

УДК 532.5:62-50

© 1995 г. Д.С. Завалицин, С.Т. Завалицин

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО РАСХОДУ ЭНЕРГИИ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

Рассматривается задача об оптимальных по расходу энергии перемещениях цилиндрического тела в вязкой среде при заданных времени и дальности перемещения. При помощи вариационной процедуры Эйлера–Лагранжа находятся необходимые условия оптимальности в виде дифференциальных уравнений для локальных участков оптимального движения цилиндра. Эти уравнения позволяют установить, что задача имеет два экстремальных решения. Первое из них соответствует движению цилиндра с постоянной скоростью и сохранением вертикальной ориентации. Второе решение предусматривает промежуточный этап движения цилиндра в горизонтальном положении. До и после этого этапа скорость центра масс цилиндра претерпевает скачки. Число таких скачков определяется величиной относительного удлинения цилиндра. В начальный и конечный момент угловая скорость цилиндра неограниченна, в то время как скорость его центра масс конечна. Вычислительный эксперимент показал, что если дальность перемещения не превосходит некоторого критического значения, то оптимальным является первое экстремальное решение. В противном случае оптимальным становится второе экстремальное решение. Это критическое значение зависит только от геометрических характеристик цилиндра.

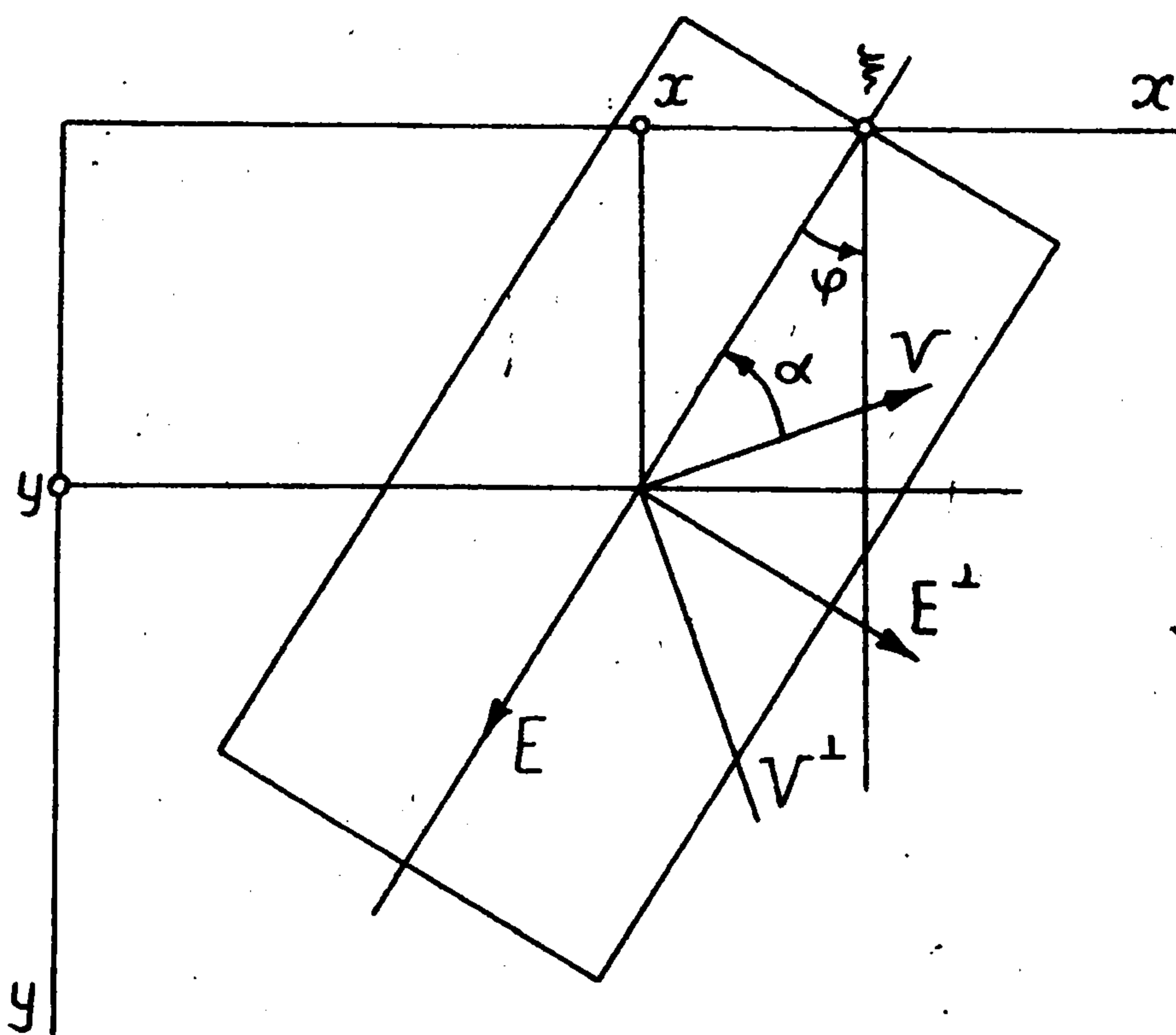
1. Постановка задачи. Рассматриваются перемещения однородного цилиндрического тела в вязкой среде, при которых верхняя точка его оси (называемая в дальнейшем для краткости точкой схвата) скользит по горизонтали. Время и расстояние перемещения заданы, начальное и конечное положение цилиндра вертикальное. Исследуется вопрос о том, как надо перемещать цилиндр, чтобы затраты энергии на преодоление силы лобового сопротивления оказались наименьшими. Такая задача близка к кругу задач динамической оптимизации, рассмотренных [1] в связи с исследованием энергетики подводной двуногой ходьбы.

Перейдем к математической постановке задачи. Как известно [2], на движущийся в вязкой среде цилиндр действует сила лобового сопротивления. Она приложена к центру масс и параллельна направлению скорости его перемещения. Эта сила включает компоненты, связанные с трением и давлением. Полное лобовое сопротивление [2, 3] рассчитывается по формуле

$$D = -C_D \rho S V V / 2 \quad (1.1)$$

Здесь ρ – плотность жидкости, V – скорость центра масс цилиндра, V – модуль скорости, S – площадь проекции цилиндра на плоскость, перпендикулярную вектору V , C_D – коэффициент лобового сопротивления.

