УДК 62–50

© 1995 г. Г.Г. Гарнышева, А.И. Субботин

СУБОПТИМАЛЬНЫЕ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ В ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Рассматривается дифференциальная игра, в которой функционалом платы является время до попадания фазовой точки на целевое множество. Предлагается конструкция ε-оптимальных стратегий, подобная известному построению в случае, когда функция цены всюду дифференцируема. Отличие состоит в том, что градиент негладкой и разрывной функции цены заменяется некоторым квазиградиентом.

Работа продолжает исследования универсальных стратегий [1–4]. Используются некоторые факты из теории обобщенных решений уравнений с частными производными первого порядка [5–7] и негладкого анализа [8]. Вводится квазиградиент функции цены, который заменяет градиент в известной конструкции оптимальных стратегий в случае, когда функция цены всюду дифференцируема. Аналогичное построение для дифференциальной игры с фиксированным моментом окончания и непрерывной функцией цены рассматривалось в [9].

1. Пусть движение управляемой системы описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t), p(t), q(t)), \quad t \geqslant 0 \tag{1.1}$$

Здесь $x(t) \in R^n$ – фазовое состояние системы в момент времени t; $p(t) \in P$ и $q(t) \in Q$ – управления первого и второго игроков соответственно; $P \subset R^l$ и $Q \subset R^m$ – компактные множества. Предполагается, что функция $f(x, p, q)$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица по x

$$\|f(x+y, p, q) - f(x, p, q)\| \leqslant \lambda \|y\| \tag{1.2}$$

для всех $(x, p, q) \in R^n \times P \times Q$. Предполагается также, что

$$\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\langle s, f(x,p,q)\rangle = \max_{q\in Q}\min_{p\in P}\langle s, f(x,p,q)\rangle = H(x,s) \tag{1.3}$$

для любых $s \in R^n$ и $x \in R^n$.

В фазовом пространстве задано замкнутое множество $M \subset R^n$. Первый игрок стремится обеспечить попадание фазовой точки $x(t)$ на M за наименьшее возможное время. Второй игрок, напротив, стремится либо исключить встречу с M, либо максимизировать время до встречи. Известны различные варианты строгой постановки этих задач и доказательств существования равновесия в этой игре. В данной работе будем использовать формализацию позиционной дифференциальной игры [10].

Позиционными стратегиями первого и второго игроков называются произвольные функции

$$\mathbf{R}^n \ni x \mapsto U(x) \in P, \ \mathbf{R}^n \ni x \mapsto V(x) \in Q$$

соответственно. Пусть первый игрок выбрал некоторую стратегию U и разбиение

$$\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots\}, \quad \lim_{i\to\infty} t_i = \infty$$

Для заданной начальной точки $x_0 \in \mathbf{R}^n$ символом $\mathbf{X}(x_0, U, \Delta)$ обозначим множество траекторий $x(\cdot)$: $[0, \infty) \mapsto \mathbf{R}^n$ дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in \operatorname{co}\{f(x(t), U(x(t_i)), q) : q \in Q\}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad t_i \in \Delta, \quad x(0) = x_0$$

Аналогично, пусть стратегия V и разбиение Δ выбраны вторым игроком. Символом $\mathbf{X}(x_0, V, \Delta)$ обозначим множество решений дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in \operatorname{co}\{f(x(t), \ p, V(x(t_i))) : p \in P\}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad t_i \in \Delta, \quad x(0) = x_0$$

Введем функционал

$$\tau_\varepsilon(x(\cdot)) := \min\{t \in \mathbf{R}^+ : x(t) \in M^\varepsilon\}$$

если $x(t) \notin M^\varepsilon$ при всех $t \in \mathbf{R}^+$, то полагаем $\tau_\varepsilon(x(\cdot)) = \infty$. Здесь ε – положительное число, M^ε – ε-окрестность целевого множества M, т.е.

