ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 59, Вып. 5, 1995

УДК 539.3:62–50

© 1995 г. Л.В. Петухов

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ВЕЙЕРШТРАССА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматриваются задачи оптимального управления для объектов, описываемых системами дифференциальных уравнений эллиптического типа. Управлениями служат коэффициенты при главных частях уравнений, на которые накладываются ограничения типа равенств и неравенств. В такую постановку укладываются задачи оптимального проектирования механических систем, состоящих из двух материалов, заданных объемов. Функцией цели является функционал, зависящий от функций состояния и их первых производных. Основной результат построение необходимых условий Вейерштрасса по отношению включений областей с одним материалом в области с другим, которое позволяет строить приближения к оптимальному решению. Подробно исследуется случай одного n-мерного эллиптического уравнения, для которого получено необходимое условие Вейерштрасса, когда включение представляет собой n-мерный эллипсоид. Рассматривается применение необходимого условия Вейерштрасса к двум задачам оптимального проектирования – минимизации работы внешних воздействий и максимизации жесткости на кручение призматического стержня.

Традиционный подход к решению задач оптимального проектирования заключается в расширении множества допустимых управлений[1], среди которых оптимальное решение существует. В большинстве случаев такое решение представляет чисто теоретический интерес, и его можно использовать для оценки оптимального значения функционала. Попытка приблизиться к нему с помощью какого-нибудь регулярного решения не представляется осуществимой, так как при аппроксимации приходится иметь дело с задачей большой размерности.

В данной работе основное внимание уделяется получению необходимого условия Вейерштрасса сильного минимума, которое вместе с необходимыми условиями слабого минимума может быть использовано для постепенного увеличения связности областей включения одного материала в другой [1].

1. Постановка задачи. Пусть $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ – n-мерное и m-мерное декартовы пространства векторов соответственно, т.е. действительные векторные пространства упорядоченных наборов вещественных чисел $x = (x_1,\ldots, x_n)$ и $u = (u_1,\ldots, u_m)$. Скалярные произведения и нормы в этих пространствах определяются обычным способом

$$(x, y) = x_iy_i,\quad |x| = (x, x)^{1/2},\quad (u, \upsilon) = u_i\upsilon_i,\quad |u| = (u, u)^{1/2}$$

Здесь и везде далее индексы i, j пробегают значения от 1 до n, индексы k, l – от 1 до m. Предполагается также суммирование по повторяющимся индексам i, j в произведениях от 1 до n и повторяющимся индексам k, l – от 1 до m.

[1] *Лурье К.А., Черкаев А.В.* Задача составления оптимального изотропного многофазного композита: Препринт № 895. Л.: Физ.-техн. ин-т АН СССР, 1984. 34 с.

Обозначим через $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ регулярную область с кусочно-гладкой границей Γ [2]. Будем считать, что в области Ω задана вектор-функция $f = (f_1(x),\dots, f_m(x)) \in L^2(\Omega)$, а на $\Gamma_F \subset \Gamma$ – вектор-функция $F = (F_1(x),\dots, F_m(x)) \in L^2(\Gamma_F)$, где $L^2(\Omega)$, $L^2(\Gamma_F)$ – гильбертовы пространства вектор-функций со скалярными произведениями и нормами

$$(f,g) = \int_\Omega f_k g_k dx,\ \|f\|_\Omega = \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$(F,G) = \int_{\Gamma_F} F_k G_k dx,\ \|F\|_{\Gamma_F} = \left(\int_{\Gamma_F} |F|^2 d\Gamma\right)^{1/2}$$

Рассмотрим в области Ω вектор – функции $u = (u_1(x),\dots, u_m(x)) \in H^1(\Omega)$, где $H^1(\Omega)$ – соболевское пространство вектор-функции со скалярным произведением и нормой

$$(u,\upsilon) = \int_\Omega (u_k \upsilon_k + u_{k,i}\upsilon_{k,i})dx, \|u\| = (u,u)^{1/2}$$

и в нем подпространство

$$V(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) | u(x) = 0,\ x \in \Gamma_u\}$$

где $\Gamma_u \subset \Gamma$, $\Gamma_u \cap \Gamma_F = \varnothing$ и $\operatorname{mes}\Gamma_u > 0$.

Определим в $V(\Omega)$ симметричную билинейную форму $A(u, \upsilon) = a_{ijkl}u_{k,i}\upsilon_{ij}$, в которой коэффициненты a_{ijkl} обладают свойством симметрии: $a_{ikjl} = a_{jkil} = a_{iljk} = a_{jlik}$ и которая удовлетворяет условию эллиптичности

$$A(w, w) \geqslant \alpha \|w\|^2,\ \alpha > 0 \tag{1.1}$$

Будем определять $u \in V(\Omega)$ как решение интегрального тождества

$$\int_\Omega [A(u,w) - (f,w)]dx - \int_{\Gamma_F} (F,w)d\Gamma = 0,\ \forall w \in V(\Omega) \tag{1.2}$$

Если $A(u, w)$ удовлетворяет условию (1.1), а $f \in L^2(\Omega)$, $F \in L^2(\Gamma_F)$, то существует единственное решение $u \in V(\Omega)$ интегрального тождества (1.2) [3].

