УДК 62–50

© 1995 г. И.С. Раппопорт, А.А. Чикрий

О ГАРАНТИРОВАННОМ РЕЗУЛЬТАТЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С ТЕРМИНАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПЛАТЫ

Предлагается метод решения игровых задач управления с терминальной функцией платы, который заключается в систематическом использовании идей двойственности Фенхеля – Моро [1] применительно к общей схеме метода разрешающих функций [2]. Сущность предлагаемого метода заключается в том, что разрешающую функцию удается выразить через сопряженную к функции платы и, используя инвалютивность оператора сопряжения для выпуклой замкнутой функции, получить гарантированную оценку терминального значения функции платы, которая представляется через значение платы в начальный момент и интеграл от разрешающей функции.

Работа является развитием идей [2–4], примыкает к исследованиям [5–9] и указывает новые возможности приложения выпуклого анализа к решению игровых задач управления.

1. Постановка задачи и вспомогательные результаты. Пусть задан конфликтно-управляемый процесс

$$\dot{z} = Az + \varphi(u, v), \quad z \in R^n, \quad u \in U, \quad v \in V \tag{1.1}$$

где A – квадратная матрица порядка n, φ: $U \times V \to R^n$ – непрерывная по совокупности переменных функция, U, V – непустые компакты из евклидового пространства R^n.

Кроме динамики (1.1), задана функция платы $\sigma(z), \sigma: R^n \to R^1$, значение которой определяет момент окончания игры. Если $z(t) = z(z_0, u_t(\cdot), v_t(\cdot))$ – траектория системы (1.1), соответствующая начальному состоянию z_0 и выбранным управлениям игроков $u_t(\cdot) = \{u(\tau): u(\tau) \in U, \tau \in [0, t]\}, v_t(\cdot) = \{v(\tau): v(\tau) \in V, \tau \in [0, t]\}$, то игру будем считать оконченной в момент T, если

$$\sigma(z(T)) \leqslant 0 \tag{1.2}$$

Цель преследователя (u) – обеспечить окончание игры, цель убегающего (v) – противоположная.

Будем считать, что в процессе игры преследователь и убегающий в качестве управлений использует измеримые по Лебегу функции времени. Примем сторону преследователя и укажем достаточные условия на параметры процесса (1.1) и терминальную функцию платы $\sigma(z)$, которые обеспечивают окончание игры (1.1), (1.2). При этом найдем гарантированное время окончания на основании информации о начальном состоянии z_0 и предыстории управления убегающего $v_t(\cdot)$.

Будем полагать, что функция платы $\sigma(z)$ выпукла и удовлетворяет условию Липшица

$$|\sigma(z) - \sigma(x)| \leqslant 1\|z - x\|, \quad 1 \geqslant 0, \quad z, x \in R^n \tag{1.3}$$

Из выпуклого анализа известно [1], что функцию $\sigma(z)$ можно представить в виде

$$\sigma(z) = \max_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} [(p,z) - \sigma^*(p)] \tag{1.4}$$

где $\sigma^*(p), \sigma^*: R^n \to R^1$, – сопряженная с $\sigma(z)$ функция, определяемая равенством

$$\sigma^*(p) = \sup_{z \in R^n} [(p,z) - \sigma(z)], \quad p \in R^n \tag{1.5}$$

а dom σ^* – эффективнее множество [1] функции $\sigma^*(p)$, т.е.

$$\operatorname{dom} \sigma^* = \left\{ p \in R^n : \sigma^*(p) < +\infty \right\}.$$

При этом в силу соотношения (1.3) множество dom σ^* – компакт [1].

Потребуем дополнительно, чтобы функция платы $\sigma(z)$ была ограниченной снизу. Тогда при учете соотношения (1.5) имеем

$$-\sigma^*(p) = \inf_{z \in R^n} \sigma(z)$$

и, следовательно, множество dom σ^* содержит нуль.