$$M^\varepsilon := \{x + y : x \in M, \ \|y\| \leqslant \varepsilon\}$$

Ниже используется также обозначение

$$\operatorname{diam}(\Delta) := \sup_i (t_{i+1} - t_1) \text{ при } i = 0, 1, 2 \ldots$$

Известно (см., например, [10]), что для любой начальной позиции $x_0 \in R^n$ существует цена рассматриваемой игры $\operatorname{Val}(x_0) \in [0, \infty]$, т.е. справедливо следующее:

1) для любых чисел $\theta > \operatorname{Val}(x_0)$ и $\varepsilon > 0$ существует стратегия U первого игрока, такая, что

$$\lim_{\operatorname{diam}(\Delta)\downarrow 0} \sup \sup\{\tau_\varepsilon(x(\cdot)) : x(\cdot) \in X(x_0, U, \Delta)\} \leqslant \theta$$

2) для любого числа $\theta < \operatorname{Val}(x_0)$ существует число $\varepsilon > 0$ и стратегия V второго игрока, такие, что

$$\lim_{\operatorname{diam}(\Delta)\downarrow 0} \inf \inf\{\tau_\varepsilon(x(\cdot)) : x(\cdot) \in X(x_0, V, \Delta)\} \geqslant \theta$$

Существование цены было доказано [10] для дифференциальной игры в классе стратегий $U(t, x)$, $V(t, x)$, которые зависят от переменной t как в случае управляемой системы $\dot{x} = f(t, x, p, q)$, так и в случае стационарной системы вида (1.1). Стратегии, рассматриваемой в данной работе, не зависят от t. Отметим также, что построенные ниже стратегии обладают свойством универсальности, т.е. они гарантируют ε-оптимальные решения из любого начального положения из ограниченной области.

2. Рассмотрим краевую задачу для уравнений Айзекса–Беллмана

$$H(x, D\upsilon(x)) + 1 = 0, \quad x \in G \tag{2.1}$$

$$\upsilon(x) = 0, \quad x \in \partial G \tag{2.2}$$

где $H(x, s)$ – гамильтониан, определенный равенством (1.3); $G = \mathrm{R}^n \setminus M$ – открытая область, $\overline{G}$ – замыкание G, ∂G – граница G.

Напомним следующий результат [11]. Пусть непрерывная функция $\upsilon : \overline{G} \mapsto R^+$ удовлетворяет краевому условию (2.2), непрерывно-дифференцируема в области G и удовлетворяет в этой области уравнению (2.1). Тогда функция υ совпадает с функцией цены рассматриваемой дифференциальной игры.

Более того, в данном случае оптимальные стратегии игроков U_0, V_0 можно построить следующим образом. Введем экстремальные предстратегии

$$p_0(x, s) \in \operatorname{Arg}\min_{p \in P}\left[\max_{q \in Q}\langle s, f(x, p, q)\rangle\right] \tag{2.3}$$

$$q_0(x,s) \in \operatorname{Arg}\max_{q\in Q}\left[\min_{p\in P}\langle s, f(x,p,q)\rangle\right] \qquad (2.4)$$

Определим стратегии U_0 и V_0 как суперпозиции предстратегий и градиента $\mathrm{D}\upsilon$, т.е.

$$U_0(x) := p_0(x, \mathrm{D}\upsilon(x)),\quad V_0(x) := q_0(x, \mathrm{D}\upsilon(x)) \qquad (2.5)$$

Предположение о гладкости функции цены выполняется в исключительно редких примерах. Функция цены может быть разрывной и может принимать несобственное значение $+\infty$. Однако, как показано ниже, в общем случае можно определить ε-оптимальные стратегии соотношениями вида (2.5), в которых вместо градиента $\mathrm{D}\upsilon(x)$ используется некоторый квазиградиент. В предлагаемой конструкции используются результаты, полученные [5, 7] для ограниченных решений задач типа Дирихле для уравнений с частными производными первого порядка.