Площадь S однозначно характеризуется углом атаки цилиндра α , т.е. углом между вектором, направленным из центра масс цилиндра в точку схвата, и вектором V (при этом направление отсчета против часовой стрелки считается положительным).



Фиг. 1

Далее введем ряд ограничений, при выполнении которых коэффициент лобового сопротивления имеет структуру, позволяющую аналитическое исследование обсуждаемой экстремальной задачи. Именно вязкая среда считается несжимаемой. Движение цилиндра происходит в объеме жидкости либо большой протяженности, либо заключенной внутри твердых границ. При выполнении этих условий коэффициент C_D является функцией только угла атаки и числа Рейнольдса [3]. Оптимальные законы перемещения цилиндра будем искать для интервалов чисел Рейнольдса, которые при фиксированном

угле атаки соответствуют практически постоянному значению коэффициента лобового сопротивления. Таким интервалом, в частности, является достаточно протяженная левая полуокрестность числа $Re = 2 \cdot 10^5$, если только цилиндр обладает достаточно большим относительным удлинением [3]. В описанной ситуации коэффициент C_D — функция только угла атаки.

При сделанных предположениях сила лобового сопротивления (1.1) с точностью до постоянного множителя характеризуется величиной $-C_D(\alpha)S(\alpha)VV$. Приступим к расчету этой величины. Положение цилиндра описывается обобщенными координатами ξ, φ (фиг. 1). Первая из них задает линейное смещение точки схвата, вторая — угловое положение цилиндра. При этом координаты центра масс цилиндра определяются формулами

$$x = \xi - l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi \quad (1.2)$$

где l — полудлина цилиндра. Дифференцируя по времени выражения (1.2), получаем координаты вектора скорости центра масс

$$\dot{x} = v - l\omega \cos \varphi, \quad \dot{y} = -l\omega \sin \varphi \quad (1.3)$$

где v — линейная скорость точки схвата, а ω — угловая скорость цилиндра.

Площадь S_b проекции боковой поверхности цилиндра на плоскость, перпендикулярную вектору скорости его центра масс, может быть вычислена как абсолютная величина скалярного произведения векторов bE и $V^{-1}V^\perp$, где векторы E и V^\perp имеют координаты

$$E = (-\sin \varphi, \cos \varphi), \quad V^\perp = (-\dot{y}, \dot{x}) \quad (1.4)$$

Постоянная $b = 2ld$, d — диаметр цилиндра. В результате с помощью (1.3), (1.4) можно получить формулу

$$S_b = bV^{-1}|p|, \quad (p = v \cos \varphi - l\omega) \quad (1.5)$$

Аналогично исходя из векторов aE и $V^{-1}V^\perp$, где в силу (1.4) вектор $E^\perp = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, число $a = d^2/4$, можно подсчитать площадь проекции торцов цилиндра на рас-

считываемую плоскость. Она окажется равной величине

$$S_a = aV^{-1}|q|, \quad (q = v \sin \varphi) \quad (1.6)$$

Складывая величины (1.5) и (1.6), получаем выражение для искомой площади $S(\alpha)$, и для силы лобового сопротивления имеем

$$D = -C_D \rho (b|p| + a|q|) V / 2 \quad (1.7)$$

Работа, затрачиваемая на преодоление силы сопротивления за промежуток времени dt , равна скалярному произведению векторов (1.7) и Vdt .

Отсюда выводится выражение для мощности

$$\dot{W} = C_D \rho V^2 (b|p| + a|q|) / 2 \quad (1.8)$$

где согласно (1.3)

$$V^2 = v^2 - 2v\omega \cos \varphi + (l\omega)^2 \quad (1.9)$$

Результатом проведенных выкладок является следующая задача динамической оптимизации.

Задача. Требуется найти функции $v(t)$, $\omega(t)$, минимизирующие терминальный функционал $A(t_k)$ при динамических ограничениях

$$\begin{aligned} \dot{A} &= C_D(\alpha) V^2 (b|p| + a|q|), \quad A(0) = 0 \\ \dot{\xi} &= v, \quad \xi(0) = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad \varphi(0) = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

и граничных условиях

$$\xi(t_k) = \xi_k, \quad \varphi(t_k) = 0 \quad (1.11)$$

Угол атаки подсчитывается по формуле

$$\alpha = (\pi/2) \operatorname{sign} \varphi - \operatorname{arctg} \left(\frac{l\omega \sin \varphi}{v - l\omega \cos \varphi} \right) \quad (1.12)$$

Таким образом, речь идет о поиске программ $v(\cdot)$, $\omega(\cdot)$ изменения линейной скорости точки схвата цилиндра и его угловой скорости, которые, во-первых, решали бы граничную задачу (1.11) и, во-вторых, соответствовали бы наименьшим энергетическим затратам $W(t_k)$.

2. Вывод уравнений для локальных участков оптимальных движений цилиндра. В этом разделе сначала исследуются необходимые условия оптимальности в сформулированной выше задаче динамической оптимизации. Затем выводятся дифференциальные уравнения для локальных участков оптимальных движений цилиндра. Эти уравнения в конечном счете позволят организовать вычислительный процесс для нахождения текущих оптимальных значений обобщенных скоростей v и ω .

Поставленная в разд. 1 задача решается с помощью вариационной процедуры Эйлера-Лагранжа [3]. Именно, составляется гамильтониан

$$H = \lambda_0 C_D V^2 (b|p| + a|q|) + \lambda_1 v + \lambda_2 \omega \quad (2.1)$$

и сопряженная система

$$\begin{aligned} -\dot{\lambda}_0 &= \partial H / \partial A = 0, \quad \lambda_0(t_k) = \partial \Phi / \partial A(t_k) \\ -\dot{\lambda}_1 &= \partial H / \partial \xi = 0, \quad \lambda_1(t_k) = \partial \Phi / \partial \xi(t_k) \\ -\dot{\lambda}_2 &= \partial H / \partial \varphi, \quad \lambda_2(t_k) = \partial \Phi / \partial \varphi(t_k) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Фигурирующий здесь функционал имеет вид

$$\Phi = A(t_k) + v_1(\xi(t_k) - \xi_k) + v_2\varphi(t_k) \quad (2.3)$$

где v_1, v_2 – постоянные, которые выбираются из условия обеспечения граничных условий (1.11).