Пусть L – линейная оболочка множества dom σ^* [1], а π – оператор ортогонального проектирования из R^n на подпространство L. Используя представление (1.4), можно убедиться в справедливости соотношения

$$\sigma(z) = \sigma(\pi z), \quad z \in R^n \tag{1.6}$$

2. Схема метода и основной результат. Введем многозначные отображения

$$W(t,v) = \bigcup_{u \in U} W(t,u,v), \quad W(t) = \bigcap_{v \in V} W(t,v)$$

$$(W(t,u,v) = \pi\Phi(t)\varphi(u,v), \quad \Phi(t) = \exp(tA), t \geqslant 0)$$

Предполагается, что параметры процесса (1.1) удовлетворяют условию Понтрягина [2,6], которое означает, что $W(t) \neq \varnothing$ для всех $t \geqslant 0$.

Так как отображение $W(t)$ полунепрерывно сверху [2], то оно содержит хотя бы один борелевский селектор [2, 7, 10]. Множество таких селекторов обозначим через Γ, зафиксируем один из них $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ и положим

$$\xi(t,z,\gamma(\cdot)) = \pi\Phi(t)z + \int_0^t \gamma(t)d\tau$$

Определим разрешающую функцию

$$\beta(t,\tau,z,v,\gamma(\cdot)) = \sup\left\{\beta \geqslant 0 : \min_{u \in U} \max_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left[\left(p, W(t-\tau,u,v) - \gamma(t-\tau)\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\beta\left[\left(p, \xi(t,z,\gamma(\cdot))\right) - \sigma^*(p)\right]\right] \leqslant 0\right\} \tag{2.1}$$

$$t \geqslant \tau \geqslant 0, \quad z \in R^n, \quad v \in V$$

Из условия Понтрягина непосредственно вытекает справедливость соотношения

$$\min_{u \in U} \max_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} (p, W(t-\tau,u,v) - \gamma(t-\tau)) \leqslant 0 \tag{2.2}$$

для всех $t \geqslant \tau \geqslant 0$, $v \in V$.

Следовательно, если выполнено условие Понтрягина, неравенство в соотношении (2.1) справедливо по крайней мере при нулевом значении разрешающей функции. Отметим также, что при $\sigma(\xi(t,z,\gamma(\cdot))) \leqslant 0$ функция $\beta(t,\tau,z,v,\gamma(\cdot)) = +\infty$ для всех $v \in V$,

$\tau \in [0, t]$. Если же для некоторых $t>0, z \in R^n, \gamma(\cdot) \in \Gamma, \sigma(\xi(t,z,\gamma(\cdot)))>0$, то разрешающая функция (2.1) принимает конечные значения и равномерно по $\tau \in [0, t]$, $v \in V$ ограничена.

Лемма 2.1. Пусть параметры процесса (1.1) удовлетворяют условию Понтрягина, а функция платы $\sigma(z)$ – условиям разд. 1. Тогда если для некоторых $t > 0$, $z \in R^n$ и $\gamma(\cdot) \in \Gamma, \sigma(\xi(t,z,\gamma(\cdot)))>0$, то функция

$$\beta(\tau, v) = \beta(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot)) \tag{2.3}$$

является борелевской по совокупности переменных (τ, v) на множестве $[0, t] \times V$.

Доказательство. Зафиксируем значения $t > 0$, $z \in R^n$ и $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, для которых $\sigma(\xi(t,z,\gamma(\cdot)))>0$. Из предположений о параметрах процесса (1.1) и функции платы $\sigma(z)$ следует, что функция $\psi(u,v,p,\tau,\gamma,\beta)=(p,W(t-\tau,u,v)-\gamma)+\beta[(p,\xi(t,z,\gamma(\cdot)))-\sigma^*(p)]$ непрерывна по совокупности переменных, а следовательно [8, 11], этим же свойством обладает и функция

$$\Psi(v,\tau,\gamma,\beta)=\min_{u\in U}\max_{p\in \operatorname{dom}\sigma^*}\psi(u,v,p,\tau,\gamma,\beta)$$

Тогда в силу [11] многозначное отображение

$$B(\tau,v,\gamma)=\{\beta\geqslant 0:\Psi(\tau,v,\gamma,\beta)\leqslant 0\}$$

полунепрерывно сверху, а его селектор

$$\beta(\tau,v,\gamma)=\sup\{\beta:\beta\in B(\tau,v,\gamma)\}$$

является борелевским по совокупности переменных. Поэтому согласно свойству суперпозиции двух борелевских функций [10] функция (2.3) является борелевской на множестве $[0, t] \times V$.

