Annals of Phys. 1985. V. 165. P. 319-383.
10. Зарипов М.Н., Сибгатуллин Н.Р., Чаморро А. Вестник МГУ. Сер. Математика, Механика. 1994, № 6. (в печати). С. 61-68.
11. Сибгатуллин Н.Р. Колебания и волны в сильных гравитационных и электромагнитных полях. М.: Наука, 1984. 352 с.

Москва

Поступила в редакцию  
31.I.194

О равновесной конфигурации  
двух вращающихся дисков в общей  
теории относительности