Рассмотрим преобразование [12]

$$[0,\infty] \ni \upsilon \mapsto u(\upsilon) = 1 \pm e^{\pm\upsilon} \in [0,1]$$

Очевидно, что функция $\upsilon(x)$ удовлетворяет равенству (2.1) тогда и только тогда, когда функция $u(x) = 1 - \exp(-\upsilon(x))$ удовлетворяет равенству

$$H(x, \mathrm{D}u(x)) + 1 - u(x) = 0 \qquad (2.6)$$

Согласно [7] существует и единственно обобщенное (минимаксное) решение $u\colon \overline{G} \mapsto [0,1]$ уравнения (2.6), удовлетворяющее краевому условию

$$u(x) = 0,\quad x \in \partial G \qquad (2.7)$$

Отметим, что минимаксное решение u полунепрерывно снизу и обладает следующим свойством.

Пусть $\eta \in G$, $q_* \in Q$, $\tau > 0$. Пусть $Y(\eta, q_*)$ – множество траекторий $y(\cdot)$: $[0, \tau] \mapsto R^n$ дифференциального включения

$$\dot y(t) \in \operatorname{co}\{f(y(t), p, q_*) \colon p \in P\} \qquad (2.8)$$

с начальным условием $y(0) = \eta$. Предположим, что $y(t) \in G$ для всех $y(\cdot) \in Y(\eta, q_*)$ и всех $t \in [0, \tau]$. Тогда существует траектория $y(\cdot) \in Y(\eta, q_*)$, такая, что

$$(u(\eta) - 1)e^{\tau} \geqslant u(y(\tau)) - 1 \qquad (2.9)$$

Это свойство эквивалентно условию u-стабильности функции υ [10] и определению верхнего решения уравнения (2.6).

Заметим, что функция цены связана с минимаксным решением задачи (2.6), (2.7) равенством

$$\operatorname{Val}(x) = \pm\ln(1 \pm u(x)),\quad x \in \overline{G} \qquad (2.10)$$

Субоптимальные стратегии игроков можно определить как суперпозиции предстратегий и квазиградиентов минимаксного решения. Как следствие этих построений можно получить существование цены и равенство (2.10).

3. Опишем построение ε-оптимальной стратегии первого игрока. Пусть u – минимаксное решение задачи (2.6), (2.7). Положим

$$u_\alpha(x) := \min_{y\in\overline{G}}[u(y) + w_\alpha(x,y)] \qquad (3.1)$$

Здесь

$$w_\alpha(x,y) = \frac{\left(\alpha^{2/\nu} + \|x-y\|^2\right)^\nu}{\alpha},\quad \nu = \frac{1}{2+2\lambda},\quad 0 < \alpha < \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{\lambda(1+\lambda)}\right\} \qquad (3.2)$$

где λ – постоянная в условии Липшица (1.2). Отметим, что функция w_α удовлетворяет неравенству

$$H(x, \mathrm{D}_x w_\alpha(x,y)) - H(y, -\mathrm{D}_y w_\alpha(x,y)) - w_\alpha(x,y) \leqslant 0 \tag{3.3}$$

для любых $(x, y) \in G \times G$, таких, что $\|x - y\| \leqslant 1$. Функции указанного вида используются для доказательства теорем единственности в теории обобщенных решений уравнений с частными производными первого порядка (см., например, [7, 6]).

Выберем произвольно точку

$$y_\alpha(x) \in \operatorname{Arg}\min_{y \in G}[u(y) + w_\alpha(x,y)] \tag{3.4}$$

Такая точка существует, поскольку функция u полунепрерывна снизу.

