

УДК 539.3; 62-50

Л.Д. Акуленко

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯМИ МЕМБРАНЫ ПОСРЕДСТВОМ ГРАНИЧНЫХ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Рассматривается задача управления поперечными движениями прямоугольной однородной мембраны. Предполагается, что управляющие воздействия силового типа распределены только вдоль ее границы. Известные начальные и требуемые конечные распределения смещений и скоростей точек мембраны считаются произвольными достаточно гладкими функциями эйлеровых координат. Решена начально-краевая задача и сформулирована проблема моментов. Для среднеквадратического интегрального функционала качества предложено эффективное приближенное решение. Мерой близости принят малый числовой параметр, характеризующий отношение наибольшего периода собственных колебаний (низшей моды) к длительности процесса управления. Конструктивно построены законы регулирования граничных силовых воздействий и получены оценки погрешности. Рассмотрены некоторые конкретные случаи начальных и конечных условий, часто встречающихся в прикладных задачах.

1. Постановка задачи. Исследуются управляемые поперечные движения мембраны, Управление осуществляется посредством сил, распределенных на ее границе. Ради определенности предполагается, что мембрана однородна и прямоугольна в плане (фигура). Смещения, ортогональные недеформированному состоянию, будем описывать функцией $z = z(t, x, y)$, где $t \geq 0$ – время; x, y – декартовы (эйлеровы) координаты точек мембраны, принадлежащие прямоугольнику Π с границей Γ . Уравнения движения мембраны и граничные условия принимаются в следующей стандартной форме [1,2]:

$$\rho \ddot{z} = \sigma (z''_{x^2} + z''_{y^2}), \quad (x, y) \in \Pi \setminus \Gamma \quad (1.1)$$

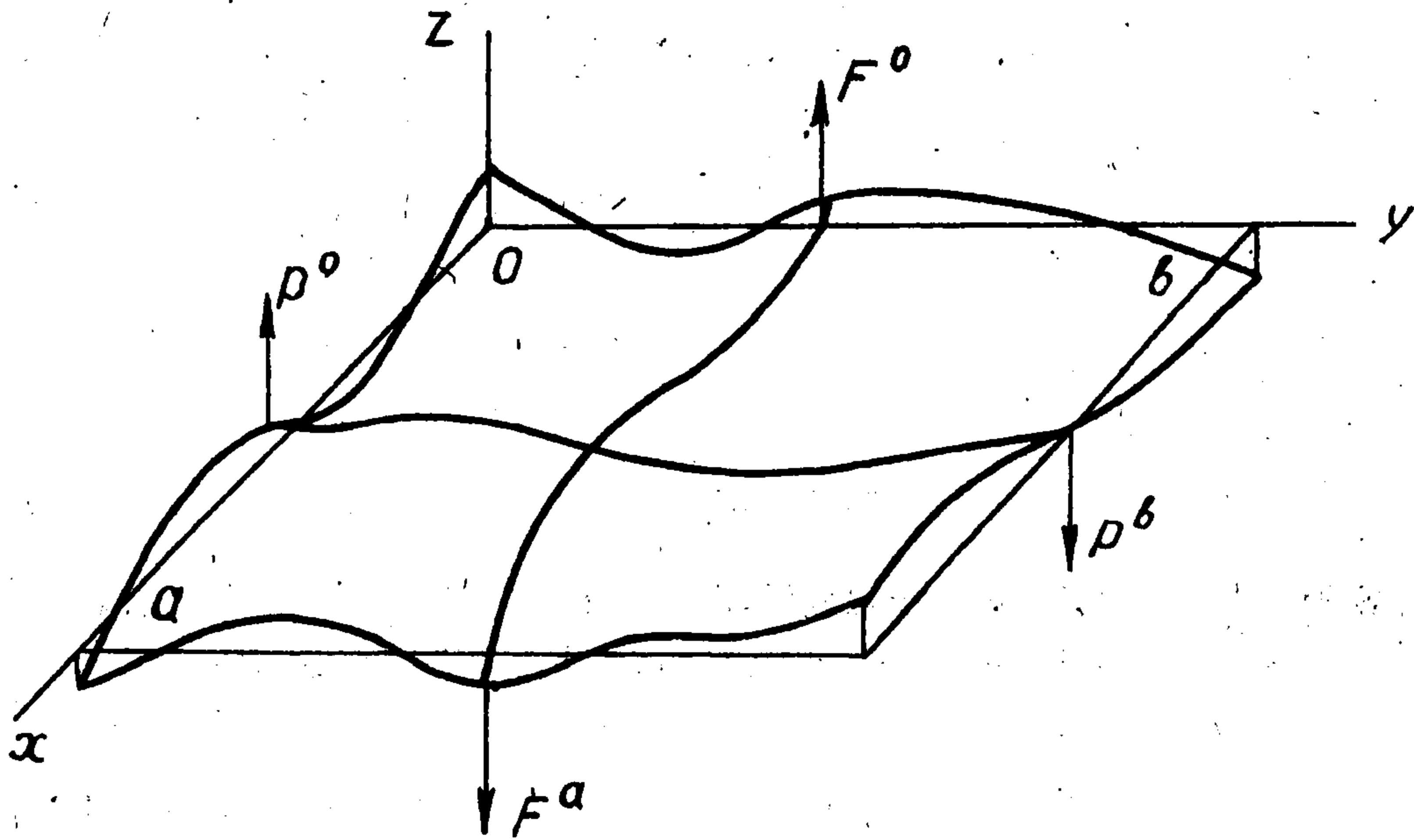
$$\Pi = \{x, y: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}, \quad \rho, \sigma = \text{const} > 0$$

$$\mp \sigma z'_x|_{x=0,a} = F^{0,a}(t, y), \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq t < \infty$$

$$\mp \sigma z'_y|_{y=0,b} = P^{0,b}(t, x), \quad 0 \leq x \leq a \quad (1.2)$$

Точками обозначено дифференцирование по времени t , штрихами с индексами – по координатам x, y . Постоянные ρ и σ имеют смысл поверхностной плотности материала и натяжения мембраны соответственно [1].

Уравнение состояния мембраны (1.1) описывает ее поперечные движения (в частности, колебания) внутри области Π при отсутствии внешних распределенных по поверхности сил. Считается, что силы $F^{0,a} = F^{0,a}(t, y), P^{0,b} = P^{0,b}(t, x)$ распределены только вдоль кусочно-гладкой границы Γ прямоугольной области Π , что выражается граничными соотношениями (1.2), см. фигуру. Функции $F^{0,a}, P^{0,b}$ неизвестны и подлежат выбору исходя из целей управления.