Рассмотрим теперь постановку задачи оптимального проектирования.

Пусть в измеримых подмножествах $\Omega_1 \subset \Omega$ и $\Omega_2 \subset \Omega$, удовлетворяющих условиям $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$, $\bar\Omega_1 \cup \bar\Omega_2 = \bar\Omega$ и

$$\operatorname{mes}\Omega_1 = \lambda_1,\ \operatorname{mes}\Omega_2 = \lambda_2 = \operatorname{mes}\Omega - \lambda_1 \tag{1.3}$$

заданы коэффиценты $a^{(1)}_{ikjl}$ и $a^{(2)}_{ikjl}$. Требуется решить задачу

$$\inf J(u),\ J(u) = \int_{\Omega_1} \varphi(u,\sigma^{(1)}(u))dx + \int_{\Omega_2} \varphi(u))dx + \int_{\Gamma_F} \varphi(u)d\Gamma \tag{1.4}$$

где u удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_1} A_1(u,w)dx + \int_{\Omega_2} A_2(u,w)dx - \int_\Omega (f,w)dx - \int_{\Gamma_F} (F,w)d\Gamma = 0 \tag{1.5}$$

$$\forall w \in V(\Omega)$$

которое получается из (1.2) и в котором $A(u,w) = a^s_{ikjl}u_{k,i}w_{l,j}$. Функции φ и ψ в (1.4) предполагаются n раз дифференцируемыми по всем своим аргументам, а $\sigma^{(s)}(u)$ представляет собой матрицу, компоненты которой $\sigma^{(s)}_{ik} = a^{(s)}_{ikjl}u_{l,j} (s = 1,2)$.

Множества Ω_1 и Ω_2 могут иметь довольно сложную структуру и в некоторых случаях могут быть найдены при помощи методов осреднения (см. работу, цитированную в сноске). Смысл проводимого ниже анализа заключается в определении чувствительности функционала (1.4) по отношению к включениям областей с коэффициентами $a_{ikjl}^{(2)}$ в область Ω_1 и областей с коэффициентами $a_{ikjl}^{(1)}$ в область Ω_2.

Предположим теперь, что в области Ω имеются две регулярные области Ω_1 и Ω_2, заполненные первым и вторым материалами соответственно, Γ_{12} – граница, которая разделяет области Ω_1 и Ω_2, а $r = (r_1,\ldots, r_m)$ – орт нормали к ней из области Ω_1 в область Ω_2. Предположим также, что в областях Ω_1 и Ω_2 решение u интегрального тождества (1.5) – дважды дифференцируемая вектор-функция аргументов x_i. Тогда, используя тождество

$$a_{ikjl}^{(s)}u_{k,i}w_{l,j} = (a_{ikjl}^{(s)}u_{k,i}w_l)_{,j} - a_{ikjl}^{(s)}u_{k,ij}w_l$$

из (1.5) получим эллиптическую краевую задачу в виде системы дифференциальных уравнений с граничными условиями

$$a_{ikjl}^{(s)}u_{k,ij}^{(s)} + f_1 = 0,\ \ x \in \Omega_s,\ \ s = 1,2$$

$$u_k^{(s)} = 0,\ \ x \in \Gamma_u,\ \ r_j\sigma_{jk}^{(s)} = F_k,\ \ x \in \Gamma_F$$

$$r_j\sigma_{jk}^{(s)} = 0,\ \ x \in \Gamma_{s0} = \Gamma_s \setminus (\overline{\Gamma}_{12} \cup \overline{\Gamma}_F \cup \overline{\Gamma}_u)$$

$$u_k^{(1)} = u_k^{(2)},\ \ r_j\sigma_{jk}^{(1)} = r_j\sigma_{jk}^{(2)},\ \ x \in \Gamma_{12};\ \ \Gamma_{12} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2,\ \ u = u^{(s)},\ \ x \in \Omega_s$$

где Γ_1 и Γ_2 – соответственно границы областей Ω_1 и Ω_2.

2. Необходимые условия оптимальности. Предположим, имеется оптимальное решение, такое, что две области Ω_1^* и Ω_2^* с общей границей $\Gamma_{12}^*(\Gamma_{12}^* = \Gamma_1^* \cap \Gamma_2^*)$ заполнены соответственно первым и вторым материалами.