Можно показать, что

$$u_\alpha(x) \leqslant u(x) + \alpha, \quad \|x - y_\alpha(x)\| \leqslant 2\alpha \tag{3.5}$$

Положим

$$U_\alpha(x) = p_0(x, s_\alpha(x)) \tag{3.6}$$

Здесь p_0 – экстремальная предстратегия, определенная условием (2.3),

$$s_\alpha(x) := (\mathrm{D}_x w_\alpha)(x, y_\alpha(x)) = -(\mathrm{D}_y w_\alpha)(x, y_\alpha(x)) \tag{3.7}$$

Если функция u непрерывно-дифференцируема в окрестности точки $x \in G$, то из (3.4) следует, что

$$\mathrm{D}u(y_\alpha(x)) + (D_y w_\alpha)(x, y_\alpha(x)) = 0$$

Согласно (3.7) и (3.5) получаем $s_\alpha(x) \to \mathrm{D}u(x)$ при $\alpha \to 0$. Поэтому $s_\alpha(x)$ можно назвать квазиградиентом функции u в точке x. Если принять во внимание равенство (2.10), получаем $U_\alpha(x) = p_0(x, s_\alpha^b(x))$, где $s_\alpha^b(x) = s_\alpha(x)(1 - u(x))^{-1}$ является в указанном смысле квазиградиентом функции цены $\mathrm{Val}(x)$.

Теорема 1. Пусть $u: \overline{G} \mapsto [0, 1]$ – минимаксное решение задачи (2.6), (2.7). Пусть D – компактное подмножество области G. Предположим, что

$$\theta^0 = \sup_{x \in D}[-\ln(1 - u(x))] < \infty$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать параметр $\alpha > 0$ так, что для любой точки $x_0 \in D$ справедливо неравенство

$$\lim_{\operatorname{diam}(\Delta)\downarrow 0} \sup \sup\left\{\tau_\varepsilon(x(\cdot)) : x(\cdot) \in X(x_0, U_\alpha, \Delta)\right\} \leqslant -\ln(1 - u(x_0)) + \varepsilon \tag{3.8}$$

где U_α – стратегия вида (3.6).

Доказательство. Обозначим через $X(x_0)$ совокупность траекторий $x(\cdot): R^+ \mapsto [0, \infty)$ дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in \mathrm{co}\{f(x(t), p, q) : p \in P,\ q \in Q\}$$

с начальным условием $x(0) = x_0$. Положим

$$K := \{x(t) \in R^n : x(\cdot) \in X(x_0),\ t \in [0, \theta^0 + \varepsilon],\ x_0 \in D\}$$

$$m := \sup\{\|f(x + h, p, q)\| : x \in K,\ p \in P,\ q \in Q,\ \|h\| \leqslant 1\} \tag{3.9}$$

Выберем числа $\alpha > 0$ и $\delta_0 > 0$ так, чтобы выполнялись оценки

$$3\alpha < \varepsilon, \quad \delta_0 m \leqslant \alpha, \quad 3\alpha < 1 \tag{3.10}$$

Выберем произвольно $x_0 \in D$.

Ниже будет доказано следующее положение. Пусть $x(\cdot) \in X(x_0, U_\alpha, \Delta)$, $t_i \in \Delta, t_i < \theta = -\ln(1 - u(x_0)) + \varepsilon$, и пусть $\operatorname{dist}(x(t_i); M) > 3\alpha$. Тогда для любого $\tau \in$

$\in [t_i, t_{i+1}] \cap [0, \theta]$ справедливо неравенство

$$u_\alpha(x(\tau)) \leqslant 1 - [1 - u_\alpha(x(t_i))]e^{\tau - t_i} + (\tau - t_i)e^{\tau - t_i} h(\alpha, \delta) \tag{3.11}$$

Здесь $\delta = \mathrm{diam}(\Delta)$, $\lim_{\alpha \to 0} \lim_{\delta \to 0} h(\alpha, \delta) = 0$. Величина $h(\alpha, \delta)$ зависит только от α, δ и не зависит от выбора точки $x_0 \in D$ и траектории $x(\cdot) \in X(x_0, U_\alpha, \Delta)$.