Рассмотрим функцию

$$T(z,\gamma(\cdot))=\inf\left\{t\geqslant 0:\int_0^t \inf_{v\in V}\beta(t,\tau,z,v,\gamma(\cdot))d\tau\geqslant 1\right\} \tag{2.4}$$

Если неравенство в фигурных скобках соотношения (2.4) не выполняется при всех $t \geqslant 0$, то будем полагать $T(z, \gamma(\cdot)) = +\infty$.

Заметим, что если $\sigma(\xi(t,z,\gamma(\cdot)))>0$, то функция

$$\inf_{v\in V}\beta(t,\tau,z,v,\gamma(\cdot))$$

измерима по τ, $\tau \in [0, t]$ [2], а так как она равномерно ограничена по τ, то и суммируема на интервале $[0, t]$. Если же $\sigma(\xi(t,z,\gamma(\cdot)))\leqslant 0$, то подынтегральное выражение в соотношении (2.4) для всех $\tau \in [0, t]$, $t > 0$, будет равно $+\infty$. Поэтому значение интеграла естественно положить равным $+\infty$, и, следовательно, неравенство в определении функции $T(z, \gamma(\cdot))$ выполнено автоматически.

Теорема 2.1. Пусть параметры процесса (1.1) удовлетворяют условию Понтрягина, а функция платы $\sigma(z)$ – условиям разд. 1, и для некоторых $z^0 \in R^n, \gamma^0(\cdot)\in\Gamma$ $T(z^0,\gamma^0(\cdot))<+\infty$. Тогда игру можно окончить в момент $T(z^0,\gamma^0(\cdot))$ из начального положения z^0.

Доказательство. Положим $T=T(z^0,\gamma^0(\cdot))$. Пусть $v(\tau)$, $v(\tau) \in V$, $\tau \in [0, T]$ – произвольная измеримая функция. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим случай $\sigma(\xi(T(z^0,\gamma^0(\cdot)))>0$. Введем контрольную функцию

$$h(t)=1-\int_0^t \beta(T,\tau,z^0,v(\tau),\gamma^0(\cdot))d\tau \tag{2.5}$$

Функция $h(t)$ непрерывна, не возрастает и $h(0)=1$. Из определения момента T следует, что существует такое $t_*=t_*(v(\cdot)), 0<t_*\leqslant T$, что $h(t_*)=0$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$U_1(\tau,v)=\Big\{u\in U\colon \max_{p\in\operatorname{dom}\sigma^*}\Big[\Big(p,W(T-\tau,u,v)-\gamma^0(T-\tau)\Big)+$$

$$+\beta(T,\tau,z^0,v,\gamma^0(\cdot))[(p,\xi(T,z^0,\gamma^0(\cdot)))-\sigma^*(p)]\Big]\leqslant 0\Big\}$$

$$0\leqslant\tau\leqslant t_*, v\in V$$

Оно борелевское по совокупности переменных.

Действительно, функция

$$\kappa(u,v,\tau,\gamma,\beta)=\max_{p\in\operatorname{dom}\sigma^*}\Big[\Big(p,W(T-\tau,u,v)-\gamma\Big)+\beta[(p,\xi(T,z^0,\gamma^0(\cdot)))-\sigma^*(p)]\Big]$$

непрерывна по совокупности переменных. Поэтому отображение

$$U(\tau,v,\gamma,\beta)=\Big\{u\in U\colon\kappa(u,v,\tau,\gamma,\beta)\leqslant 0\Big\}$$

полунепрерывно сверху [11], а следовательно, многозначное отображение

$$U_1(\tau,v)=U(\tau,v,\gamma(T-\tau),\beta(T,\tau,z^0,v,\gamma^0(\cdot)))$$

– борелевское по совокупности (τ, v), как суперпозиция полунепрерывного и борелевского отображения [10].

Тогда селектор

$$u_1(\tau,v)=\operatorname{lex}\min U_1(\tau,v),\quad 0\leqslant\tau\leqslant t_*,\quad v\in V$$

– борелевская по (τ, v) функция [2, 12].