Анализ сопряженной системы (2.2) и функционала (2.3) показывает, что $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = \text{const}$. Поэтому уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$\frac{\partial H}{\partial v} = \frac{\partial \dot{A}}{\partial v} + \lambda_1 = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \omega} = \frac{\partial \dot{A}}{\partial \omega} + \lambda_2 = 0 \quad (2.4)$$

где \dot{A} , как и раньше, – правая часть уравнения (1.10).

Система (2.4) позволяет найти множители Лагранжа λ_1, λ_2 . Подстановка найденного выражения для λ_1 во второе уравнение сопряженной системы (2.2) дает интеграл

$$\partial \dot{A} / \partial v = \text{const} = C_1 \quad (2.5)$$

Так как гамильтониан на оптимальной траектории сохраняет свое значение, то имеется и второй интеграл: $H = C_3$. Если в этом соотношении учесть равенства (2.4), то второй интеграл получит вид

$$H = \dot{A} - v \partial \dot{A} / \partial v - \omega \partial \dot{A} / \partial \omega = C_3 \quad (2.6)$$

Из формулы

$$v \partial \dot{A} / \partial v + \omega \partial \dot{A} / \partial \omega = 3\dot{A}$$

которая вытекает из теоремы Эйлера об однородных функциях, при учете соотношения (2.6) следует, что $H = -2\dot{A} = C_3$. Значит, мощность на оптимальных перемещениях сохраняет свое значение, т.е. $\dot{A} = C_2 = -C_3/2$.

Присоединяя к этому факту равенство (2.5), можно установить справедливость следующего утверждения.

Теорема. На оптимальных перемещениях цилиндра мощность и ее производная по скорости точки схвата сохраняют постоянные значения т.е.

$$\partial \dot{A} / \partial v = C_1, \quad \dot{A} = C_2 \quad (2.7)$$

На основании выражений (1.5), (1.6), (1.9), (1.10), (1.12) эта система определяет оптимальные обобщенные скорости как неявные функции углового положения цилиндра: $v = f(\varphi, C_1, C_2), \omega = g(\varphi, C_1, C_2)$. В результате оптимальная эволюция цилиндра обязана подчиняться системе уравнений

$$\dot{\xi} = f(\varphi, C_1, C_2), \quad \dot{\varphi} = g(\varphi, C_1, C_2) \quad (2.8)$$

Отметим трудности и в том числе вычислительного характера, возникающие при построении оптимальной фазовой траектории цилиндра ($\xi(t), v(t), \varphi(t), \omega(t)$). Первая из них очевидна: постоянные C_1 и C_2 – неизвестные величины, и для их определения необходимо дополнительное исследование. Вторая трудность связана с практической безнадежностью разработки регулярной процедуры решения системы (2.7) относительно обобщенных скоростей в условиях отсутствия априорной информации о допустимых областях их изменения.

Таким образом, актуален вопрос о замене обобщенных скоростей цилиндра другими характеристиками, для которых вторая из указанных трудностей оказалась бы преодолимой.

Ниже описывается один из возможных подходов к решению такой задачи. Именно уравнения (2.7) приводятся к виду, удобному для организации вычислительного

процесса для нахождения текущих оптимальных значений скоростей v и ω . Это достигается введением угла γ , определяемого из условий

$$p = V \cos \gamma, \quad q = V \sin \gamma \quad (2.9)$$

Запишем интегралы (2.7) для системы (2.8) оптимальных движений цилиндра в терминах V, γ . Для этого понадобится угол φ_m , определяемый соотношениями

$$b = N \cos \varphi_m, \quad a = N \sin \varphi_m \quad (2.10)$$

Теперь выражение для величины A преобразуется к форме

$$\dot{A} = s_p C_D N V^3 \cos(\gamma - s \varphi_m) = C_2 \quad (2.11)$$

Здесь $s_p = \text{sign} p, s_q = \text{sign} q, s = s_p s_q$.

Дифференцируя тождество $V^2 = p^2 + q^2$ по v и учитывая при этом формулы (1.5), (1.6) и определение угла γ (2.9), получаем соотношение, из которого находим выражение для производной

$$\partial V / \partial v = \cos(\gamma - \varphi) \quad (2.12)$$

Аналогично, дифференцируя тождество $\text{tg} \gamma = q/p$ по v , получаем

$$\partial \gamma / \partial \varphi = V^{-1} \sin(\varphi - \gamma) \quad (2.13)$$

Теперь дифференцирование величины A , определяемой согласно (2.11), по v с использованием формул (2.12), (2.13) приводит к выражению для другого интеграла системы (2.8) оптимальных движений цилиндра

$$\begin{aligned} \partial A / \partial v = s_p C_D N V^2 (2 \cos(\varphi - s \varphi_m) + \cos(2\gamma - \varphi - s \varphi_m)) + \\ + C_2 V^{-2} l \omega \sin \varphi (d \ln C_D / d \alpha) = C_1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Таким образом, интегралы (2.7) системы (2.8) преобразованы к виду (2.14), (2.11).

Введем функцию

$$T = T(V) = C_2 (N C_D)^{-1} V^{-3} \quad (2.15)$$

В соответствии с определениями (2.9), (2.10) интеграл (2.11) может быть записан в виде

$$\cos(\gamma - s \varphi_m) = s_p T(V) \quad (2.16)$$

Соотношение (2.16), рассматриваемое как уравнение относительно угловой величины γ , позволяет определить ее по формуле

$$\gamma = s \varphi_m + \sigma \arccos(s_p T) \quad (2.17)$$

Здесь σ – параметр, принимающий значения ± 1 . Из (2.17) и равенства

$$2\gamma - \varphi - s \varphi_m = 2(\gamma - s \varphi_m) - (\varphi - s \varphi_m)$$

вытекает соотношение

$$\cos(2\gamma - \varphi - s \varphi_m) = (2T^2 - 1) \cos(\varphi - s \varphi_m) + 2\sigma s_p T (1 - T^2)^{1/2} \sin(\varphi - s \varphi_m)$$

что позволяет записать второй интеграл (2.14) в виде

$$g(T, \varphi) = -s_p \left(\frac{N}{C_2 C_D^2} \right)^{1/3} l \omega \sin \varphi \left(\frac{dC_D}{d\alpha} \right) T^{4/3} \quad (2.18)$$

Здесь

$$g(T, \varphi) = (2T^2 + 1) \cos(\varphi - s \varphi_m) + 2\sigma s_p T (1 - T^2)^{1/2} \sin(\varphi - s \varphi_m) - 3RT^{2/3} \quad (2.19)$$

$$R = s_p C_1 C_2^{-2/3} (C_D N)^{-1/3} / 3$$

Это соотношение, рассматриваемое как уравнение относительно параметра T , в дальнейшем называется основным уравнением.