Для описания движения системы (1.1), (1.2) наряду с определением управляющих функций $F^{0,a}(t, y)$ и $P^{0,b}(t, x)$, достаточно гладких по t, y и t, x соответственно, требуется задать начальные распределения смещений z и скоростей \dot{z} точек мембраны (например, в результате измерений)

$$z(0, x, y) = u^0(x, y), \quad \dot{z}(0, x, y) = v^0(x, y), \quad (x, y) \in \Pi \quad (1.3)$$

Функции u^0, v^0 в (1.3) также должны быть достаточно гладкими. Свойства гладкости обсуждаются ниже более конкретно при построении искомого решения задачи управления и обусловлены условиями сходимости соответствующих рядов Фурье, см. разд. 3. Пока будем считать функции $F^{0,a}, P^{0,b}$ и u^0, v^0 таковыми, чтобы существовало сильное (физическое) решение $z(t, x, y)$ начально-краевой задачи (1.1)–(1.3). Предполагается, что имеет место сходимость решения по энергетической норме (норме W_2^1), т.е. ряд для z сходится равномерно, а для \dot{z}, z'_x, z'_y – по норме L_2 [1–4].

Сформулируем цель управления движениями мембраны и ограничения. Итак, ставится задача управления движениями мембраны посредством выбора граничных силовых воздействий $F^{0,a}(t, y), P^{0,b}(t, x)$ из допустимого класса гладкости. Требуется привести систему (1.1) – (1.3) в заданное состояние за конечное время

$$z(t_f, x, y) = u^f(x, y), \quad \dot{z}(t_f, x, y) = v^f(x, y), \quad (x, y) \in \Pi, \quad t_f < \infty \quad (1.4)$$

Здесь u^f, v^f – известные достаточно гладкие функции x, y . Момент времени t_f в (1.4) окончания процесса управления считается фиксированным; его величина выбирается из некоторых дополнительных соображений, связанных с возможностями системы управления, и других.

На управляющие функции $F^{0,a}, P^{0,b}$ обычно налагаются ограничения, например геометрического типа (по величине), по интегральной норме (l -проблема моментов [5]) и др. Ограничения могут иметь также форму интегральных функционалов качества управления, например среднеквадратических [5–8]. Возьмем для определенности простейший вариант такого ограничения [6]

$$I[F, P] = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} dt \left[c_F^2 \int_0^b F^2(t, y) dy + c_P^2 \int_0^a P^2(t, x) dx \right] \rightarrow \min_{F, P}$$

$$F = (F^0, F^a)^T, \quad P = (P^0, P^b)^T, \quad c_{F, P}^2 = \text{const} > 0 \quad (1.5)$$

Здесь F, P – двумерные арифметические вектор-функции, c_F^2, c_P^2 – весовые коэф-

фициенты. Дополнительные ограничения, кроме условий гладкости, на управления $F^{0,a}, P^{0,b}$ не налагаются.

Предложенная весьма упрощенная постановка задачи управления движениями мембраны и их оптимизации в форме (1.1) – (1.5) представляет определенный теоретический интерес и может оказаться полезной в прикладном аспекте; например при управлении крупногабаритными космическими конструкциями. Существенное значение имеет решение проблемы управляемости [5–9] и конструктивное построение законов управления.

Кратко прокомментируем граничные (краевые) (1.2), начальные (1.3) и конечные (1.4) условия, а также функционал (1.5). Согласно (1.2) силовые воздействия F и P могут приводить к ускоренному поступательному и вращательному движениям мембраны как целого. Во избежание больших поворотов плоскости мембраны функции $F^{0,a}(t, y)$ и $P^{0,b}(t, x)$ должны быть подчинены условиям отсутствия суммарного момента сил относительно осей, лежащих в плоскости недеформированной мембраны. В частности, для нулевых гармоник (средних значений) должны выполняться тождества $F_0^0(t) \equiv F_0^a(t), P_0^0(t) \equiv P_0^b(t)$. Далее, во избежание значительных перемещений вследствие управления граничные силы могут быть ограничены требованием равенства нулю суммарной величины для всех $t, 0 \leq t \leq t_f$.

Обсудим теперь начальные (1.3) и конечные (1.4) условия. Если в некоторый момент времени $t = t^*$ оказываются однородными распределения смещений $z(t^*, x, y) \equiv u^* = \text{const}$ и скоростей $\dot{z}(t^*, x, y) \equiv v^* = \text{const}$, то, полагая $F = P \equiv 0$ в (1.2) для $t > t^*$, получим, согласно (1.1) выражения $z(t, x, y) \equiv u^* + v^*(t - t^*), \dot{z}(t, x, y) \equiv v^*$. Это состояние равномерного движения мембраны без относительных колебаний; оно может представить практический интерес. Таким образом, прикладное значение могут иметь следующие постановки задачи управления поперечными движениями мембраны.

1°. Гашение относительных (упругих) смещений мембраны для произвольных начальных распределений $u^0(x, y), v^0(x, y)$ (1.3) из достаточно высокого класса гладкости. Состояние поступательного движения мембраны как целого в направлении оси z , т.е. значения u^*, v^* , могут быть а) существенными и задаваться заранее или б) несущественными и определяться в процессе решения основной задачи гашения поперечных колебаний.

2°. Приведение мембраны из начального недеформированного состояния (u^0, v^0 – постоянные) в состояние заданного равномерного движения $u^f(x, y) = \text{const}, v^f(x, y) = \text{const}$, см. выше. Эту постановку задачи управления можно рассматривать как частный случай предыдущей 1°, а, когда начальные относительные смещения отсутствуют, или как дополнительную к 1°, б, см. разд. 4.

3°. Возбуждение или (и) подавление некоторых избранных собственных мод колебаний мембраны с учетом или без учета состояния движения как целого (см. далее).

Возможны другие, представляющие прикладной интерес, конкретные постановки задачи управления поперечными смещениями мембраны в рамках условий (1.3), (1.4). Заметим, что приведение мембраны из произвольного начального состояния $u^0(x, y), v^0(x, y)$ (1.3) в требуемое конечное $u^f(x, y), v^f(x, y)$ (1.4) за ограниченное время посредством сосредоточенных на границе управляющих воздействий согласно (1.2) приводит к принципиальным трудностям, связанным с управляемостью и разрешимостью счетномерной проблемы моментов [5 – 9] (см. далее). Поэтому обычно отказываются от строгого удовлетворения конечных условий (1.4) и учитывают их “методом штрафов”. Применяются также методы, основанные на аналитическом конструировании регуляторов [10], конечномодовый подход и др. Предлагается конструктивный метод решения задачи (1.1)–(1.5) на основе разделения мод, когда время t_f асимптотически велико по сравнению с периодом собственных колебаний низшей моды. Такая ситуация часто реализуется в прикладных задачах.