Рассмотрим многозначное отображение

$$U_2(\tau,v)=\Big\{u\in U\colon W(T-\tau,u,v)-\gamma^0(T-\tau)=0\Big\},\quad t_*\leq\tau\leqslant T,\quad v\in V$$

Оно борелевское по совокупности (τ, v) [2, 7]. Тогда селектор

$$u_2(\tau,v)=\operatorname{lex}\min U_2(\tau,v),\quad t_*\leq\tau\leqslant T,\quad v\in V$$

– борелевская по (τ, v) функция [2, 12].

Управление преследователя на интервале $[0, T]$ положим равным

$$u(\tau)=\begin{cases}u_1(\tau,v(\tau)), & \tau\in[0,t_*)\\ u_2(\tau,v(\tau)), & \tau\in[t_*,T]\end{cases}$$

Функция $u(\tau)$ измерима [2, 10]

Рассмотрим теперь случай $\sigma(\xi(T,z^0,\gamma^0(\cdot)))\leqslant 0$. Управление преследователя на интервале $[0, T]$ положим равным

$$u(\tau)=u_2(\tau, v(\tau))$$

Эта функция также измерима [2, 10].

Выбранный таким образом закон управления преследователя обеспечивает при любых управлениях убегающего в момент T справедливость соотношения (1.2) на соответствующих траекториях процесса (1.1).

Покажем это. Из формулы Коши для процесса (1.1) следует представление

$$\pi z(T) = \xi(T, z^0, \gamma^0(\cdot)) + \int_0^T \left[W(T-\tau, u(\tau), v(\tau)) - \gamma^0(T-\tau) \right] d\tau \tag{2.6}$$

Пусть $\sigma(\xi(T, z^0, \gamma^0(\cdot))) \leqslant 0$. При учете закона управления преследователя имеем

$$\pi z(T) = \xi(T, z^0, \gamma^0(\cdot))$$

Поэтому из равенства (1.6) сразу следует справедливость соотношения (1.2).

Пусть теперь $\sigma(\xi(T, z^0, \gamma^0(\cdot))) > 0$. Соотношения (1.6), (2.6) дают

$$\sigma(z(T)) = \max_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left[(p, \xi(T, z^0, \gamma^0(\cdot))) - \sigma^*(p) + \int_0^T (p, W(T-\tau, u(\tau), v(\tau)) - \gamma^0(T-\tau)) d\tau \right]$$

Прибавив и вычтя в квадратных скобках величину

$$\left[(p, \xi(T, z^0, \gamma^0(\cdot))) - \sigma^*(p) \right] (I - h(t_*))$$

получим соотношение, из которого следует, что преследователь, выбирая управление согласно указанному закону, может гарантировать в момент T выполнение неравенства

$$\sigma(z(T)) \leqslant \sigma(\xi(T,\ z^0,\ \gamma^0(\cdot))) h(t_*) = 0$$

Следствие 2.1. Пусть параметры процесса (1.1) удовлетворяют условию Понтрягина, а функция платы $\sigma(z)$ – условиям разд. 1. Тогда, если преследователь использует законы управления, описанные при доказательстве теоремы, то при любом $T, 0 < T < T(z^0, \gamma^0(\cdot))$, справедлива оценка

$$\sup_{v(\cdot) \in \Omega_V} \sigma(z(T)) \leqslant \sigma(\xi(T, z^0, \gamma^0(\cdot))) \left[1 - \int_0^T \inf_{v \in V} \beta(T, \tau, z^0, v, \gamma^0(\cdot)) d\tau \right] \tag{2.7}$$

где Ω_V – множество всех измеримых функций, значение которых лежит в множестве V.

Доказательство аналогично доказательству теоремы при условии, что контрольную функцию следует задать в виде разности введенной выше функции $h(t)$ (2.5) и величины в квадратных скобках в соотношении (2.7).

3. Обобщенное расстояние. Пусть M^* – выпуклое множество, S – выпуклое ограниченное множество, причем внутренность этого множества содержит нуль. Тогда для всех $z \in R^n$ определена функция обобщенного расстояния [8]

$$d_S(z | M^*) = \inf\left\{ \rho \geqslant 0 : z \in M^* + \rho S \right\} = \sigma(z)$$

Можно показать, что эта функция удовлетворяет условиям разд. 1.