Построим расширенный функционал $I(u)$, для чего из функционала $J(u)$ вычтем левую часть интегрального тождества (1.5) и вычислим его первую вариацию

$$\delta I = \chi_1(w,\delta u) + \chi_2(w,\delta u) + \int_{\Gamma_F} \frac{\partial \psi}{\partial u_k}\delta u_k d\Gamma + \int_{\Gamma_1^*\cap\Gamma} [\Lambda_1(u^*,w) - \Lambda_2(u^*,w)]\delta r d\Gamma +$$

$$+ \int_{\Gamma_1^*\cap\Gamma} [\Lambda_2(u^*,w) - \Lambda_1(u^*,w)]\delta r d\Gamma + \int_{\Gamma_{12}^*} [\Lambda_1(u^*,w) - \Lambda_2(u^*,w)]\delta r d\Gamma \tag{2.1}$$

$$\chi_s(w,\delta u) = \int_{\Omega_s^*}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}(u^*,\sigma^{(s)}(u^*))\delta u_k + \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{ik}^{(s)}}(u^*,\sigma^{(s)}(u^*))\sigma_{ik}^{(s)}(\delta u) + A_s(w,\delta u)\right]dx,$$

$$\Lambda_s(u^*,w) = \varphi(u^*,\delta^{(s)}(u^*)) - A_s(u^*,w),\ \ s = 1,2$$

Здесь u^* – оптимальное решение задачи, δu – вариация u^*, а δr – вариация границы Γ_{12}^*, удовлетворяющая условию [1]

$$\int_{\Gamma_{12}^*}\delta r d\Gamma + \int_{\Gamma_1^*\cap\Gamma}\delta r d\Gamma + \int_{\Gamma_2^*\cap\Gamma}\delta r d\Gamma = 0 \tag{2.2}$$

которое следует из условия (1.3).

Положим в (2.1) $w = \upsilon^*$, где υ^* удовлетворяет интегральному тождеству

$$\chi_1(\upsilon^*,w) + \chi_2(\upsilon^*,w) + \int_{\Gamma_F}\frac{\partial\psi}{\partial u_k}(u^*)w_k d\Gamma = 0,\ \ \forall w \in V(\Omega) \tag{2.3}$$

Тогда, учитывая, что $\delta u \in V(\Omega)$, получим неравенство

$$\delta I = \int_{\Gamma_1^*\cap\Gamma} [\Lambda_1(u^*,\upsilon^*] - \Lambda_2(u^*,\upsilon^*]\delta r d\Gamma + \int_{\Gamma_2^*\cap\Gamma} [\Lambda_1(u^*,\upsilon^*] - \Lambda_2(u^*,\upsilon^*]\delta r d\Gamma +$$

$$+\int_{\Gamma_{12}^*}[\Lambda_1(u^*,\upsilon^*]-\Lambda_2(u^*,\upsilon^*]\delta r d\Gamma \geqslant 0 \tag{2.4}$$

которое должно выполняться для любых вариаций границы $\Gamma_{12}^*, \Gamma_1^* \cap \Gamma$, $\Gamma_2^* \cap \Gamma$, удовлетворяющих равенству (2.2). Было показано [2], что следующие условия

$$\Lambda_1(u^*,\upsilon^*)-\Lambda_2(u^*,\upsilon^*)\leqslant \zeta,\ \ x \in \Gamma_1^* \cap \Gamma$$

$$\Lambda_1(u^*,\upsilon^*)-\Lambda_2(u^*,\upsilon^*)\geqslant \zeta,\ \ x \in \Gamma_2^* \cap \Gamma$$

$$\Lambda_1(u^*,\upsilon^*)-\Lambda_2(u^*,\upsilon^*)= \zeta,\ \ x \in \Gamma_{12}^* \tag{2.5}$$

необходимы и достаточны для выполнения (2.2), (2.4).

3. Необходимые условия Вейерштрасса. Проведем анализ вариации функционала, когда в область со вторым материалом включается область малой меры с первым материалом и наоборот.

Возьмем $\forall x_0 \in \Omega_1^* (\forall x_0 \in \Omega_2^*)$ и выпуклую область $\Omega 0(\eta)$, все геометрические размеры которой могут изменяться пропорционально η. Тогда

$$\text{mes}\ \Omega_0(\eta) = \eta^n\ \text{mes}\ \Omega_0(\Omega_0 = \Omega_0(1)) \tag{3.1}$$

Для того чтобы условие (1.3) осталось выполненным, необходимо изменить границу Γ_{12}^* на величину $r(y,\eta)$, $y \in \Gamma_{12}^*$ [2], причем $r(y, \eta) < 0$ в случае включения первого материала во второй и $r(y, \eta) > 0$ в случае включения второго материала в первый.