2. Решение краевой задачи для известных управляющих воздействий. В рассматриваемой задаче (1.1) – (1.5) удобно перейти к безразмерным переменным t^* , x^* , y^* , z^* и параметрам, вводя единицу времени θ и длины d . Полагая $\theta = d(\rho/\sigma)^{1/2}$, получим уравнение состояния вида (1.1), в котором $\rho = \sigma = 1$. Величину d при этом можно положить равной a или b ; тогда соответствующая переменная x^* или y^* изменяется в промежутке $[0, 1]$. Если провести симметричную нормировку на единицу длины $d = \alpha a + \beta b$, $\alpha + \beta > 0$, то $\alpha a^* + \beta b^* = 1$; при $d = (a^2 + b^2)^{1/2}$ имеем $a_*^2 + b_*^2 = 1$; если положить $d = (ab)^{1/2}$, то $a_* b_* = 1$; и т.д.

Введем безразмерные аргументы t^* , x^* , y^* , функции z^* , F^* , P^* , $u_*^{0,f}$, $v_*^{0,f}$ и параметры t_f^* , a^* , b^* , $c_{F^*}^2$, $c_{P^*}^2$ и опустим звездочку ради сокращения записи. Перейдем к решению начально-краевой задачи (1.1) – (1.3) в предположении, что функции $F^{0,a}(t, y)$, $P^{0,b}(t, x)$ пока известны.

Рассмотрим сперва соответствующую задачу на собственные значения и собственные функции, получающуюся в результате применения стандартной процедуры разделения переменных и метода Фурье [1, 2]; имеем

$$\begin{aligned} Z''_{x^2} + Z''_{y^2} + \lambda^2 Z &= 0, \quad z(t, x, y) \sim T(t)Z(x, y) \\ Z'_x(0, y) = Z'_x(a, y) = Z'_y(x, 0) = Z'_y(x, b) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для полной ортонормированной системы собственных функций $\{Z_{nm}(x, y)\}$ и системы собственных значений $\{\lambda_{nm}\}$ находим выражения

$$\begin{aligned} Z_{nm}(x, y) &= X_n(x)Y_m(y), \quad \lambda_{nm} = (v_n^2 + \mu_m^2)^{1/2} \\ X_n(x) &= (a/2)^{-1/2} \cos v_n x, \quad X_0(x) = a^{-1/2}, \quad v_n = \pi n / a, \quad n \geq 1 \\ Y_m(y) &= (b/2)^{-1/2} \cos \mu_m y, \quad Y_0(y) = b^{-1/2}, \quad \mu_m = \pi m / b, \quad m \geq 1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $\{X_n\}$, $\{v_n\}$ и $\{Y_m\}$, $\{\mu_m\}$ – аналогичные (полные, ортонормированные) системы для одномерных задач на отрезках $x \in [0, a]$ и $y \in [0, b]$ соответственно.

Решение краевой задачи (1.1), (1.2) строим при помощи метода Фурье [1, 2] и приема Г.А. Гринберга [6, 11]. Представим искомую функцию $z(t, x, y)$ в виде двойного ряда

$$z(t, x, y) = \sum_{k,l \geq 0} T_{kl}(t) Z_{kl}(x, y) \quad (2.3)$$

в котором функции $Z_{kl}(x, y)$ построены согласно (2.2), а коэффициенты Фурье $T_{kl}(t)$ неизвестны и подлежат определению. Подставляя ряд (2.3) только в левую часть уравнения (1.1), умножая на $Z_{nm}(x, y) dx dy$ и интегрируя по частям (по области Π), получим с учетом граничных условий двумерную счетную систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \ddot{T}_{nm} + \lambda_{nm}^2 T_{nm} &= \Theta_{nm}(t), \quad \Theta_{nm}(t) = (\xi_n, F_m(t)) + (\eta_m, P_n(t)) \\ \xi_n &= (\xi_n^0, \xi_n^a)^T, \quad \xi_n^0 = X_n(0), \quad \xi_n^a = X_n(a), \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\eta_m = (\eta_m^0, \eta_m^b)^T, \quad \eta_m^0 = Y_m(0), \quad \eta_m^b = Y_m(b), \quad m \geq 0$$

В уравнении (2.4) для T_{nm} выражения типа (ξ_n, F_m) суть скалярные произведения соответствующих двумерных арифметических векторов, которые определены ниже и в (1.5), (2.4). Функции $F_m(t)$, $P_n(t)$ – коэффициенты Фурье граничных управляющих воздействий, т.е.

$$F(t, y) = \sum_{m \geq 0} F_m(t) Y_m(y), \quad F_m(t) = \langle F, Y_m \rangle \quad (2.5)$$

$$P(t, x) = \sum_{n \geq 0} P_n(t) X_n(x), \quad P_n(t) = \langle P, X_n \rangle$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначены соответствующие скалярные произведения в L_2 .

Уравнения (2.4) должны быть дополнены начальными значениями функций T_{nm}, \dot{T}_{nm} . Используя начальные условия (1.3), для искомым $T_{nm}(0) = T_{nm}^0, \dot{T}_{nm}(0) = \dot{T}_{nm}^0$ получим выражения

$$T_{nm}^0 = U_{nm}^0 = \langle u^0, Z_{nm} \rangle, \quad \dot{T}_{nm}^0 = V_{nm}^0 = \langle v^0, Z_{nm} \rangle \quad (2.6)$$

Здесь U_{nm}^0, V_{nm}^0 — компоненты Фурье известных достаточно гладких функций $u^0(x, y), v^0(x, y)$ по ортонормированной системе $\{Z_{nm}\}$. Таким образом, для известных функций $F(t, y), P(t, x)$ достаточно высокого класса гладкости может быть построено сильное или классическое решение начально-краевой задачи (1.1) — (1.3). Оно имеет вид двойного ряда (2.3), в котором функции T_{nm}, \dot{T}_{nm} находятся квадратурами

$$T_{nm}(t) = U_{nm}^0 \cos \lambda_{nm} t + \frac{V_{nm}^0}{\lambda_{nm}} \sin \lambda_{nm} t + \frac{1}{\lambda_{nm}} \int_0^t \sin \lambda_{nm} (t - \tau) \Theta_{nm}(\tau) d\tau, \quad n + m \geq 1$$

$$T_{00}(t) = U_{00}^0 + V_{00}^0 t + \int_0^t (t - \tau) \Theta_{00}(\tau) d\tau, \quad \dot{T}_{nm} = \frac{dT_{nm}}{dt} \quad (2.7)$$

Коэффициенты $T_{nm}(t), n + m \geq 1$ характеризуют относительные упругие смещения элементов мембраны (поперечные колебания). Функция $T_{00}(t)$ описывает движение мембраны как целого вдоль оси z . Если суммарная сила $\Theta_{00}(t) \equiv 0$, то центр масс мембраны движется равномерно с начальной скоростью $V_{00}^0 Z_{00}$. Однако функции $\Theta_{nm}(t)$ в (2.7) неизвестны и подлежат определению на основе конечных (финальных) условий (1.4) с учетом критерия качества управления (1.5).