Вычислим функцию $\sigma^*(p), p \in R^n$, сопряженную с функцией, обобщенного расстояния $d_S(z | M^*)$.

Прежде всего заметим, что справедлива формула

$$d_S(z | M^*) = \inf\left\{ \mu_S(z - m) : m \in M^* \right\}$$

где $\mu_S(x) = \inf\{\mu \geqslant 0 : x \in \mu S\}$ – калибровочная функция множества S [1, 8]. Поэтому, исходя из определения операции инфимальной конволюции [1, 7], имеем

$$d_S(z | M^*) = (f \,\square\, g)(z) = \inf\left\{ f(z-y) + g(y) : y R^n \right\}$$

где $\square$ – знак операции инфимальной конволюции [1], $f(x) = \mu_S(x)$ – калибровочная функция множества $S, x \in R^n$, $g(y) = \delta(y | M^*)$ – индикаторная функция множества M^* [1].

На основании теоремы о двойственности операций сложения и инфимальной конволюции [1] получим формулу для сопряженной функции

$$\sigma^*(p) = d_S^*(|M^*)(p) = f^*(p) + g^*(p) = \begin{cases} C(M^*, p), & p \in S^0 \\ +\infty, & p \notin S^0 \end{cases}$$

где $S^0 = \{p \in R^n : (p,x) \leqslant 1,$ для каждого $x \in S\}$ – поляра множества S [1]; $f^*(p) = \delta(p|S^0)$ – индикаторная функция поляры множества S; $g^*(p) = C(M^*, p)$ – опорная функция множества M^*.

Здесь использован тот факт, что калибровочная функция множества S является опорной функцией поляры S^0 [1], а также двойственность индикаторной и опорной функций выпуклого замкнутого множества [1].

Таким образом, при учете соотношения (1.4) имеем

$$\operatorname{dom} d_S^*(|M^*)(p) = S^0$$

$$d_S(z|M^*) = \max_{p \in S^0}\left[(p,z) - C(M^*, p)\right]$$

Используя это представление, нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 3.1. Пусть X – компактное множество, M^* – выпуклое замкнутое множество, S – выпуклое ограниченное множество, внутренность которого содержит нуль. Тогда для того, чтобы $X \cap M^* \neq \phi$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\min_{z \in X} \max_{p \in S^0}\left[(p,z) - C(M^*, p)\right] \leqslant 0$$

где S^0 – поляра множества S.

Возьмем в качестве M^* цилиндрическое множество вида $M^* = M_0 + M$, где M_0 – линейное подпространство из R^n, M – выпуклый компакт из ортогонального дополнения L к M_0 в пространстве R^n.

Тогда из соотношения (2.1) получим выражение для разрешающей функции $\beta(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot))$ в виде

$$\sup\Big\{\beta \geqslant 0 : \min_{u \in U} \max_{p \in S^0 \cap L}\big[(p, W(t-\tau, u, v) - \gamma(t-\tau)) +$$

$$+\beta[(p, \xi(t, z, \gamma(\cdot))) - C(M, p)]\big] \leqslant 0\Big\}, \quad t \geqslant \tau \geqslant 0, \ z \in R^n, v \in V$$

где S – выпуклый компакт пространства R^n, внутренность которого содержит нуль этого пространства.

При учете леммы 3.1 можно показать, что эта функция совпадает с разрешающей функцией $\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot))$, введенной по формуле [2]:

$$\sup\{\alpha \geqslant 0 : [W(t-\tau, v) - \gamma(t-\tau)] \cap \alpha[M - \xi(t, z, \gamma(\cdot))] \neq \phi\}$$

Таким образом, установлена связь полученных результатов с общей схемой метода разрешающих функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
2. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка. 1992. 385 с.
3. *Чикрий А.А.* Функционалы Минковского в теории преследования // Докл. АН России. 1993. Т. 329. N 3. С. 281–284.

4. *Чикрий А.А., Раппопорт И.С.* Калибровочные функции в дифференциальных играх // Автоматика. 1992. N 6. С. 9–16.
5. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. Т. 2. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 575 с.
7. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
8. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
9. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988. 510 с.
10. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966. 594 с.
11. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979. 278 с.
12. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.

Киев

Поступила в редакцию
18.VII.1994