Итак, уравнениям оптимального движения цилиндра (2.8) придана форма

$$\dot{\xi} = V \frac{\sin \gamma}{\sin \varphi}, \quad \dot{\varphi} = l^{-1} V \frac{\sin(\gamma - \varphi)}{\sin \varphi} \quad (2.20)$$

где согласно (2.15) величина скорости центра масс цилиндра вычисляется по формуле

$$V = C_2^{1/3} C_D^{-1/3} N^{-1/3} T^{-1/3} \quad (2.21)$$

Угол γ определяется по формуле (2.17), а T – корень основного уравнения (2.18).

Порядок интегрирования этой системы, например методом Эйлера следующий. По заданному углу $\varphi(t_k)$ и скоростям $v(t_{k-1})$, $\omega(t_{k-1})$ находится корень T основного уравнения. Затем по формуле (2.17) подсчитывается угол γ , а по формуле (2.21) – скорость перемещения центра масс V . Полученная информация позволяет определить правые части системы (2.20), описывающей оптимальные перемещения цилиндра. После этого по вычислительной формуле метода Эйлера находятся обобщенные координаты цилиндра $\xi(t_{k+1})$, $\varphi(t_{k+1})$.

Следует отметить, что теперь точно известно, что корень основного уравнения (2.18) надо искать на промежутке $0 \leq T \leq 1$. Вся проблема, таким образом, свелась к определению постоянных C_1 , C_2 , σ . Этот вопрос рассматривается в разд. 3.

3. Построение экстремальных фазовых траекторий. *Первая экстремальная программа перемещения цилиндра в вязкой среде.* Анализ необходимых условий оптимальности (2.7) при учете (1.10), (1.5), (1.6), (1.9), (1.12) обнаруживает простую экстремальную траекторию. Она соответствует перемещению цилиндра с сохранением вертикальной ориентации и постоянной скорости $v = \xi_k/t_k$. В этом случае

$$C_1 = 3C_D(\pi/2)b(\xi_k/t_k)^2$$

$$C_2 = C_D(\pi/2)b(\xi_k/t_k)^3$$

Вторая экстремальная программа. Более детальное исследование необходимых условий оптимальности позволяет сделать вывод о том, что наряду с описанной экстремалью существует другая качественно отличная экстремаль, если только заданная дальность перемещения цилиндра достаточно велика. Она соответствует программе перемещения цилиндра, которая предусматривает этап его движения в горизонтальном положении.

Численный эксперимент показал, что структура второй экстремали совпадает со структурой экстремали, соответствующей значению коэффициента лобового сопротивления, подсчитываемого по формуле

$$C_D(\alpha) = (C_D(0) + C_D(\pi/2))/2 = C_D^0 \quad (3.1)$$

при условии, что цилиндр обладает достаточно большим относительным удлинением.

Это имеет место, например, для цилиндрических чехлов с тепловыделяющими сборками и бассейна выдержки ряда атомных электростанций. Относительное удлинение таких чехлов $2l/d \approx 2,4$. В указанном в разд. 1 конкретном диапазоне чисел Рейнольдса коэффициент лобового сопротивления цилиндра $C_D(\pi/2) \approx 0,69$ (при движении с сохранением вертикальной ориентации), и $C_D(0) \approx 0,84$ (при движении в горизонтальном положении [3]).

Следовательно, коэффициент $C_D(\alpha)$ может отличаться от значения $C_D^0 = 0,76$ не более чем на 11%. Такое обстоятельство и обеспечивает структурную аналогию обсуждаемых экстремалей. Преимущество экстремали, соответствующей (3.1), состоит в возможности ее

аналитического описания. Вот почему ниже ей отдается предпочтение, при этом результаты конкретных расчетов относятся к исходной ситуации.

Итак, обратимся к следующей вспомогательной граничной задаче. Рассмотрим систему (2.20) в случае, когда $C_D(\alpha) = C_D^0$ согласно формуле (3.1). Скорость центра масс цилиндра V и угол γ определяется по формулам (2.17) и (2.21), причем постоянная C_2 заменяется на $C_2(C_D^0)^{-1}$. Параметр T ($0 \leq T \leq 1$) – корень основного уравнения $g(T, \varphi) = 0$, в котором постоянная R определяется формулой (2.19), причем постоянные C_i заменяются на $C_i(C_D^0)^{-1}$, $i = 1, 2$.

Следует отметить, что параметр σ принимает одно из значений ± 1 .

Требуется так подобрать σ , C_1 , C_2 , чтобы решение задачи Коши $\xi(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$ системы (2.20) удовлетворяло граничным условиям (1.11).

Вновь обратимся к найденным в разд. 2 двум интегралам (2.7), которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned} V^2(b|p|+a|q|) &= C_2 \\ 2(pp_v + qq_v)(b|p|+a|q|) + V(s_pbp_v + s_qaq_v) &= C_1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

В начальный момент угол $\varphi = 0$. Значит, согласно (1.9), (1.5), (1.6) скорость перемещения центра масс цилиндра такова, что

$$V^2 = p^2 + q^2 = v^2 - 2l\omega v + (l\omega)^2 = p^2$$

откуда вытекает, что $q = 0$. Теперь интегралы (3.2) при (1.5), (1.6) запишем в виде $bV^3 = C_2$, $3bV^2 = s_pC_1$. Поэтому постоянные C_1 , C_2 оказываются связанными соотношением

$$C_1 = 3s_p b^{1/3} C_2^{2/3} \quad (3.3)$$

Отсюда согласно обозначению (2.19) $R = (\cos \varphi_m)^{1/3}$. Следовательно, основное уравнение имеет корень $T = \cos \varphi_m$. Это может быть только в случае, когда

$$\sigma s_q = -1 \quad (3.4)$$

Анализ первой и второй производных по обобщенной координате φ функции $T(\varphi)$, неявно задаваемой основным уравнением (2.18), устанавливает, что

$$s = s_p s_q = 1 \quad (3.5)$$

Итак, согласно (3.4), (3.5) основное уравнение на малых угловых смещениях цилиндра имеет вид

$$g(T, \varphi) = (2T^2 + 1)\cos(\varphi - \varphi_m) - 2T(1 - T^2)^{1/2} \sin(\varphi - \varphi_m) - 3\cos^{1/3} \varphi_m T^{2/3} = 0 \quad (3.6)$$

Угол γ подсчитывается по формуле $\gamma = \varphi_m - s_p \arccos(s_p T)$.