Обсудим частотные свойства счетномерной колебательной системы (2.4). Можно установить, что двумерный спектр $\{\lambda_{nm}\}$ образует плотное множество в следующем смысле. Выбором достаточно больших целых значений $n \geq 1$ для некоторых $m \leq M$ можно добиться любой близости λ_{nm} к произвольному числу λ_{nm}^* , где число $m^* \leq M$ фиксировано, причем в сколь угодно малой окрестности λ_{nm}^* содержится сколь угодно большое множество значений λ_{nm} . Аналогичное утверждение справедливо при достаточно большом m для $n, n^* \leq N$. Кроме того, в случае рационального отношения a/b имеется счетное множество совпадающих значений λ_{nm} и λ_{kl} . В частности, при $a = b$ (квадратная мембрана) совпадающими будут частоты (с точностью до инверсии $n \rightarrow m, m \rightarrow n$):

- | | | |
|--------------------|---------------------------|--------------------|
| 1) $n = 5, m = 5;$ | $n = 7, m = 1;$ | 2) 7, 4; 8, 1; |
| 3) 7, 6; 9, 2; | 4) 9, 7; 11, 3; | 5) 9, 8; 12, 1; |
| 6) 10, 5; 11, 2; | 7) 10, 10; 14, 2; | 8) 11, 7; 13, 1; |
| 9) 11, 8; 13, 4; | 10) 11, 10; 14, 5; | 11) 12, 11; 16, 3; |
| 12) 13, 6; 14, 3; | 13) 13, 9; 15, 5; | 14) 13, 11; 17, 1; |
| 15) 13, 13; 17, 7; | 16) 14, 8; 16, 2; | 17) 14, 12; 18, 4; |
| 18) 14, 13; 19, 2; | 19) 15, 10; 17, 6; 18, 1; | 20) 16, 7; 17, 4; |
| 21) 16, 11; 19, 4; | 22) 16, 13; 19, 8; 20, 5; | 23) 16, 15; 20, 9; |
| 24) 17, 6; 18, 1; | 25) 17, 9; 19, 3; | 26) 17, 11; 19, 7; |
| 27) 19, 8; 20, 5; | ... и далее. | |

При $a \geq b$ или $b \geq a$ частоты $\lambda_{nm}(a, b)$ близки также для $n, m \sim 1$. Указанное поведение частотного спектра $\{\lambda_{nm}(a, b)\}$ системы (2.4) принципиально усложняет

эффективное решение проблемы управляемости [5 - 9, 12] и конструктивного построения законов управления [5, 6, 10, 13]. Эти трудности обусловлены отсутствием распределенных по поверхности мембраны управляющих воздействий, т.е. коэффициенты $\Theta_{nm}(t)$ в (2.4) не образуют "полного базиса".

3. Приближенное решение задачи оптимального управления. Переформулируем исходную задачу (1.1) - (1.5) в терминах коэффициентов Фурье $T_{nm}(t)$ функции $z(t, x, y)$. Поперечные движения мембраны описываются системой уравнений (2.4), (2.5), в которой $F_m^{0,a}(t)$, $P_n^{0,b}(t)$ - неизвестные управляющие функции, подлежащие определению; начальные условия имеют вид (2.6). Управления должны выбираться из допустимого класса гладкости так, чтобы удовлетворить конечным условиям в момент времени $t = t_f$ (1.4):

$$T_{nm}(t_f) = U_{nm}^f = \langle u^f, Z_{nm} \rangle, \quad \dot{T}_{nm}(t_f) = V_{nm}^f = \langle v^f, Z_{nm} \rangle \quad (3.1)$$

Коэффициенты Фурье $T_{nm}(t)$, $V_{nm}(t) \equiv \dot{T}_{nm}(t)$ вычисляются согласно (2.7). Кроме того, функции $T_m(t)$, $P_n(t)$ должны быть ограничены в соответствии с условием оптимальности (1.5), которое принимает вид (см. (2.5))

$$I[F, P] = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[c_F^2 \sum_{l \geq 0} F_l^2(t) + c_P^2 \sum_{k \geq 0} P_k^2(t) \right] dt \rightarrow \min_{\{F_m\}, \{P_n\}} \quad (3.2)$$

Применим к счетномерной задаче оптимального управления (2.4), (2.6), (3.1), (3.2) аналог условий принципа максимума [6, 7]. Введем счетномерные векторы $\Phi_{nm}(t)$, $\Psi_{nm}(t)$, сопряженные переменным T_{nm} , V_{nm} соответственно. С помощью стандартной процедуры получим выражения для оптимальных управлений F_m , P_n :

$$F_m(t) = c_F^{-2} \sum_{k \geq 0} \xi_k \Psi_{km}(t), \quad P_n(t) = c_P^{-2} \sum_{l \geq 0} \eta_l \Psi_{nl}(t) \quad (3.3)$$

$$\Psi_{nm}(t) = A_{nm} \sin \lambda_{nm} t + B_{nm} \cos \lambda_{nm} t, \quad n + m \geq 1$$

$$\Psi_{00}(t) = A_{00} t + B_{00}, \quad A_{nm}, B_{nm} = \text{const}$$

Коэффициенты A_{nm} , B_{nm} должны удовлетворять счетной системе линейных алгебраических уравнений, которые элементарно следуют из (3.1) после подстановки функций $F_m^{0,a}(t)$, $P_n^{0,b}(t)$ (3.3) в формулы (2.7) при учете выражения (2.4) для $\Theta_{nm}(t)$ ($n, m \geq 0$) и принимают вид

$$\sum_{k \geq 0} (\xi_{nkm}^{ss} A_{km} + \xi_{nkm}^{sc} B_{km}) + \sum_{l \geq 0} (A_{nl} \eta_{nlm}^{ss} + B_{nl} \eta_{nlm}^{sc}) = U_{nm}^f - U_{nm}^0 \cos \lambda_{nm} t_f - (V_{nm}^0 / \lambda_{nm}) \sin \lambda_{nm} t_f \quad (3.4)$$

$$\sum_{k \geq 0} (\xi_{nkm}^{cs} A_{km} + \xi_{nkm}^{cc} B_{km}) + \sum_{l \geq 0} (A_{nl} \eta_{nlm}^{cs} + B_{nl} \eta_{nlm}^{cc}) = V_{nm}^f + U_{nm}^0 \lambda_{nm} \sin \lambda_{nm} t_f - V_{nm}^f \cos \lambda_{nm} t_f, \quad n, m \geq 0$$