Функционал (1.4) в этом случае можно привести к виду

$$I = \int_{\Gamma_F}[\psi(u)-(F,w)]d\Gamma - \int_{\Omega}(f,w)dx + \int_{\Omega_1}\Lambda_1(u,w)dx +$$

$$+\int_{\Omega_2}\Lambda_2(u,w)dx \pm \int_{\Omega_0(\eta)}[\Lambda_1(u,w)-\Lambda_2(u,w)]dx \tag{3.2}$$

Знак плюс перед последним интегралом соответствует включению первого материала во второй, а минус – второго в первый.

Для того чтобы выполнялось условие (1.3), функция $r(y, \eta)$ должна быть пропорциональна η^n, поэтому $\delta r = .. \delta^{n-1} r = 0$. Вариации $\delta u,\ldots, \delta^n u$ определяются интегральными тождествами, в которых внешними воздействиями являются функции, пропорциональные $\delta r,\ldots, \delta^n r$, поэтому $\delta u = \ldots = \delta^{n-1} u = 0$ [1].

Подставляя $w = \upsilon^*$ в функционал (3.2) и вычисляя последовательно вариации $\delta I,\ldots$, $\delta^n I$, получим

$$\delta I = \ldots = \delta^{n-1} I = 0$$

$$\delta^n I = \int_{\Gamma_{12}^*}[\Lambda_1(u^*,\upsilon^*)-\Lambda_2(u^*,\upsilon^*)]\delta^n r d\Gamma \pm \frac{d^n}{d\eta^n}\left(\int_{\Omega_0(\eta)}[\Lambda_1(u^*,\upsilon^*)-\Lambda_2(u^*,\upsilon^*)]dx\right)_{\eta=0}$$

Используя необходимые условия $\delta^n I \geqslant 0$ и (2.5) найдем

$$\pm\frac{d^n}{d\eta^n}\int_{\Omega_0(\eta)}[\Lambda_1(u^*,\upsilon^*)-\Lambda_2(u^*,\upsilon^*)]dx \geqslant \pm n!\zeta \text{mes}\Omega_0 \tag{3.3}$$

Знак минус берется для точек $x_0 \in \Omega_1^*$, а знак плюс для $x_0 \in \Omega_2^*$.

В левой части неравенства (3.3) интеграл вычисляется по области $\Omega_0(\eta)$, n-мерный объем которой пропорционален η^n, от выражения, которое зависит от вектор-функции u, представляющей собой возмущение решения интегрального тождества (1.5), вызванного включением $\Omega_0(\eta)$.

Получим интегральные тождества для определения u. Для этого рассмотрим включение $\Omega_0(\eta)$ второго материала в область Ω_1^*. Вычитая из интегрального тождества для этого случая интегральное тождество для оптимального решения u^* и преобразуя его, найдем

$$\int\limits_{\Omega_1^* \setminus \bar{\Omega}_0(\eta)} A_1(u^0 - u^*, w)dx + \int\limits_{\Omega_0}(u^0 - u^*, w)dx = \int\limits_{\partial\Omega_0} r_i[\sigma_{il}^{(1)}(u^*(x_0)) - \sigma_{il}^{(2)}(u^*(x_0))]w_l d\Gamma,$$

$$\forall x_0 \in \Omega_1^* \qquad (3.4)$$

В интегральном тождестве (3.4), конечно, невозможно определить u точно. Однако при $\eta \to 0$ имеем $u \to u^0$, для которого справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_0} A_1(u^0 - u^*, \omega)dx + \int\limits_{\Omega_0} A_2(u^0 - u^*, \omega)dx = \int\limits_{\partial\Omega_0} r_i[\sigma_{il}^{(1)}(u^*(x_0)) - \sigma_{il}^{(2)}(u^*(x_0))]\omega_l d\Gamma,$$

$$\forall x_0 \in \Omega_1^* \qquad (3.5)$$

где r_i – компоненты внешнего орта нормали к границе $\partial\Omega_0$ области Ω_0.

Проводя аналогичные построения для включения $\Omega_0(\eta)$ первого материала во второй, получим интегральное тождество, отличающееся от (3.5) заменой индекса 1 на индекс 2 и наоборот.

Используя последние два тождества, а также неравенство (3.3), окончательно получим неравенства

$$\Lambda_1(u^0, \upsilon^0) - \Lambda_2(u^0, \upsilon^*) \leqslant \zeta, \quad x \in \Omega_1^*$$

$$\Lambda_1(u^0, \upsilon^0) - \Lambda_2(u^0, \upsilon^*) \geqslant \zeta, \quad x \in \Omega_2^* \qquad (3.6)$$

$$u^* = \upsilon^*(x_0), \quad \upsilon^* = \upsilon^*(x_0), \quad u^0 = u^0(x_0)$$

Неравенства (3.6) будем называть необходимыми условиями Вейерштрасса. Первое должно выполняться для любого $x_0 \in \Omega_1^*$, а второе для любого $x_0 \in \Omega_2^*$.