Так как $v(0) > 0$, то $s_q = 1$ и, следовательно, согласно (3.5) $s_p = 1$. Поэтому формула для угла γ принимает вид

$$\gamma = \varphi_m - \arccos T \quad (3.7)$$

Применяя правило Лопиталья к правым частям уравнения (2.20) и используя при этом (2.21), (3.6) и (3.7), можно прийти к следующему выводу: в окрестности начального момента перемещения цилиндра скорости v , ω неограничены. Однако при этом скорость движения центра масс цилиндра ограничена.

С ростом времени угол φ увеличивается и в некоторый момент достигает значения $\varphi_p = \varphi_m - \arccos(\cos^{1/3} \varphi_m)$. При этом оказывается, что корень основного уравнения

(3.6) $T(\varphi_p) = 1$ и, чтобы это уравнение имело в последующие моменты решение, необходимо положить $\sigma = 1$. Далее параметр $T(\varphi)$ начинает убывать, достигает наименьшего значения, затем растет и по достижению угла $2\varphi_m$ обращается в $\cos\varphi_m$. Необходимо отметить, что при этом угловая скорость цилиндра обращается в нуль.

Далее понадобится следующий итерационный процесс, в ходе которого возникает последовательность пар чисел $\{R_k, \varphi_{pk}\}$, $k = 2, 3, \dots$. Пусть $R_2 = -\sin\varphi_m$, $\varphi_{p2} = \pi/2$ и предположим, что пары с номерами $3, \dots, k$ построены. Тогда полагаем $R_{k+1} = -\chi(T_k)$, где T_k — наибольший корень уравнения

$$\frac{2T\chi_k(T)(2T^2-1)(1-\chi_k^2(T))^{1/2}}{(1-T^2)^{1/2}} + \frac{R_k}{T^{1/3}} = 0$$

из промежутка $[0, 1]$. Здесь принято обозначение

$$\chi_k(T) = -T^{2/3}(8T^2+1)^{-1}(3R_k(2T^2+1)+2T^{1/3}(1-T^2)^{1/2}(8T^2-9R_k^2T^{4/3}+1)^{1/2})$$

Угол $\varphi_{p, k+1} = \pi - \varphi_m - \arccos \chi_k(T_k)$.

Можно проверить, что $g(T_k, \varphi_{pk}) = \partial g / \partial T(T_k, \varphi_{pk}) = 0$, $k = 3, \dots$

Пусть n — номер, для которого $\varphi_{p, n+1} \leq 2\varphi_m < \varphi_{pn}$. Прохождение цилиндром угла $2\varphi_m$ сопровождается сменой знака параметра s_p , а также постоянной R . Теперь $s_p = -1$, $s_q = 1$, $R = R_n$. Указанное значение постоянной R поддерживается вплоть до разворота цилиндра на угол φ_{pn} . При этом параметр T с ростом угла φ увеличивается до 1. В угловом секторе $(\varphi_{pn}, \varphi_{p, n-1})$ постоянная $R = R_{n-1}$, параметр T с увеличением угла φ возрастает до 1 и т.д. Наконец, при прохождении цилиндром угла φ_{p3} постоянная R принимает значение $-\sin\varphi_m$, с которым он и достигает горизонтального положения.

После того, как цилиндр займет горизонтальное положение, наступает так называемый стационарный режим его движения с постоянной скоростью $v_s = (C_2/b)^{1/3}$. Это следует из первой формулы (3.2). Постоянная C_2 определяется из первого условия (1.11), которое записывается в виде $v_s t_s = \xi_k - 2\xi(\Delta)$. Здесь Δ — время, необходимое для разворота цилиндра из вертикального в горизонтальное положение, $t_s = t_k - 2\Delta$.

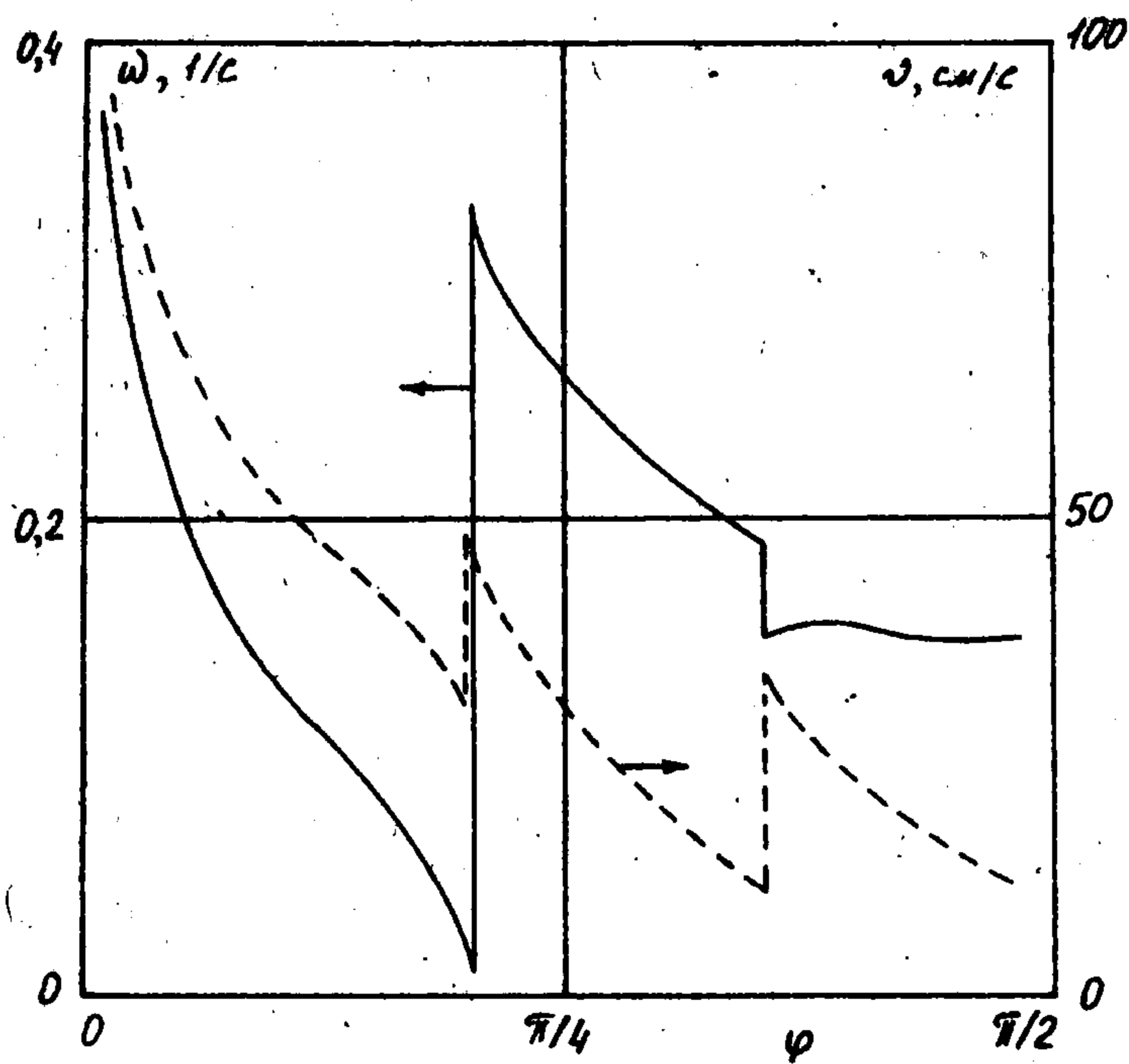
По истечении времени t_s начинается процесс возврата цилиндра в исходное вертикальное положение. Он осуществляется по изложенной выше программе, в которой параметры σ , s_p , s_q имеют знаки, противоположные тем, что соответствуют первому маневру.