Трехиндексные коэффициенты типа $\xi_{nkm}^{ss}, \dots, \eta_{nlm}^{cc}$ (3.4) получаются в результате интегрирования элементарных выражений, содержащих произведения тригонометрических функций или тригонометрической и линейной. Для крайних коэффициентов имеем

$$\xi_{nkm}^{ss} = \frac{\xi_{nk}}{c_F^2 \lambda_{nm}} \int_0^{t_f} \sin \lambda_{nm} (t_f - t) \sin \lambda_{km} t dt, \quad n, k \geq 0 \quad (3.5)$$

$$\eta_{nlm}^{cc} = \frac{\eta_{lm}}{c_P^2} \int_0^{t_f} \cos \lambda_{nm}(t_f - t) \cos \lambda_{nl} t dt, \quad m, l \geq 0$$

Аналогичный вид имеют промежуточные коэффициенты $\xi_{nkm}^{sc}, \dots, \eta_{nlm}^{cs}$ (3.4). Нет необходимости выписывать явные весьма громоздкие выражения для квадратур (3.5) и других. Уравнения (3.4) и коэффициенты (3.5) при $n = m = 0$ получаются предельным переходом $\lambda_{00} \rightarrow 0$.

Точное решение системы (3.4) построить не удастся. Однако анализ коэффициентов (3.5) показывает, что их асимптотика по отношению к величине $t_f, t_f \rightarrow \infty$, различна: главными являются диагональные ("резонансные") члены. Это позволяет построить приближенное решение и оценить погрешность по отношению к малой величине $1/t_f \rightarrow 0$ [13]. Такой подход эквивалентен применению асимптотических методов разделения переменных, аналогичных методу усреднения [14].

Приведенные выше соотношения весьма громоздки и неудобны для анализа. Предпочтительнее пользоваться уравнениями в оскулирующих переменных [14, 15], которые получаются посредством стандартной замены

$$T_{nm} = C_{nm} \cos \lambda_{nm} t + S_{nm} \sin \lambda_{nm} t, \quad T_{00} \equiv T_{00} \quad (3.6)$$

$$\dot{T}_{nm} = V_{nm} = \partial T_{nm} / \partial t, \quad V_{00} \equiv V_{00}, \quad n + m \geq 1$$

Далее дифференцированием выражений (3.6) в силу уравнений (2.4) получим уравнения движения в переменных $T_{00}, V_{00}, C_{nm}, S_{nm}, n + m \geq 1$. Начальные (2.6) и конечные (3.1) условия приводятся к нужному виду; в результате имеем счетномерную двухточечную задачу

$$\begin{aligned} \dot{T}_{00} = V_{00}, \quad \dot{V}_{00} = \Theta_{00}, \quad T_{00}(0) = U_{00}^0, \quad V_{00}(0) = V_{00}^0 \\ \dot{C}_{nm} = -\lambda_{nm}^{-1} \Theta_{nm} \sin \lambda_{nm} t, \quad \dot{S}_{nm} = \lambda_{nm}^{-1} \Theta_{nm} \cos \lambda_{nm} t, \quad C_{nm}(0) = U_{nm}^0, \quad S_{nm}(0) = \lambda_{nm}^{-1} V_{nm}^0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} T_{00}(t_f) = U_{00}^f, \quad V_{00}(t_f) = V_{00}^f, \quad C_{nm}(t_f) = C_{nm}^f \equiv U_{nm}^f \cos \lambda_{nm} t_f - \\ - \lambda_{nm}^{-1} V_{nm}^f \sin \lambda_{nm} t_f, \quad S_{nm}(t_f) = S_{nm}^f \equiv U_{nm}^f \sin \lambda_{nm} t_f + \lambda_{nm}^{-1} V_{nm}^f \cos \lambda_{nm} t_f, \quad n + m \geq 1 \end{aligned}$$

Из (3.7) следует, что при $\Theta_{nm}(t) \equiv 0$ переменные $C_{nm}, S_{nm} = \text{const}$. Задача управления заключается в выборе допустимых управлений F_m, P_n , удовлетворяющих конечным условиям (3.7) и доставляющих минимум функционалу I (3.2). Уравнения (3.7) существенно удобнее, поскольку сопряженные переменные Φ_{nm}, Ψ_{nm} , отвечающие C_{nm}, S_{nm} , будут постоянными (аналогичными коэффициентам A_{nm}, B_{nm} в $\Phi_{nm}(t), \Psi_{nm}(t)$ (3.3)).

Использование стандартной процедуры принципа максимума позволяет получить структуру выражений для оптимальных управлений как функций времени

$$F_m(t) = \frac{1}{c_F} \sum_{k \geq 0} \xi_k \Lambda_{km}(t), \quad P_n(t) = \frac{1}{c_P} \sum_{l \geq 0} \eta_l \Lambda_{nl}(t) \quad (3.8)$$

$$\Theta_{nm}(t) = \frac{1}{c_F} \sum_{k \geq 0} (\xi_n, \xi_k) \Lambda_{km}(t) + \frac{1}{c_P} \sum_{l \geq 0} \Lambda_{nl}(t) (\eta_l, \eta_m)$$

$$\Lambda_{nm}(t) = \lambda_{nm}^{-1} (\Psi_{nm} \cos \lambda_{nm} t - \Phi_{nm} \sin \lambda_{nm} t)$$

$$\Lambda_{00}(t) = \Psi_{00}^0 - \Phi_{00}^0 t; \quad \Phi_{00}, \Psi_{00}^0, \Phi_{nm}, \Psi_{nm} = \text{const}$$