4. Необходимые условия Вейерштрасса для эллипсоидального включения (m = 1). Для случая $m = 1$ билинейная форма $A(u, \upsilon) = a_{ij}u_{,i}\upsilon_{,j}$ заменой координат может быть приведена к виду

$$A(u, \upsilon) = hu_{,i}\upsilon_{,i} \qquad (4.1)$$

В дальнейшем будем считать, что декартова система координат x_i с самого начала выбрана таким образом, что билинейная формы $A(u, \upsilon)$ имеет вид (4.1), а также $h_2 > h_1$. Компоненты векторов $\sigma^{(s)}$ определяются соотношением $\sigma_i^{(1)}(u) = h_1 u_{,i}$, $\sigma_i^{(2)}(u) = h_2 u_{,i}$, а необходимые условия Вейерштрасса (3.6) – неравенствами

$$\Delta h u_{,i}^0 \upsilon_{,i}^* - \varphi(u^*, \sigma^{(2)}(u^0)) + \varphi(u^*, \sigma^{(1)}(u^0)) \leqslant \zeta$$

$$\Delta h u_{,i}^0 \upsilon_{,i}^* - \varphi(u^*, \sigma^{(2)}(u^0)) + \varphi(u^*, \sigma^{(1)}(u^0)) \geqslant \zeta \qquad (4.2)$$

где $\Delta h = h_2 - h_1$.

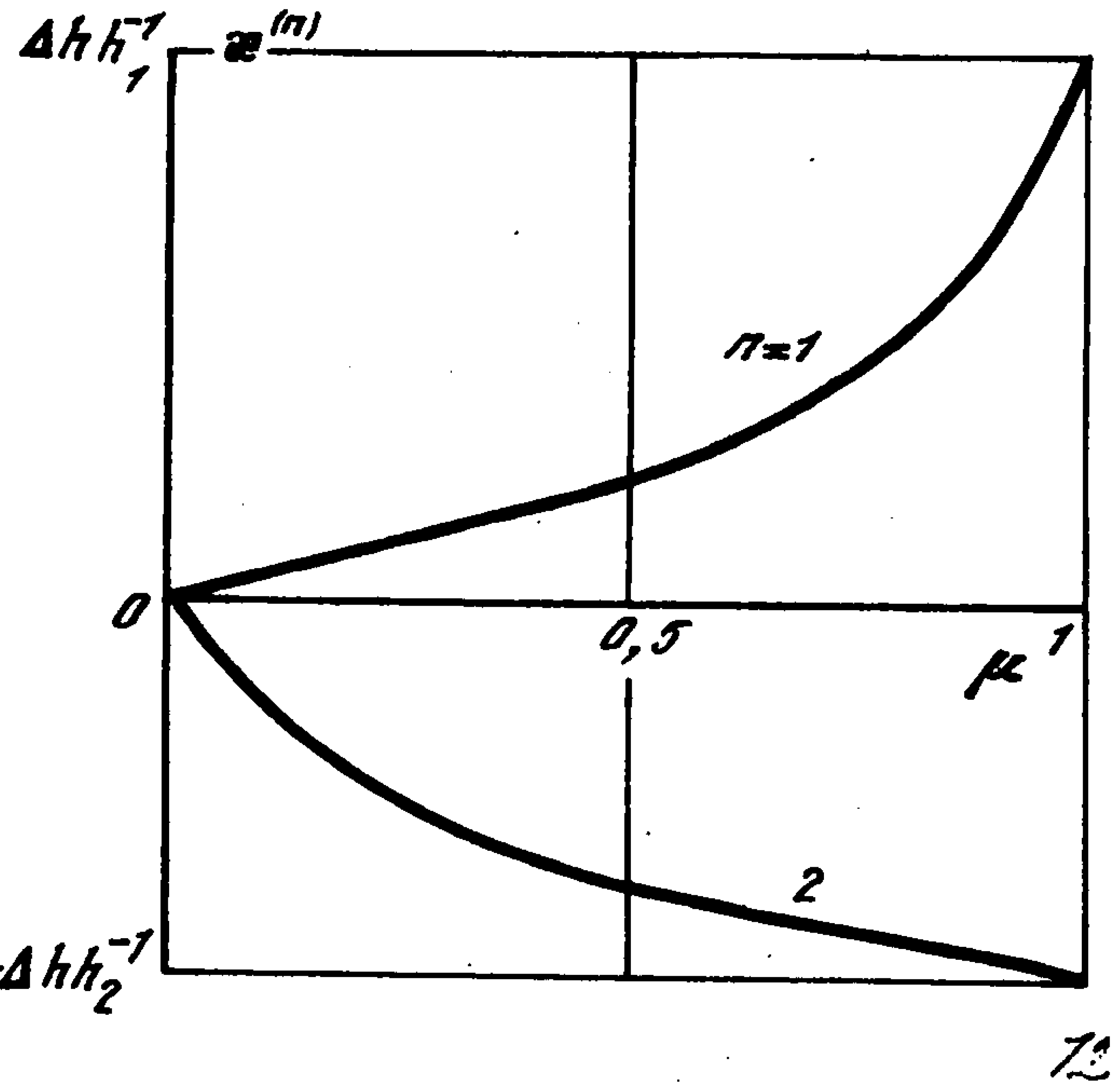
В этом случае решения u^0 интегральных тождеств (3.5), (3.6) известны [4]