В дополнение к (3.10) предполагаем, что параметры α и δ выбраны так, что выполняется оценка

$$e^\theta [\alpha + \theta h(\alpha, \delta)] < e^\varepsilon - 1 \tag{3.12}$$

Пусть выполнены указанные оценки. Для $x(\cdot) \in X(x_0, U_\alpha, \Delta)$ рассмотрим два случая: 1) существует момент времени $t_i \in \Delta$, такой, что $t_i < \theta$ и dist $(x(t_i); M) \leqslant 3\alpha$; 2) противоположное неравенство $\mathrm{dist}(x(t_i); M) > 3\alpha$ выполняется при всех $t_i \in \Delta$, удовлетворяющих оценке $t_i < \theta$.

Поскольку $3\alpha \leqslant \varepsilon$, то в случае 1 имеем

$$\tau_\varepsilon(x(\cdot)) \leqslant t_i \leqslant \theta = -\ln(1 - u(x_0)) + \varepsilon \tag{3.13}$$

Рассмотрим случай 2. Из рекуррентных оценок (3.11) получаем

$$u_\alpha(x(\theta)) \leqslant 1 - [1 - u_\alpha(x_0)]e^\theta + \theta e^\theta h(\alpha, \delta)$$

Заметим, что $e^\theta = e^\varepsilon (1 - u(x_0))^{-1}$. Согласно (3.5) $u_\alpha(x_0) \leqslant u(x_0) + \alpha$. Следовательно,

$$u_\alpha(x(\theta)) \leqslant 1 - e^\varepsilon + e^\theta [\alpha + \theta h(\alpha, \delta)] < 0$$

Последнее неравенство следует из (3.12). Таким образом, в случае 2 приходим к неравенству $u_\alpha(x(\theta)) < 0$. С другой стороны, согласно (3.1) имеем $u_\alpha(x(\theta)) \geqslant 0$. Получаем противоречие, которое доказывает, что случай 2 невозможен.

Итак, если справедлива оценка (3.11), то для стратегии U_α справедлива оценка (3.8). Поэтому доказательство теоремы сводится к проверке оценки (3.11).

Введем обозначения

$$\xi = x(t_i),\ \ \eta = y_\alpha(\xi),\ \ s_* = s_\alpha(\xi),\ \ p^* = U_\alpha(\xi) = p_0(\xi, s_*),\ \ q_* = q_0(\eta, s_*) \tag{3.14}$$

(напомним, что p_0 и q_0 – предстратегии, определенные согласно (2.3), (2.4)). Поскольку функции $f(x, p, q)$ и $U_\alpha(x)$ не зависят от t, можно положить $t_i = 0$. Определим вектор

$$f^* = \frac{x(\tau) - \xi}{\tau} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \dot{x}(t)dt,\ \ \dot{x}(t) \in \mathrm{co}\{f(x(t), p^*, q) : q \in Q\} \tag{3.15}$$

Требуется доказать неравенство

$$1 - u_\alpha(\xi) \leqslant e^{-\tau}[1 - u_\alpha(\xi + f^* \tau)] + \tau h(\alpha, \tau) \tag{3.16}$$

Из неравенства dist $(\xi; M) > 3\alpha$ и второй оценки (3.5) следует, что dist $(\eta, M) > \alpha$. Напомним, что $\delta_0 m \leqslant \alpha$. Из этой оценки и определения числа m (3.9) заключаем, что $y(t) \notin M$ для любой траектории дифференциального включения (2.8) и для любого $t \in [0, \tau]$. Из (2.9) следует

$$1 - u(\eta) \leqslant e^{-\tau}[1 - u(\eta + f_* \tau)] \tag{3.17}$$

Здесь

$$f_* = \frac{y(\tau) - \eta}{\tau} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \dot{y}(t)dt,\ \ \dot{y}(t) \in \mathrm{co}\{f(y(t), p, q_*) : p \in P\} \tag{3.18}$$