Дальнейшему определению подлежат коэффициенты Φ_{nm}, Ψ_{nm} , входящие в функции Θ_{nm} (3.8). Подставив эти функции в уравнения (3.7) и проинтегрировав по t с учетом начальных условий, получим представления для искомых переменных

$$V_{00}(t) = V_{00}^0 + \zeta_{00}^2 \left(\Psi_{00}^0 t - \frac{1}{2} \Phi_{00}^0 t^2 \right) + \Delta V_{00}(t), \quad \zeta_{00}^2 = c_F^{-2} \xi_0^2 + c_P^{-2} \eta_0^2$$

$$T_{00}(t) = U_{00}^0 + V_{00}^0 t + \frac{1}{2} \zeta_{00}^2 (\Psi_{00}^0 t^2 - \frac{1}{3} \Phi_{00}^0 t^3) + \Delta T_{00}(t) \quad (3.9)$$

$$C_{nm}(t) = U_{nm}^0 + \frac{1}{2} \zeta_{nm}^2 \lambda_{nm}^{-2} \Phi_{nm} t + \Delta C_{nm}(t), \quad \zeta_{nm}^2 = c_F^{-2} \xi_n^2 + c_P^{-2} \eta_m^2$$

$$S_{nm}(t) = \lambda_{nm}^{-1} V_{nm}^0 + \frac{1}{2} \zeta_{nm}^2 \lambda_{nm}^{-2} \Psi_{nm} t + \Delta S_{nm}(t), \quad n + m \geq 1$$

В выражениях (3.9) выделены главные (“резонансные”) члены; относительно малые добавки обозначены символом Δ . Определим неизвестные коэффициенты Φ_{nm} , Ψ_{nm} исходя из приближенных выражений (3.9), в которых добавки полагаются равными нулю [13]. Разрешая уравнения, соответствующие конечным условиям (3.7), находим указанные приближенные значения искомых коэффициентов

$$\Phi_{00}^{(1)} = 6\zeta_{00}^{-2} t_f^{-2} (2t_f^{-1} \delta T_{00} - \delta V_{00}), \quad \Psi_{00}^{(1)} = 2\zeta_{00}^{-2} t_f^{-1} (3t_f^{-1} \delta T_{00} - \delta V_{00}) \quad (3.10)$$

$$\Phi_{nm}^{(1)} = 2\zeta_{nm}^{-2} t_f^{-1} \lambda_{nm}^2 \delta C_{nm}, \quad \Psi_{nm}^{(1)} = 2\zeta_{nm}^{-2} t_f^{-1} \lambda_{nm}^2 \delta S_{nm}$$

$$\delta T_{00} = U_{00}^f - U_{00}^0 - V_{00}^0 t_f, \quad \delta V_{00} = V_{00}^f - V_{00}^0, \quad \delta C_{nm} = C_{nm}^f - U_{nm}^0 \delta S_{nm} = S_{nm}^f - \lambda_{nm}^{-1} V_{nm}^0$$

Введем малый параметр $\varepsilon = t_f^{-1} \ll 1$; $\varepsilon \rightarrow 0$ при $t_f \rightarrow \infty$, где t_f – время процесса, измеряемое в единицах θ (см. начало разд. 2). Будем полагать величину Θ_{00} малой, например, $\Theta_{00} \sim \varepsilon$ при $0 \leq t \leq t_f$. Для этого достаточно выполнение оценок $\Phi_{00}^{(1)} \sim \varepsilon^2$, $\Psi_{00}^{(1)} \sim \varepsilon$, которые заведомо имеют место, если $\delta T_{00} \sim \varepsilon^{-1}$, $\delta V_{00} \sim 1$, см. (3.10). Таким образом, суммарная (результатирующая) граничных сил $F^{0,a}(t, y)$, $P^{0,b}(t, x)$ считается асимптотически малой $O(\varepsilon)$, однако на большом интервале времени $t_f \sim \varepsilon^{-1}$ состояние движения мембраны как целого может изменяться существенным образом: по положению $\delta T_{00} \sim \varepsilon^{-1}$, по скорости $\delta V_{00} \sim 1$. Аналогично потребуем, чтобы управления Θ_{nm} , $n + m \geq 1$ по отношению к параметру ε также были малыми, т.е. $\Theta_{nm} \sim \varepsilon$. Из (3.10) следует выполнение данного требования, если $\Phi_{nm}^{(1)} \sim \varepsilon$, $\Psi_{nm}^{(1)} \sim \varepsilon$ или δC_{nm} , $\delta S_{nm} \sim 1$. Механический смысл предположения состоит в том, что длительно воздействуя (“в резонансе”) на края мембраны с силой $\Theta_{nm} \sim \varepsilon$, можно существенно (на величину $O(1)$) изменить амплитуду поперечных колебаний произвольной моды T_{nm} , $n + m \geq 1$.

Используя приближенные значения (3.10) сопряженных величин, получим согласно (3.8) управления F_m , P_n , Θ_{nm} в явном виде

$$F_m^{(1)}(t) = \frac{1}{c_F} \sum_{k \geq 0} \xi_k \Lambda_{km}^{(1)}(t), \quad P_n^{(1)}(t) = \frac{1}{c_P} \sum_{l \geq 0} \Lambda_{nl}^{(1)}(t) \eta_l$$

$$\Theta_{nm}^{(1)}(t) = \frac{1}{c_F} \sum_{k \geq 0} (\xi_n, \xi_k) \Lambda_{km}^{(1)}(t) + \frac{1}{c_P} \sum_{l \geq 0} \Lambda_{nl}^{(1)}(t) (\eta_l, \eta_m) \quad (3.11)$$

$$\Lambda_{00}^{(1)}(t) = \Psi_{00}^{(1)} - \Phi_{00}^{(1)} t, \quad \Lambda_{nm}^{(1)}(t) = \lambda_{nm}^{-1} (\Psi_{nm}^{(1)} \cos \lambda_{nm} t - \Phi_{nm}^{(1)} \sin \lambda_{nm} t)$$

Таким образом, выражения (3.11), (3.10) определяют оптимальное управление первого приближения по малому параметру ε . Действительно, подставим известные управления (3.11) в (3.7) и проинтегрируем при заданных начальных условиях. Получим явные представления для коэффициентов T_{00} , V_{00} , C_{nm} , S_{nm} , $n + m \geq 1$ вида (3.9), где постоянные определены согласно (3.10), а относительно малые (по степеням ε) добавки могут быть оценены. Возможность построения этих оценок тесно связана со сходимостью рядов, которая определяется скоростью убывания $\Phi_{nm}^{(1)}$, $\Psi_{nm}^{(1)}$ (3.10), т.е. классами гладкости функций $u^{0f}(x, y)$, $v^{0f}(x, y)$.