$$u^0 = u^* + \kappa_i^{(s)} x_i u_{,i}^*(x_0), \quad s = 1,2$$

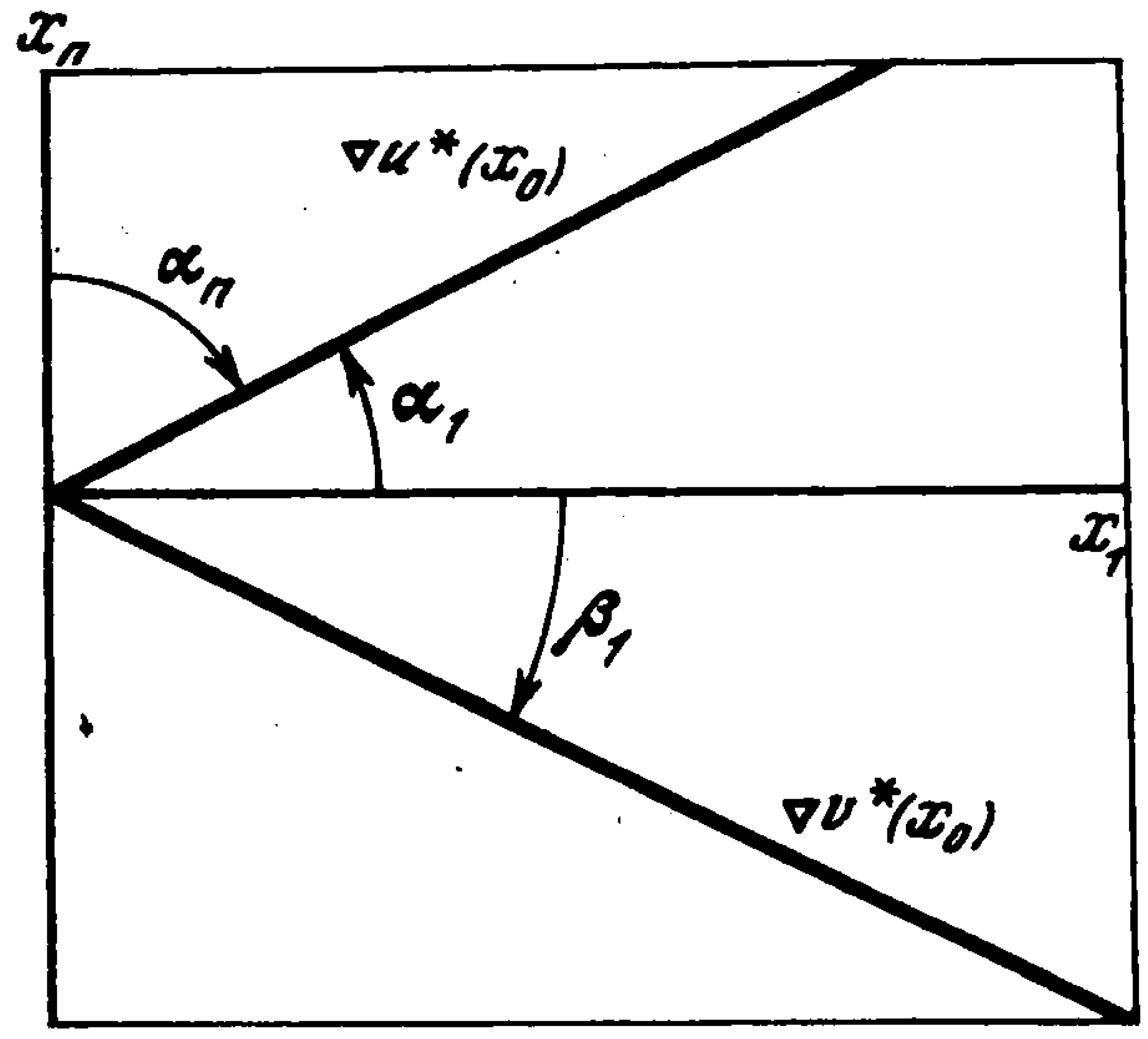
$$\kappa_i^{(s)} = -\Delta h \mu_i (h_1 + \Delta h \mu_i)^{-1}, \quad \kappa_i^{(2)} = \Delta h \mu_i (h_2 + \Delta h \mu_i)^{-1} \qquad (4.3)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2} a_1 \ldots a_n \int\limits_0^\infty \frac{d\rho}{(a_i^2 + \rho)\sqrt{(a_1^2 + \rho)\ldots(a_n^2 + \rho)}}$$