Исследуемая задача не имеет других, помимо указанных, экстремальных решений. Остается выяснить, когда оптимальна та или другая экстремальная конструкция. Очевидно, что возможный энергетический выигрыш при движении цилиндра по второй экстремальной программе обязан промежуточному стационарному участку. На этом участке лобовое сопротивление цилиндра с достаточно большим относительным удлинением достигает своего наименьшего значения, что позволяет ему при той же мощности двигаться с большей скоростью.

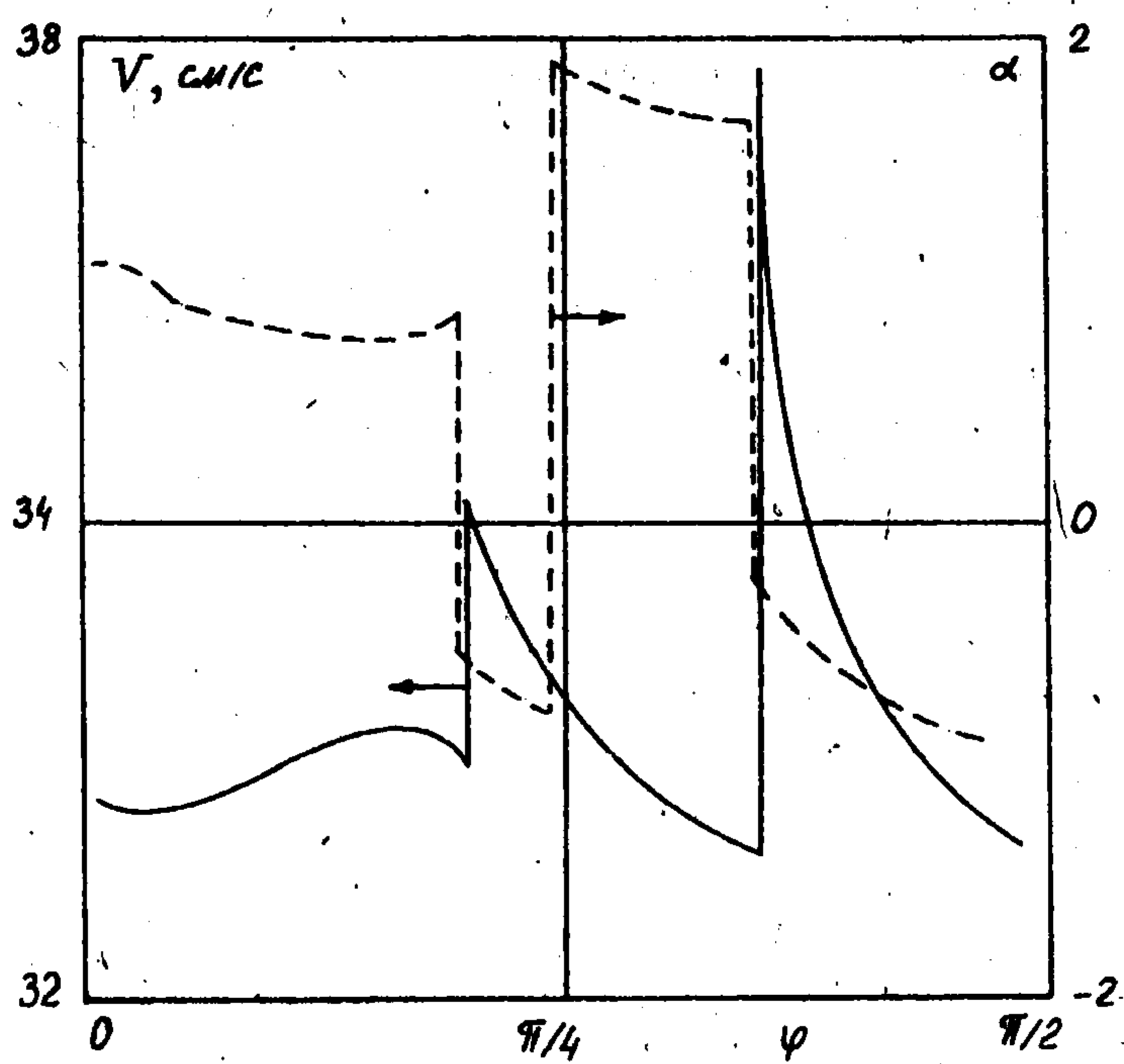
4. Вычислительный эксперимент. Для ответа на поставленный выше вопрос была разработана программа, моделирующая движения цилиндра по оптимальной фазовой траектории $(\xi^0(t), \varphi^0(t), v^0(t), \omega^0(t))$. Ниже излагаются результаты вычислительного эксперимента для исходных данных: $d = 151$ см, $l = 182,5$ см. Скорость перемещения цилиндра по первой экстремальной программе считалась равной 10 см/с.