Напомним, что $\eta = y_\alpha(\xi)$, поэтому из (3.1), (3.4) имеем $u_\alpha(\xi) = u(\eta) + w_\alpha(\xi, \eta)$. Объединяя эту оценку с неравенством (3.17), получаем

$$1 - u_\alpha(\xi) \leqslant e^{-\tau}[1 - u(\eta + f_* \tau)] - w_\alpha(\xi, \eta)$$

Добавим в правую часть этого неравенства и вычтем величину $e^{-\tau}w_\alpha(\xi+f^*\tau,\eta+f_*\tau)$. Согласно определению (3.1) имеем

$$u_\alpha(\xi+f^*\tau)\leqslant u(\eta+f_*\tau)+w_\alpha(\xi+f^*\tau,\eta+f_*\tau)$$

Следовательно,

$$1-u_\alpha(\xi)\leqslant e^{-\tau}[1-u_\alpha(\xi+f^*\tau)]+\Delta_\alpha \tag{3.19}$$

$$\Delta_\alpha=e^{-\tau}w_\alpha(\xi+f^*\tau,\eta+f_*\tau)-w_\alpha(\xi,\eta)$$

Оценим величину Δ_α. Функция w_α непрерывно-дифференцируема. Согласно (3.7) и (3.14) имеем $s_*=\mathrm{D}_x w_\alpha(\xi,\eta)=-\mathrm{D}_y w_\alpha(\xi,\eta)$. Поэтому

$$\Delta_\alpha\leqslant e^{-\tau}\Big[w_\alpha(\xi,\eta)+\big\langle s_*,f^*\big\rangle\tau-\langle s_*,f_*\rangle\tau\Big]-w_\alpha(\xi,\eta)+h_1(\alpha,\tau)\tau\leqslant$$

$$\leqslant\Big[\big\langle s_*,f^*\big\rangle-\langle s_*,f_*\rangle-w_\alpha(\xi,\eta)+h_2(\alpha,\tau)\Big]\tau$$

Здесь и ниже $h_i(\alpha,\tau)\to 0$ при $\tau\to 0$. Эти величины зависят только от τ и не зависят от выбранного движения $x(\cdot)\in X(x_0,U_\alpha,\Delta)$.

Из (2.3) и (3.14) имеем

$$\langle s_*,f\rangle\leqslant H(\xi,s_*)\quad \forall f\in \mathrm{co}\{f(\xi,p^*,q):q\in Q\}$$

Следовательно, для вектора f^* (3.15) справедливо неравенство

$$\big\langle s_*,f^*\big\rangle\leqslant H(\xi,s_*)+h_3(\alpha,\tau)$$

Аналогично, из (2.4), (3.14) и (3.18) получаем

$$\langle s_*,f_*\rangle\geqslant H(\eta,s_*)-h_4(\alpha,\tau)$$

Из приведенных выше оценок следует

$$\Delta_\alpha\leqslant[H(\xi,s_*)-H(\eta,s_*)-w_\alpha(\xi,\eta)+h_5(\alpha,\tau)]\tau$$

Используя (3.3), получаем

$$\Delta_\alpha\leqslant h_5(\alpha,\tau)\tau$$

Подставляя это неравенство в (3.19), приходим к требуемой оценке (3.16), где $h(\alpha,\tau)=h_5(\alpha,\tau)$, $\lim_{\alpha\to 0}\lim_{\tau\to 0}h_5(\alpha,\tau)=0$. Из приведенных оценок видно, что величину h_5 можно определить так, чтобы она не зависела от выбора $x(\cdot)\in X(x_0,U_\alpha,\Delta)$.

Таким образом, теорема доказана.