где индекс 1 в круглых скобках соответствует включению второго материала в первый, а индекс 2 – первого во второй.



Фиг. 1



Фиг. 2

Не ограничивая общности, предположим, что полуоси эллипсоида упорядочены следующим образом:

$$a_1 = 1, \quad a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots a_n \geqslant 0 \tag{4.4}$$

Тогда из (4.3) следует, что $0 \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \mu_n \leqslant 1$, причем последнее неравенство получается из оценки подынтегральной функции в интеграле (4.3)

$$\mu_n \leqslant \frac{a_n}{2} \int_0^\infty \frac{d\rho}{(a_n^2 + \rho)^{3/2}} = 1$$

Анализ показывает, что $\kappa^{(1)}(\mu)$ – монотонно убывающая, а $\kappa^{(2)}(\mu)$ – монотонно возрастающая функция μ при $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ (фиг. 1).

Рассмотрим случай, когда функция $\varphi = \varphi(u)$. Тогда неравенства (4.2) примут соответственно вид

$$\Delta h u_{,i}^* \upsilon_{,i}^* \leqslant \zeta \pm \Delta h \kappa_i^{(1)} u_{,i}^* \upsilon_{,i}^*, \quad \forall x_0 \in \Omega_1^*$$

$$\Delta h u_{,i}^* \upsilon_{,i}^* \geqslant \zeta \pm \Delta \kappa_i^{(2)} u_{,i}^* \upsilon_{,i}^*, \quad \forall x_0 \in \Omega_2^* \tag{4.5}$$

(здесь $u^* = u^*(x_0)$, $\upsilon^* = \upsilon^*(x_0)$). Обозначим через α_i углы между $\nabla u^*(x_0)$ – градиентом функции u^* в точке x_0 и осями n-мерного эллипсоида, через β_i – углы между $\nabla \upsilon^*(x_0)$ – градиентом функции υ^* в точке x_0 и осями n-мерного эллипсоида, а через γ– угол между градиентами $\nabla u^*(x_0)$ и $\nabla u^*(x_0)$. Тогда неравенства (4.5) можно представить в виде

$$\Delta h |\nabla u^*| |\nabla \upsilon^*| \cos\gamma \leqslant \zeta - \Phi_1(\alpha_i, \beta_i, a_i)$$

$$\Delta h |\nabla u^*| |\nabla \upsilon^*| \cos\gamma \leqslant \zeta - \Phi_2(\alpha_i, \beta_i, a_i) \tag{4.6}$$

$$\Phi_s = \Delta h |\nabla u^*| |\nabla \upsilon^*| \kappa_i^{(s)} \cos\alpha_i \cos\beta_i, \quad s = 1, 2$$

Неравенства (4.6) должны выполняться для любых α_i, β_i, a_i, удовлетворяющих равенствам

$$\sum_{i=1}^n \cos^2\alpha_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n \cos^2\beta_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n \cos\alpha_i \cos\beta_i = \cos\gamma \tag{4.7}$$

и неравенствам (4.4).

Решим две задачи

$$\max_{\alpha_i,\beta_i,a_i} \Phi_1(\alpha_i,\beta_i,a_i), \quad \min_{\alpha_i,\beta_i,a_i} \Phi_2(\alpha_i,\beta_i,a_i)$$

для α_i, β_i, a_i, удовлетворяющих (4.7), (4.4). Тогда неравенства (4.6) будут справедливы для всех α_i, β_i, a_i, удовлетворяющих условиям (4.7), (4.4). Максимум функции $\Phi_1(\alpha_i, \beta_i, a_i)$ и минимум функции $\Phi_2(\alpha_i, \beta_i, a_i)$ достигаются в точках (фиг. 2)

$$\begin{aligned} &a_1 = \ldots = a_{n-1} = 1, \ a_n = 0, \ \alpha_1 = -\beta_1 = \gamma/2 \\ &\alpha_2 = \beta_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = \beta_{n-1} = \pi/2, \ \alpha_n = \pi/2 - \gamma/2, \ \beta_n = \pi/2 + \gamma/2 \end{aligned} \tag{4.8}$$