Пусть Q — отношение энергетических затрат, связанных с реализацией движения цилиндра по второй и первой экстремальным программам.

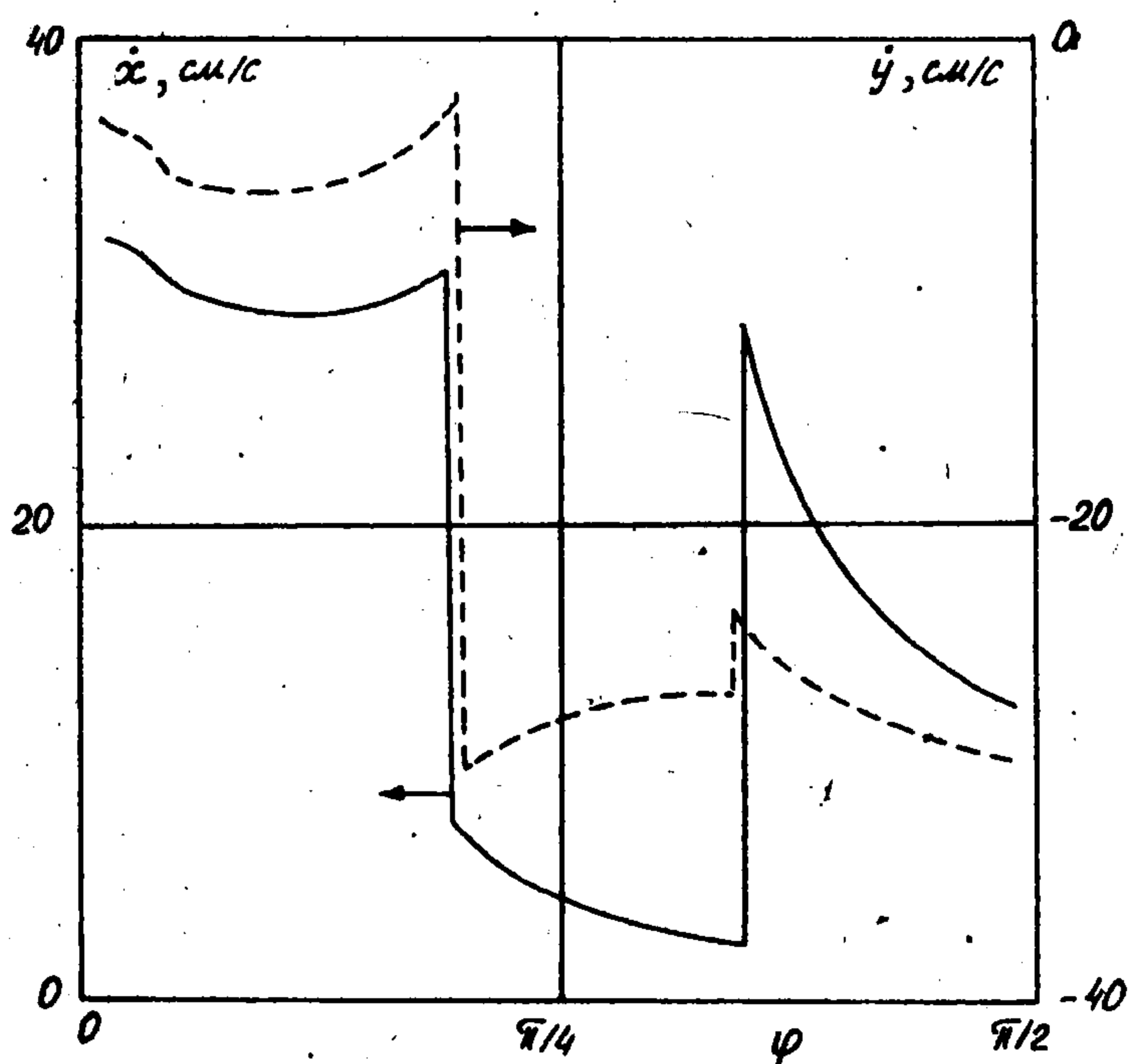
Установлено, что на пробегах, не превышающих 2900 см, первая экстремальная конструкция требует меньших энергетических затрат. При больших пробегах, наоборот, вторая экстремальная программа становится более выгодной. Соответствующие данные приведены ниже