Из (3.11) следует, что ряды для $F_m^{(1)}$, $P_n^{(1)}$, $\Theta_{nm}^{(1)}$, а также ряды (2.5) для $F^{(1)}(t, y)$, $P^{(1)}(t, x)$ абсолютно и равномерно сходятся при условии $\Lambda_{nm}^{(1)} \sim (nm)^{-(1+\gamma)}$,

которое согласно (3.10) эквивалентно условиям $\delta C_{nm}, \delta S_{nm} \sim (nm)^{-(2+\gamma)}$, где $\gamma > 0$. Эти условия эквивалентны требованиям на коэффициенты Фурье $U_{nm}^{0,f}, V_{nm}^{0,f} \lambda_{nm}^{-1} \sim (nm)^{-(2+\gamma)}$. Отметим, что для λ_{nm} справедливы оценки вида: $c(nm)^{1/2} \leq \lambda_{nm} \leq C(n+m)$. Будем далее полагать выполненными указанные достаточные условия сходимости. Тогда приближенные управляющие функции будут классическими (не обобщенными), хорошо реализуемыми на практике.

Оценим теперь погрешности удовлетворения конечных условий, обусловленные величинами Δ в (3.9). Прямым интегрированием ряда для Θ_{00} (без учета основного слагаемого) устанавливается, что $\Delta V_{00}(t_f) \sim \varepsilon, \Delta T_{00}(t_f) \sim 1$. Отметим, что по $T_{00}(t_f)$ можно также добиться погрешности $O(\varepsilon)$ [13]. Поскольку $\delta V_{00} \sim 1, \delta T_{00} \sim \varepsilon^{-1}$, то относительные погрешности составляют величину порядка $O(\varepsilon)$. Далее, при оценивании погрешностей $\Delta C_{nm}(t_f), \Delta S_{nm}(t_f)$ следует иметь в виду два обстоятельства. Первое состоит в том, что интегрирование слагаемых типа $t \sin \lambda_{nm} t, t \cos \lambda_{nm} t$ в пределах от $t = 0$ до $t = t_f$ приводит к величинам порядка t_f . С учетом множителя $O(\varepsilon^2)$ эти слагаемые в указанных рядах при $n = 0$ или $m = 0$ ($n + m \geq 1$) будут величинами $O(\varepsilon)$. Вторая трудность состоит в учете "малых знаменателей", которые появляются при интегрировании слагаемых вида $\sin \lambda_{km} t \sin \lambda_{nm} t, \sin \lambda_{nl} t \sin \lambda_{nm} t$ и аналогичных, в которых стоят косинусы, см. (3.7), (3.8). По индексам k и l проводится суммирование, причем $k \neq n, l \neq m$. Малые знаменатели могут быть оценены следующим образом:

$$|\lambda_{km} - \lambda_{nm}| = (\pi/a)^2 |k-n|(k+n)(\lambda_{km} - \lambda_{nm})^{-1}, |k-n| \geq 1$$

$$|\lambda_{nl} - \lambda_{nm}| = (\pi/b)^2 |l-m|(l+m)(\lambda_{nl} + \lambda_{nm})^{-1}, |l-m| \geq 1$$

При сделанных предположениях о скорости убывания коэффициентов $\delta C_{nm}, \delta S_{nm}$ с помощью интегрального признака сходимости рядов (по k и l) можно установить, что

$$\Delta C_{nm}(t_f) \sim \varepsilon(nm)^{-2}, \Delta S_{nm}(t_f) \sim \varepsilon(nm)^{-2} \quad (3.12)$$

Наличие малых знаменателей не позволяет увеличить порядок малости погрешностей по n, m при увеличении скорости убывания $\delta C_{nm}, \delta S_{nm}$, т.е. класса гладкости начальных и конечных распределений $u^{0f}(x, y), v^{0f}(x, y)$. Из оценок (3.12) следует, что имеет место ε -близость решения по равномерной метрике и по метрике L_2 его производной

$$\max_{(x, y) \in \Pi} \left| z^{(1)}(t_f, x, y) - u^f(x, y) \right| \leq C\varepsilon, \| \dot{z}^{(1)}(t_f, x, y) - v^f(x, y) \|_{L_2} \leq C\varepsilon$$

Здесь $z^{(1)}(t, x, y)$ – решение краевой задачи для известных управляющих функций $F^{(1)}(t, y), P^{(1)}(t, x)$ первого приближения по ε .

Таким образом, построено решение задачи управления с относительной погрешностью ε по метрике W_2^1 в классе допустимых функций. Близость управления к оптимальному, т.е. по функционалу (3.2) требует отдельного изучения. Следует ожидать, что относительная погрешность будет составлять величину $O(\varepsilon^2)$, а абсолютная $O(\varepsilon^3)$, поскольку сопряженные переменные асимптотически малы, т.е. $\Phi_{nm}, \Psi_{nm} = O(\varepsilon)$, а погрешность их определения $O(\varepsilon^2)$. Поскольку первая вариация функционала в окрестности оптимального значения равна нулю, то добавка, обусловленная погрешностью $O(\varepsilon^2)$, будет величиной второго порядка, т.е. $\Delta I \sim O(\varepsilon^4)t_f = O(\varepsilon^3)$.

Таким образом, выражения (3.11), (3.10) определяют программное управление первого приближения по ε . Формальным приемом построения синтеза является переход от произвольных начальных распределений $u^0(x, y), v^0(x, y)$ к текущим $z(t, x, y), \dot{z}(t, x, y)$, в любой момент времени $t < t_f$. С этой целью в (3.11) полагаем $t = 0$ (точнее, $t \rightarrow t - t_0$, а затем $t_0 \rightarrow t$, т.е. $t \rightarrow 0$); коэффициенты $\Phi_{nm}^{(1)}, n, m \geq 0$ исчезают и

остаются только $\Psi_{nm}^{(1)}$. В выражениях (3.10) для $\Psi_{nm}^{(1)}$ полагается $t_f \rightarrow t_f - t$ (точнее, $t_f \rightarrow t_f - t_0$, а затем $t_0 \rightarrow t$, т.е. $t_f \rightarrow t_f - t$), а коэффициенты Фурье V_{nm}^0 начального распределения $v^0(x, y)$ заменяются на коэффициенты V_{nm} текущего распределения скорости $z(t, x, y) = \sum V_{kl}(t)Z_{kl}(x, y)$. Они могут быть вычислены обработкой измерений $z(t, x, y)$ в текущий момент времени $t < t_f$. Отметим, что управления F_m, P_n обладают особенностью типа $(t_f - t)^{-1}$ при $t \rightarrow t_f$. Поэтому в малой окрестности терминального многообразия $w^f(x, y), v^f(x, y)$ предпочтительно использовать другие законы обратных связей [15].