и равны

$$\Phi_1^* = h_2^{-1}\Delta h^2|\nabla u^*||\nabla \upsilon^*|\sin^2(\gamma/2), \quad \Phi_2^* = -h_1^{-1}\Delta h^2|\nabla u^*||\nabla \upsilon^*|\sin^2(\gamma/2)$$

Анализ соотношений (4.8) показывает, что экстремальные значения функции Φ_1 и Φ_2 достигаются на n-мерном сплющенном сфероиде, нормаль к которому совпадает с осью x_n. Окончательно необходимые условия Вейерштрасса принимают вид

$$\begin{aligned} &\Delta h|\nabla u^*||\nabla \upsilon^*|\cos\gamma \leqslant \zeta - h_2^{-1}\Delta h^2|\nabla u^*||\nabla \upsilon^*|\sin^2(\gamma/2) \\ &\Delta h|\nabla u^*||\nabla \upsilon^*|\cos\gamma \geqslant \zeta + h_1^{-1}\Delta h^2|\nabla u^*||\nabla \upsilon^*|\sin^2(\gamma/2) \end{aligned} \tag{4.9}$$

где $u^* = u^*(x_0)$, $\upsilon^* = \upsilon^*(x_0)$.

Пример 1. Рассмотрим задачу минимизации работы f и F на перемещении u. В этом случае $\varphi = fu$, $\psi = Fu$. Анализ интегральных тождеств (1.5) и (2.3) показывает, что $\gamma = 0$, и следовательно, необходимые условия Вейерштрасса имеют простую форму

$$\Delta h|\nabla u^*|^2 \leqslant \zeta, \ x_0 \in \Omega_1^*; \ \Delta h|\nabla u^*|^2 \geqslant \zeta, \ x_0 \in \Omega_2^* \tag{4.10}$$

Положим в первом неравенстве $x_0 = y_- = y - 0r$, а во втором $x_0 = y_+ = y + 0r$, где r – орт нормали к границе Γ_{12}^*, а $y \in \Gamma_{12}^*$. Заметим также, что $\zeta = h_2|\nabla u^*|^2(y_+)|^2 - h_1|\nabla u^*(y_-)|^2$. Анализ неравенств (4.10) показывает, что они могут выполняться, если

$$\partial u^*(y_-)/\partial r = \partial u^*(y_+)/\partial r = 0, \ \forall y \in \Gamma_{12}$$

Пример 2. Рассмотрим задачу максимизации жесткости на кручение стержня, составленного из двух материалов – мягкого и жесткого с модулями сдвига G_1 и G_2 соответственно. В этом случае $\varphi = -2u$, $f = 2$, $h_1 = \rho G_1$, $h_2 = \rho G_2$, где величина ρ пропорциональна крутящему моменту, приложенному к стержню. Из интегральных тождеств (1.5) и (2.3) следует, что $\upsilon^* = u^*$. В этом случае $\gamma = \pi$, $\zeta = -\Delta h|\nabla u^*(y)|^2$ для $y \in \Gamma_{12}^*$, а неравенства (4.9) приобретают вид

$$\begin{aligned} &h_1 h_2^{-1}|\nabla u^*(x_0)|^2 \geqslant \zeta, \ \forall x_0 \in \Omega_1^* \\ &h_2 h_1^{-1}|\nabla u^*(x_0)|^2 \leqslant \zeta, \ \forall x_0 \in \Omega_2^* \end{aligned} \tag{4.11}$$

Положим в первом неравенстве $x_0 = y_- = y - 0r$, а во втором $x_0 = y_+ = y + 0r$, где $y \in \Gamma_{12}^*$, а r – орт нормали к Γ_{12}^*. Тогда из (4.11) можно получить неравенства

$$\begin{aligned} &h_1(2h_2 - h_1)|\nabla u^*(y_-)|^2 \geqslant h_2^2|\nabla u^*(y_+)|^2 \\ &h_2(2h_1 - h_2)|\nabla u^*(y_+)|^2 \geqslant h_1^2|\nabla u^*(y_-)|^2 \end{aligned}$$

из которых следует, что они могут выполняться только в случае, если

$$u_{,i}^*(y_-) = u_{,i}^*(y_+) = 0, \ i = 1,\ldots,n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петухов Л.В.* Оптимальные упругие области максимальной жесткости // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 88–95.
2. *Петухов Л.В.* Об оптимальных задачах теории упругости с неизвестными границами // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 231–236.
3. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
4. *Райтум У.Е.* Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений. Рига: Зинатне, 1989. 276 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
1.II.1994