4. Аналогично можно построить ε-оптимальную стратегию второго игрока. Пусть заданы начальная точка $x_0\in G$ и число $\theta<-\ln(1-u(x_0))$. Здесь по-прежнему u – минимаксное решение задачи (2.6), (2.7). Из определения этого решения следует [5, 7], что существует последовательность нижних решений u_k, такая, что $0\leqslant u_k(x_0)\leqslant u(x_0)\leqslant 1$ и $\lim_{k\to\infty}u_k(x_0)=u(x_0)$. Поэтому можно выбрать нижнее решение u_*, такое, что

$$\theta<-\ln(1-u_*(x_0))$$

Функция u_* полунепрерывна сверху и обладает следующим свойством: для любых $\eta\in G$, $p_*\in P$ и $\tau>0$ существует траектория $y(\cdot):[0,\tau]\mapsto R^n$ дифференциального включения

$$\dot y(t)\in \mathrm{co}\{f(y(t),p_*,q):q\in Q\}$$

с начальным условием $y(0)=\eta$, удовлетворяющая неравенству

$$(u(\eta)-1)e^{\tau}\leqslant u(y(\tau))-1$$

Положим

$$u_*^\alpha(x) := \max_{y \in \overline{G}} \left[u_*(y) - w_\alpha(x,y) \right]$$

где функция w_α по-прежнему определена равенством (3.2). Выберем точку

$$y^\alpha(x) \in \operatorname{Arg}\max_{y \in \overline{G}} [u_*(y) - w_\alpha(x,y)]$$

Определим стратегию второго игрока $V_\alpha : \overline{G} \mapsto Q$ равенствами

$$V_\alpha(x) = q_0(x, s^\alpha(x))$$

$$s_\alpha(x) := -(D_x w_\alpha)(x, y^\alpha(x)) = (D_y w_\alpha)(x, y^\alpha(x))$$

где q_0 – предстратегия вида (2.4). Для стратегий V_α справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Для заданных начальной точки $x_0 \in G$ и момента времени $\theta < -\ln(1 - u(x_0))$ параметры $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$ можно выбрать так, чтобы выполнялась оценка

$$\lim_{\operatorname{diam}(\Delta) \downarrow 0} \inf \inf \{ \tau_\varepsilon(x(\cdot)) : x(\cdot) \in X(x_0, V_\alpha, \Delta) \} \geqslant \theta$$

Доказательство совпадает в основном с доказательством теоремы 1.

Заметим, что оценка гарантированного результата получена здесь для фиксированной начальной точки. Однако конструкцию стратегии V_α можно дополнить так, чтобы оценка имела место для всех точек x_0 из заданного компакта D.

Из теорем 1 и 2 следует равенство (2.10). При выборе достаточно малого параметра α стратегии U_α и V_α гарантируют первому и второму игрокам результаты, сколь угодно близкие к оптимальному.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-16032) и Международного научного фонда (NME000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
2. *Красовский Н.Н.* Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели // Мат. сб. 1978. Т. 107. № 4. С. 541–571.
3. *Кононенко А.Ф.* О равновесных позиционных стратегиях в неантагонистических дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 2. С. 285–288.
4. *Субботина Н.Н.* Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 11. С. 1890–1896.
5. *Субботин А.И.* Непрерывные и разрывные решения краевых задач для уравнений с частными производными первого порядка // Докл. РАН. 1992. Т. 323. № 1. С. 30–34.
6. *Crandall M.G., Ishii H., Lions P.-L.* Uniqueness of viscosity solutions of Hamilton–Jacoby equations revisited // J. Math. Soc. Japan. 1987. V. 39. № 4. P. 581–596.
7. *Subbotin A.I.* Discontinuous solutions of a Dirichlet type boundary value problem for the first order partial differential equation // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. V. 8. № 2. P. 145–164.
8. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
9. *Гарнышева Г.Г., Субботин А.И.* Стратегия минимаксного прицеливания в направлении квазиградиента // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 5–11.
10. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
11. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
12. *Кружков С.Н.* Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала. I // Мат. сб. 1975. Т. 98. № 3. С. 450–493.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
21.XII.1994