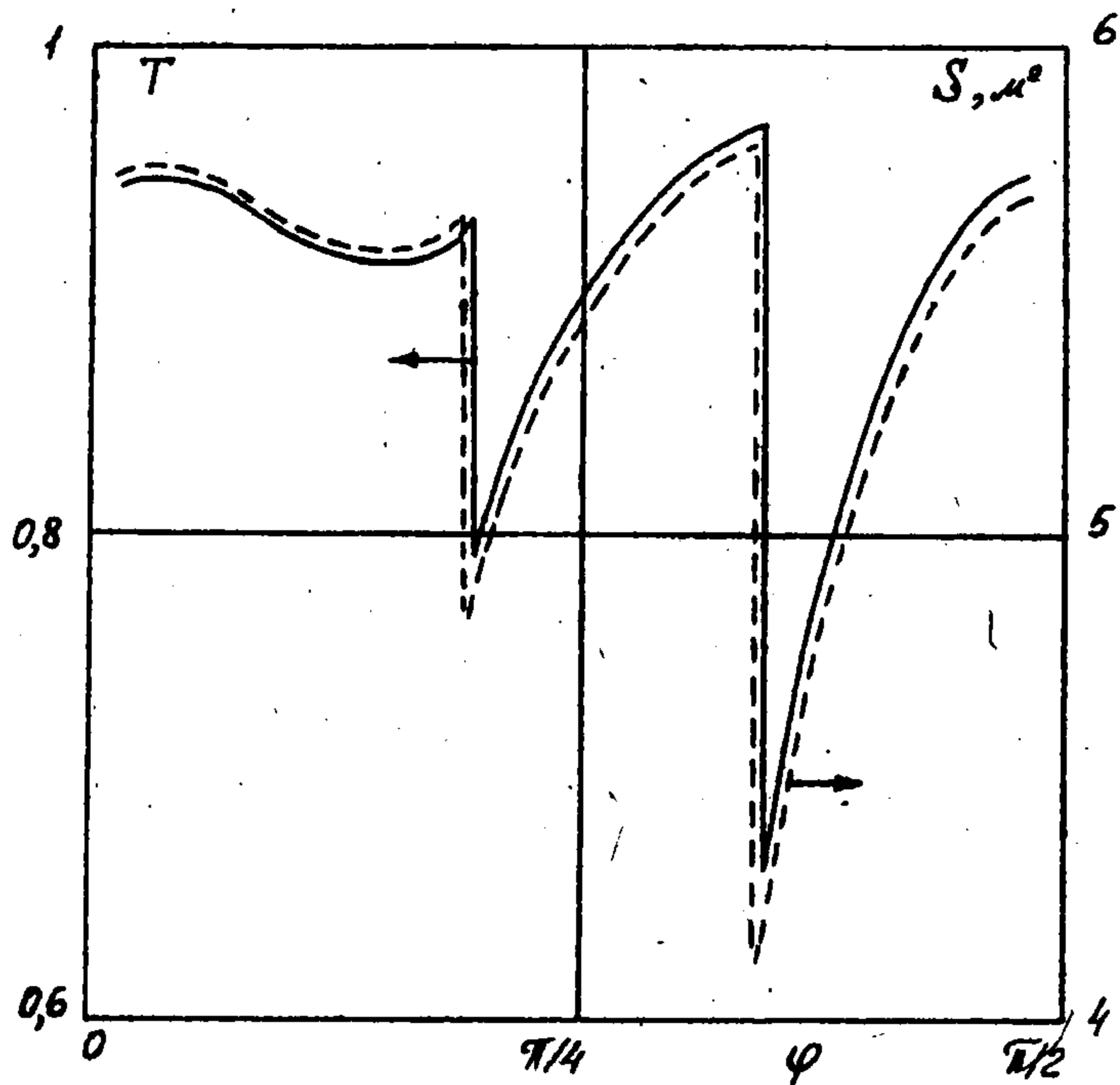
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ξ_k	2900	3240	4340	7850
Q	1	0,9	0,7	0,5

При неограниченном увеличении пробега коэффициент Q приближается к величине $aC_D(0)/(bC_D(\pi/2))$, пропорциональной отношению площади торца цилиндра к площади его сечения, проходящего через вертикальную ось.

Вычислительный эксперимент показал, что указанные здесь дальности не зависят от скорости движения цилиндра по первой экстремальной программе и, следовательно, определяются только его геометрией.

На фиг. 2–5 приведены графики изменения в функции углового положения цилиндра φ следующих характеристик его оптимального движения: угловая скорость ω и линейная скорость точки схвата v (фиг. 2), скорость центра масс V и угол атаки α (фиг. 3), составляющие вектор-скорости центра масс \dot{x}, \dot{y} (фиг. 4) и, наконец, графики изменения параметра T и площади проекции цилиндра на плоскость, перпендикулярную вектору скорости его центра масс (фиг. 5), на участке оптимального перемещения цилиндра из вертикального в горизонтальное положение.

Вторая экстремальная программа предусматривает этап движения цилиндра в горизонтальном положении. До и после этого этапа скорость центра масс цилиндра трижды

претерпевает скачок. Это происходит на углах $2\varphi_m, \varphi_{p3}, \pi/2$. Аналогично ведут себя обобщенные скорости цилиндра и его угол атаки. В начальный и конечный момент угловая скорость цилиндра, а также линейная скорость точки его схвата неограниченны, в то время как скорость центра масс цилиндра остается конечной.

Ясно, что реализация второй экстремальной программы требует приложение к цилиндру внешних сил и моментов, имеющих нерегулярный характер. Именно пусть таковыми, например, являются горизонтальная сила, приложенная к точке схвата, и действующий относительно этой точки момент. Тогда эти момент и сила неограничены в начале и конце процесса. До и после участка движения цилиндра в горизонтальном положении управляющий момент трижды оказывает на него импульсное воздействие в моменты времени

$$t_1, t_2, \Delta, \Delta + t_s, \Delta + t_s + t_1, \Delta + t_s + t_2 \quad (4.1)$$

причем моменты t_1 и t_2 определяются из условий $\varphi(t_1) = 2\varphi_m, \varphi(t_2) = \varphi_{p3}$. Аналогично ведет себя и сила, приложенная к точке схвата цилиндра.

Такое поведение управляющих воздействий на цилиндр определяет место рассмотренной задачи в классе задач динамической оптимизации – она является нерегулярной [4, 5] и решена в рамках подходов, разработанных в [6, 7]. Кроме этого, задача интересна тем, что представляет собой содержательную модель, в которой так называемое особое многообразие (2.20) имеет разрывную структуру, что и обуславливает наличие импульсных составляющих управляющих силы и момента в моменты времени (4.1). Именно эти импульсные воздействия на цилиндр и позволяют его фазовому изображению удержаться на особом многообразии при прохождении разрывов этого многообразия.

Кроме описанного эксперимента был проведен эксперимент, с целью выяснения диапазона изменения относительного удлинения цилиндра, для которого вторая экстремальная конструкция становится оптимальной, начиная с некоторой дальности ξ_k . Как установлено, указанное обстоятельство имеет место, если диаметр цилиндра не превосходит некоторого значения порядка $6,08l/\pi$, где $2l$ – его длина. При этом соответствующая дальность ξ_k неограниченно возрастает по мере того, как диаметр приближается к указанному значению.

Наконец, приведем данные о числе скачков скорости центра масс цилиндра при его укладке в горизонтальное положение в зависимости от относительного удлинения $2l/d$. Вычислительный эксперимент проводился для цилиндра с длиной $2l = 365$ см. Обнаружено существование постоянных $d_2 \approx 239,5$ см, $d_3 \approx 124$ см, $d_4 \approx 100$ см, ..., таких, что число обсуждаемых скачков два, если $d_2 < d$; три, если $d_3 < d < d_2$; четыре, если $d_4 < d < d_3$ и т.д.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16326).

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В.В. Двухногая ходьба. М.: Наука, 1984. 286 с.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
3. Дейли Дж., Харлеман Д. Механика жидкости. М.: Энергия, 1971. 480 с.
4. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
5. Красовский Н.Н. Теория оптимальных управляемых систем // Механика в СССР за 50 лет. Т. 1. М.: Наука, 1968. С. 179–244.
6. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985. 288 с.
7. Завалицин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991. 256 с.