4. Примеры. Рассмотрим конкретные случаи начальных (1.3) и конечных (1.4) распределений, часто встречающиеся в приложениях. Соответствующие постановки задач управления приведены в разд. 1.

1°. Решение задачи гашения поперечных колебаний мембраны получим при помощи силовых воздействий вида (3.11), в которых полагаем для параметров $\Phi_{nm}^{(1)}, \Psi_{nm}^{(1)}$ (3.10), $n + m \geq 1$ величины $C_{nm}^f = 0, S_{nm}^f = 0$, т.е. $\delta C_{nm} = -U_{nm}^0, \delta S_{nm} = -\lambda_{nm}^{-1}V_{nm}^0$. Если условия движения мембраны как целого (центра масс) задаются заранее, то параметры $\Phi_{00}^{(1)}, \Psi_{00}^{(1)}$ имеют вид (3.10) при U_{00}^f, V_{00}^f фиксированных, случай а. При $t > t_f$ управления $F^{(1)}(t, y), P^{(1)}(t, x)$ полагаются равными нулю. В случае б, когда условия движения центра масс при $t = t_f$ несущественны, управления имеют (3.11) с параметрами $\Phi_{00}^{(1)} = \Psi_{00}^{(1)} = 0$, т.е. $\Lambda_{00}^{(1)}(t) \equiv 0$. Суммарные или интегральные значения сил $F^{(1)}(t, y), P^{(1)}(t, x)$ будут равными нулю. Как и выше, $F^{(1)} = P^{(1)} \equiv 0$ при $t > t_f$ (финитное управление [5]).

2°. Приближенное управление движением центра масс недеформированной мембраны $u^0 = \text{const}, v^0 = \text{const}$ ($U_{nm}^0 = V_{nm}^0 = 0, n + m \geq 1$) осуществляется посредством воздействий (3.11) в которых $\Lambda_{nm}^{(1)}(t) \equiv 0, n + m \geq 1$, т.е. $F_m^{(1)}(t) = P_n^{(1)}(t) \equiv 0$. Отличными от нуля при $0 \leq t \leq t_f$ будут функции $F_0^{(1)} = c_F^{-2}\xi_0\Lambda_{00}^{(1)}, P_0^{(1)} = c_P^{-2}\eta_0\Lambda_{00}^{(1)}$, в которых коэффициенты $\Phi_{00}^{(1)}, \Psi_{00}^{(1)}$ определены согласно (3.10). Эта постановка задачи является частным случаем рассмотренной выше (см. 1°, а), когда $U_{nm}^0 = V_{nm}^0 = 0, n + m \geq 1$. Ее можно также считать дополнительной к 1°, б, поскольку после гашения колебаний мембрана приводится в состояние заданного движения без их возбуждения (с рассматриваемой точностью).

3°. Возбуждение некоторых избранных мод из подмножества индексов $(n, m) \in \{N^* \times M^*\}$ собственных колебаний мембраны (или их подавление) с учетом или без учета движения центра масс осуществляется при помощи управляющих воздействий на основе выражений (3.10) следующим образом. Коэффициенты Фурье $U_{nm}^f, V_{nm}^f, n + m \geq 1$ конечных распределений $w^f(x, y), v^f(x, y)$ для $\delta C_{nm}, \delta S_{nm}$ (3.7) должны быть положены требуемым значениям, а сопряженные параметры $\Phi_{nm}^{(1)}, \Psi_{nm}^{(1)}, (n, m) \in \{N^* \times M^*\}$ вычислены согласно (3.10) и подставлены в функции $\Lambda_{nm}^{(1)}(t)$ (3.11). Остальные не представляющие интереса моды колебаний $T_{nm}(t), (n, m) \in \{N \times M\} \setminus \{N^* \times M^*\}$ останутся без изменений, если положить $\Phi_{nm}^{(1)} = \Psi_{nm}^{(1)} = 0$, т.е. $\Lambda_{nm}^{(1)}(t) \equiv 0$ для указанных индексов. Если требуется возбудить некоторые избранные моды из подмножества индексов $\{N^* \times M^*\}$, а другие из подмножества $\{N^{**} \times M^{**}\}$ (например, все остальные моды) погасить, то эта задача сводится к предыдущей ($U_{nm}^f = V_{nm}^f = 0$ для подмножества $\{N^{**} \times M^{**}\}$). Движение центра масс мембраны регулируется выбором коэффициентов $\Phi_{00}^{(1)}, \Psi_{00}^{(1)}$.

Таким образом, построенные в разд. 3 приближенные законы управления позволяют просто решать сложную проблему программного управления произвольными модами поперечных колебаний мембраны посредством распределенных по границе сил. Конечно, в реальных условиях можно осуществить управление сравнительно небольшим количеством низших мод колебаний, поскольку выработка высокочастотных воздействий представляет принципиальные трудности из-за наличия помех.

Отметим, что аналогичным образом на основе изложенного в разд. 3 подхода [13] может быть конструктивно решена задача управления поперечными движениями мембраны с произвольными геометрическими и физическими характеристиками (непрямоугольная форма, неоднородная плотность, неравномерное натяжение и т.п.).

Автор благодарит А.М. Шматкова за помощь при численном анализе частотных свойств мембраны и А.И. Овсеевича за обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-01368) и Международного научного фонда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
2. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 930 с.
3. Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983. 432 с.
4. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 334 с.
5. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
6. Акуленко Л.Д. Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия // ПММ. 1981. Т. 45, Вып. 6. С. 1095–1103.
7. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
8. Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975. 158 с.
9. Полтавский Л.Н. О финитной управляемости бесконечных систем маятников // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 6. С. 1318–1321.
10. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Устойчивость процесса управления стержнем при наличии продольных или крутильных деформаций // Изв. АН. Техн. кибернетика. 1991. № 6. С. 203–214.
11. Гринберг Г.А. Новый метод решения некоторых краевых задач для уравнений математической физики, допускающих разделение переменных // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1946. Т. 10. № 2. С. 141–168.
12. Lions J.L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Review. 1988. V. 30. № 1. P. 1 – 68.
13. Акуленко Л.Д. Конструктивное управление движением колебательных систем с дискретными и распределенными параметрами // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 596–607.
14. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1963. 410 с.
15. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.